Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 2, dez. 2022

**Rogério César dos Santos**
Faculdade Planaltina
Universidade de Brasília
rogerc@unb.br

# Generalização do problema dos retângulos de área numericamente igual ao perímetro

Generalization of the problem of rectangles whose area is numerically equal to the perimeter


## Resumo

Neste artigo, vamos generalizar o problema de encontrar os retângulos de medidas inteiras $x$ e $y$, cuja área é numericamente igual ao perímetro, ou seja, $x \cdot y = 2x + 2y$, quando fixada uma unidade de medida para o comprimento dos lados. Sabe-se que existem dois tais retângulos: o de medidas 4 por 4 e o de medidas 3 por 6. A generalização que provamos no presente trabalho é a resolução da equação, nos inteiros positivos, da equação $x \cdot y = kx + ky$. Provamos que o número $S$ de soluções $(x_0, y_0)$ desta equação é igual ao número de divisores positivos de $k^2$, isto é, $S = \#\{\text{divisores de } k^2\}$. Provamos ainda que, se considerarmos que os pares simétricos $(x_0, y_0)$ e $(y_0, x_0)$ são uma única solução, então a quantidade $R$ de soluções da equação é $R = \frac{S+1}{2}$. Basicamente, usamos manipulações algébricas simples, equações, inequações e funções bijetoras. Por fim, simulamos alguns casos particulares de $k$ no softwares livre Maxima para verificação dos resultados.


**Palavras-chave:** Geometria plana. Retângulos. Áreas. Perímetro. Generalização.


## Abstract

In this article, we are going to generalize the problem of finding rectangles of integer measures $x$ and $y$, whose area is numerically equal to the perimeter, i.e., $x \cdot y = 2x + 2y$, when given a unit of measure for the length of the sides. It is known that there are two such rectangles: the one measuring 4 by 4 and the one measuring 3 by 6. The generalization that we prove in the present work is the resolution of the equation, in positive integers, of the equation $xy = kx + ky$. We prove that the number $S$ of solutions $(x_0, y_0)$ of this equation is equal to the number of positive divisors of $k^2$, that is, $S = \#\{\text{divisors of } k^2\}$. We further prove that if we consider that the symmetric pairs $(x_0, y_0)$ and $(y_0, x_0)$ are a unique solution, then the amount $R$ of solutions to the equation is $R = \frac{S+1}{2}$. Basically, we use simple algebraic manipulations, equations, inequations and bijection functions. Finally, we simulate some particular cases of $k$ in the Maxima free software to check the results.

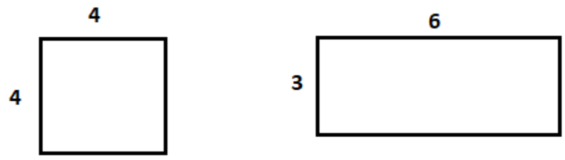

**Keywords:** Plane Geometry. Rectangles. Areas. Perimeter. Generalization.

Artigo recebido em abr. 2022 e aceito em ago. 2022

# 1 Introdução

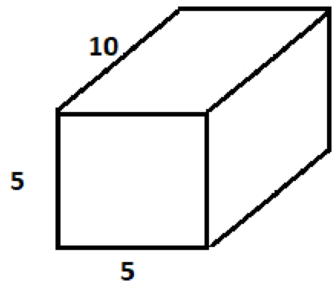
Perguntas interessantes de natureza abstrata aparecem, por vezes, em sala de aula, como esta: Professor, a área de um retângulo pode ter valor ao igual ao seu perímetro? Os artigos de Usiskin (1984) e Santos e Souza (2020) respondem a esse questionamento de diferentes formas. Eles mostraram que existem dois retângulos de medidas inteiras com a propriedade de que a área $x \cdot y$ é numericamente igual ao perímetro $2x + 2y$, a saber, os retângulos de medidas 3 por 6 e 4 por 4, conforme mostra a figura 1.

**Figura 1**. Os dois retângulos de área igual ao perímetro.
Fonte: desenho feito no software Paint, pelo autor.




Em problema correlato, o artigo de Santos e Souza (2020) apresenta todos os paralelepípedos de medidas inteiras cujo volume é numericamente igual à área total, e eles mostram que são dez os tais paralelepípedos. Um deles está ilustrado na figura 2.

**Figura 2**. Um exemplo de paralelepípedo cujo volume é igual à área superficial, 250.
Fonte: desenho feito no software Paint, pelo autor.




A proposta do presente artigo é obter uma generalização do primeiro problema, o dos retângulos de área $x \cdot y$ igual ao perímetro $2x + 2y$. A generalização que vamos provar aqui é a de encontrar as soluções da equação $x \cdot y = kx + ky$, que é simétrica com relação a $x$ e $y$, na forma da seguinte proposição:

*Proposição 1*. Considere a equação $x \cdot y = kx + ky$, que é simétrica com relação a $x$ e $y$, tal que $x > 0, y > 0$ e $k > 0$ são inteiros positivos. Então:

i) a quantidade $S(k)$ de pares ordenados $(x_0, y_0)$ soluções da equação $xy = kx + ky$ é igual ao número de divisores de $k^2$, isto é,

$$S(k) = \#\{div(k^2)\},$$

considerando que as soluções simétricas $(x_0, y_0)$ e $(y_0, x_0)$ são distintas.

ii) se as soluções simétricas $(x_0, y_0)$ e $(y_0, x_0)$ são consideradas uma só solução da equação $xy = xk + yk$, então a quantidade $R(k)$ de pares ordenados soluções é igual a

$$R(k) = \frac{S(k) + 1}{2} = \frac{\#\{div(k^2)\} + 1}{2}.$$

Observe que quando $k = 2$, a equação se torna $xy = 2x + 2y$, e então:

$$S(2) = \#\{div(2^2)\} = \#\{1,2,4\} = 3,$$

SANTOS, R. C. dos. Generalização do problema dos retângulos de área numericamente igual ao perímetro. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 1-8, dez. 2022.
DOI: 10.21167/cqdv22n32022001008 Disponível em: http://www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd/

que correspondem aos pares $(3,6), (4,4)$ e $(6,3)$, em que as duas soluções simétricas $(3,6)$ e $(6,3)$ são contabilizadas como distintas. E,

$$R(2) = \frac{\#\{div(2^2)\} + 1}{2} = \frac{\#\{1,2,4\} + 1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

exatamente as soluções mencionadas na introdução deste artigo: os retângulos 4 por 4 e 3 por 6 que possuem área $xy$ igual ao perímetro $2x + 2y$, em que excluímos o par simétrico 6 por 3.

## 2 Dois lemas preparatórios

Antes de começarmos as provas das fórmulas de $S(k)$ e de $R(k)$, precisaremos de dois resultados preliminares. O lema 1 será usado na prova do lema 2, que por sua vez será utilizado na prova da proposição 1.

*Lema 1.* Se $xy = kx + ky$, onde $x, y, k > 0$ são inteiros, então $x \geq k + 1$ e $y \geq k + 1$. Ou seja, $k + 1$ é um limitante inferior de $x$ e de $y$.

*Prova.*

Dado $k > 0$, se por absurdo $y \leq k$, então:

$$kx + ky = xy \leq xk.$$

Daí, $kx + ky \leq kx$, o que implica $ky \leq 0$, uma contradição.

*Lema 2.* Se consideramos as mesmas hipóteses do lema 1, então $x = k + \frac{k^2}{y-k}$, e $x \leq k^2 + k$ e $y \leq k^2 + k$, isto é, $k^2 + k$ é um limitante superior de $x$ e de $y$.

*Prova.*

Da equação $xy = kx + ky$, temos:

$$x(y - k) = ky.$$

Pelo lema 1, $y > k$, então $y - k > 0$ e, assim,

$$x = \frac{ky}{y-k} = \frac{ky - k^2 + k^2}{y-k} = \frac{k(y-k) + k^2}{y-k} = k + \frac{k^2}{y-k}.$$

Logo,

$$x = k + \frac{k^2}{y-k}.$$

Desta identidade, conseguimos obter um limitante superior para $x$ e para $y$. Como $x$ e $k$ são inteiros, então $\frac{k^2}{y-k}$ também é inteiro, e por isso

$$y - k \leq k^2.$$

Isto é, $y \leq k^2 + k$.

Por simetria, analogamente também obtemos $x \leq k^2 + k$, como queríamos demonstrar.

## 3 Quantidade $S(k)$ de soluções da equação $xy = kx + ky, k \geq 1, x, y > 0$.

Agora sim, vamos provar a proposição 1, isto é, encontrar o número de soluções da equação $xy = kx + ky$. Do lema 2, se $x$ e $y$ satisfazem a equação $xy = kx + ky$, então, tomando $t = \frac{k^2}{y-k} > 0$, temos:

$$x = k + \frac{k^2}{y-k},$$
$$x = k + t \quad (*).$$

Como $x$ e $k$ são inteiros, então $t = \frac{k^2}{y-k}$ é inteiro, donde vamos obter $y$:

$k^2 = ty - tk$. Como $t > 0$, temos

$$y = \frac{k^2 + tk}{t} = \frac{k^2}{t} + k\ ,$$
$$y = \frac{k^2}{t} + k \quad (**).$$

Como $t, y$ e $k$ são inteiros, então $t$ é um divisor de $k^2$.

Concluímos que, fixado $k > 0$, toda solução $(x, y)$ da equação $xy = k(x + y)$ é do tipo $(x, y) = \left(k + t, \frac{k^2}{t} + k\right)$, onde $t = x - k$ é divisor de $k^2$.

Fixado $k$, consideremos $A$ o conjunto das soluções $(x, y)$ da equação $xy = k(x + y)$ e $B$ o conjunto de todos os divisores positivos $t$ de $k^2$, inclusos em $B$ o divisor 1 e o próprio $k^2$.

Sabemos que, para cada elemento $(x, y)$ de $A$, corresponde um $t = x - k$ tal que $(x, y) = \left(k + t, \frac{k^2}{t} + k\right)$. Logo, podemos considerar a aplicação $F$ seguinte:

$$F: A \to B$$

tal que $F\big((x, y)\big) = F\left(\left(k + t, \frac{k^2}{t} + k\right)\right) = t,$

com $t = x - k$.

A aplicação $F$ é *injetiva*, pois, se $(x_1, y_1) = \left(k + t_1, \frac{k^2}{t_1} + k\right) \neq (x_2, y_2) = \left(k + t_2, \frac{k^2}{t_2} + k\right)$ são elementos distintos de $A$, então, $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$, isto é:

$$k + t_1 \neq k + t_2 \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{t_1} + k \neq \frac{k^2}{t_2} + k$$

e, de qualquer uma das duas desigualdades (ou de ambas), concluímos facilmente que $t_1 \neq t_2$.

Por outro lado, dado $t_0$ elemento de $B$, divisor de $k^2$, então, o par

$$(x_0, y_0) = \left(k + t_0, \frac{k^2}{t_0} + k\right)$$

pertence a $A$, pois, substituindo na equação $xy = kx + ky$, temos:

$$(k + t_0) \cdot \left(\frac{k^2}{t_0} + k\right) = k(k + t_0) + k\left(\frac{k^2}{t_0} + k\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{k^3}{t_0} + k^2 + k^2 + t_0 k = k^2 + kt_0 + \frac{k^3}{t_0} + k^2 \Leftrightarrow$$
$$0 = 0.$$

Além disso, $F\big((x_0, y_0)\big) = t_0$. Ou seja, todo elemento $t_0$ de $B$ é imagem de algum elemento $(x_0, y_0)$ de $A$, de modo que a aplicação $F$ entre as soluções da equação e os divisores de $k^2$ é, também, *sobrejetiva*.

Existe, portanto, uma *bijeção* entre as soluções da equação $xy = kx + ky$ e os divisores de $k^2$. Enfim, $S(k) = \#\{div(k^2)\}$, no caso em que os pares simétricos são considerados soluções distintas da equação.

Ilustrando, a equação $xy = 6x + 6y$ possui

$$\#\{div(36)\} = \#\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\} = 9$$

soluções, como mostra a figura 3, extraída do software livre Maxima. Observe, na figura, que bastou variarmos $x$ e $y$ entre os seus limitantes inferior e superior, $k+1$ e $k^2+k$, respectivamente, conforme os lemas 1 e 2.

**Figura 3**. Programa no Maxima que mostra as nove soluções da equação $xy = 6x + 6y$.
Fonte: print da tela do Maxima.

```
(%i7)   k:6;for x from k+1 thru k^2+k do
        (for y from k+1 thru k^2+k do
                (if x·y=k·x+k·y then
                (print(x,y))));
(k)     6
        7 42
        8 24
        9 18
        10 15
        12 12
        15 10
        18 9
        24 8
        42 7
(%o7)   done
```

# 4 A fórmula de $R(k)$

Agora, vamos encontrar $R(k)$, em que os pares simétricos são considerados uma única solução. Vimos atrás que existe uma bijeção entre os divisores de $k^2$ e as soluções da equação $xy = kx + ky$, se considerarmos que a solução $(x_0, y_0)$ é diferente da sua simétrica $(y_0, x_0)$, e a quantidade de tais soluções é dada por $S(k) = \#\{div(k^2)\}$. Então agora, na busca de $R(k)$, devemos excluir as soluções simétricas $(y_0, x_0)$.

Observemos antes que sempre existirá uma única *solução espelho* $(x, x)$ em que $x = y$, pois, se $xy = kx + ky$ com $x = y$, então:

$$x^2 = xk + xk \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 2xk \Leftrightarrow$$
$$x = 2k \text{ e } y = 2k, \text{ única.}$$

Assim, dentre as $S(k) = \#\{div(k^2)\}$ soluções, existem: as $P$ soluções $(x_0, y_0)$, com $x_0 > y_0$, as suas $P$ simétricas $(x_1, y_1) = (y_0, x_0)$, com $x_1 < y_1$, e mais a solução espelho $(x_0, x_0) = (2k, 2k)$, totalizando $S(k) = \#\{div(k^2)\} = 2P + 1$ soluções. Ou seja, $S(k) = 2P + 1$.

Isolando $P$, $P = \frac{S(k)-1}{2}$. Então, retirando as $P$ soluções simétricas de $S(k)$, temos

$$R(k) = S(k) - P =$$
$$(2P+1) - P = P + 1 = \frac{S(k)-1}{2} + 1 = \frac{S(k)+1}{2} = \frac{\#\{div(k^2)\}+1}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Exemplos de $R(k)$.

Para $k = 1$, $xy = x + y$, $\#\{div(k^2)\} = \#\{div(1)\} = 1$ e $R(1) = \frac{1+1}{2} = 1$, o único par $(2,2)$, tal que $2 \cdot 2 = 2 + 2$.

Para $k = 2$, $xy = 2x + 2y$, $\#\{div(k^2)\} = \#\{div(4)\} = 3$ e $R(2) = \frac{3+1}{2} = 2$, os pares já conhecidos (4,4) e (3,6) ((6,3) é repetido).

Para $k = 3$, $xy = 3x + 3y$, $\#\{div(k^2)\} = \#\{div(9)\} = 3$ e $R(3) = \frac{3+1}{2} = 2$. Neste caso, $t = 1$ ou $t = 3$ ou $t = 9$ e, respectivamente, por $(*)$ e $(**)$, temos os pares (4,12) e (6,6) ((12,4) é repetido).

Antes do próximo exemplo, lembremos que, dado um número natural $N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$, onde $p_i$ são os primos na decomposição de $N$, $i = 1, \dots, n$, então o número de divisores de $N$ é o produto $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_n + 1)$.

Continuando os exemplos, para $k = 20$, temos 8 soluções:

$$R(20) = \frac{\#\{div(400)\} + 1}{2} = \frac{\#div\{(8 \cdot 50)\} + 1}{2} =$$
$$\frac{\#\{div(16 \cdot 25)\} + 1}{2} = \frac{\#\{div(2^4 \cdot 5^2)\} + 1}{2} =$$
$$\frac{(5 \cdot 3) + 1}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Utilizando novamente o Maxima, podemos obtê-los. Observe na figura 4 que $x$ varia entre seus limitantes, e, para retirar as soluções repetidas, $y$ começa de $x$ $(y \geq x)$:

**Figura 4**. Programa no Maxima que resolve $xy = 20x + 20y$, retirando as soluções simétricas.
Fonte: Print da tela do Maxima.

```
(%i17) k:20;for x from k+1 thru k^2+k do
       (for y from x thru k^2+k do
              (if x·y=k·x+k·y then
            (print(x,y))));
(k)    20
       21  420
       22  220
       24  120
       25  100
       28  70
       30  60
       36  45
       40  40
(%o17) done
```

# 5 Considerações finais – outros questionamentos associados ao problema

O problema que ora resolvemos levanta algumas questões. A primeira delas é: quanto maior o valor de $k$, maior a quantidade $S = \#\{div(k^2)\}$ de soluções da equação $xy = kx + ky$? (considerando as simétricas $(x_0, y_0)$ e $(y_0, x_0)$ distintas). A resposta é sim e não!

Não, pois, por exemplo, para a equação $xy = 101x + 101y$, temos que $k^2 = 101^2$ e o número de divisores de $101^2$ é apenas 3 (101 é um número primo).

A resposta também é sim, pois, sabemos que a sequência $(\#\{div(k^2)\}), k = 1,2,3,4,5, \dots$ das quantidades dos divisores de $k^2$, possui subseqüências que tendem ao infinito, logo, a quantidade $S$ de soluções pode se tornar sim tão grande quanto se queira, à medida que escolhemos, criteriosamente, valores cada vez maiores de $k$.

Outra questão que surge é: dado $k$, é fácil encontrar alguma solução da equação $xy = kx + ky$ sem efetuar grandes cálculos? Por exemplo, qual seria, de imediato, uma solução de $xy = 101(x + y)$?

Pelo que vimos, a solução espelho $(2k, 2k)$ sempre será uma solução, então, $(202{,}202)$ é certamente uma.

Outro questionamento interessante é: dado um $S$, sempre existirão valores de $k$ para os quais a equação correspondente $xy = kx + ky$ possui exatas $S$ soluções? Por exemplo, dado $S = 30$, existe algum valor de $k$ cuja equação $xy = kx + ky$ possui $S = 30$ soluções?

O valor de $k$ será aquele tal que a quantidade de divisores de $k^2$ é 30. Decompondo $k$ em fatores primos, temos:

$$k = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$$

e

$$k^2 = p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} \cdots p_n^{2m_n}.$$

Logo, a quantidade de divisores positivos de $k^2$ é: $(2m_1 + 1)(2m_2 + 1) \cdots (2m_n + 1) = 30$.

Porém, essa identidade não pode ser verdadeira, já que um produto de números ímpares é ímpar. Ou seja, concluímos, por esse raciocínio, que a quantidade $S$ de soluções deve ser sempre ímpar.

Nessa linha de pensamento, dado um ímpar qualquer $S = 2m + 1$, $m \geq 1$, como obter $k$ cuja equação $xy = k(x + y)$ possui $S$ soluções?

Uma possibilidade é tomar $k = p^m$, para um primo $p$ qualquer, pois, desta forma, a equação certamente terá $S = \#\{div(k^2)\} = \#\{div(p^{2m})\} = 2m + 1 = S$ soluções. Como a quantidade de primos é infinita, então, dado um ímpar qualquer $S = 2m + 1$, existem infinitos valores de $k = p^m$ para os quais a equação correspondente $xy = kx + ky$ possui $S$ soluções. Por exemplo, dado $S = 39 = 2 \cdot 19 + 1$, então podemos pegar $k = p^{19}$ e as equações seguintes, dentre infinitas outras possíveis, terão 39 soluções:

$$xy = 2^{19}x + 2^{19}y,$$
$$xy = 3^{19}x + 3^{19}y,$$
$$xy = 5^{19}x + 5^{19}y,$$
$$xy = 7^{19}x + 7^{19}y,$$
$$xy = 11^{19}x + 11^{19}y,$$
$$\ldots$$

Ainda na questão de se obter $k$ para o qual a equação possui $S$ soluções, podemos nos perguntar se, dado $S = 2m + 1$, os únicos valores de $k$ correspondentes são os do tipo $k = p^m$, com $p$ primo. Naturalmente que não, pois, por exemplo, se $S = 9 = 2 \cdot 4 + 1$, então além de $k = p^4$ para qualquer primo $p$, vimos anteriormente na figura 3 que $k = 6$ também fornece 9 soluções para a equação $xy = k(x + y)$.

Isto é, dado $S_0 = 2m + 1$, podemos obter outros valores de $k$, não apenas da forma $p^m$, que fornecem $S_0$ soluções da equação correspondente. Mas, como obtê-los? Ora, basta escrevermos o ímpar $S_0$ como produto de fatores ímpares de quantas maneiras forem possíveis:

$$S_0 = 2m + 1 = (2m_1 + 1)(2m_2 + 1) \cdots (2m_n + 1),$$

e, para cada expressão dessa, tomamos $k$ correspondente como um produto de potências de primos $p_j$ com expoentes $m_j$:

$$k = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}.$$

Dessa forma, teremos $k^2 = p_1^{2m_1} p_2^{2m_2} \cdots p_n^{2m_n}$ e

$$S(k) = \#\{div(k^2)\} = (2m_1 + 1)(2m_2 + 1) \ldots (2m_n + 1) = S_0.$$

Vejamos uma situação particular. Para $S_0 = 45 = 3^2 \cdot 5$, temos as seguintes possibilidades para $k$, a depender de como expressamos 45:

$$i)\ 45 = 2 \cdot 22 + 1, \text{então } k = p^{22}, \text{logo,}$$
$$xy = p^{22}(x + y), \text{com } p \text{ primo, ou}$$

$$ii)\ 45 = 3 \cdot 15 = (2 \cdot 1 + 1) \cdot (2 \cdot 7 + 1), \text{então } k = p_1^1 \cdot p_2^7, \text{logo,}$$
$$xy = p_1^1 \cdot p_2^7(x + y), \text{com } p_j \text{ primos, ou}$$

$$iii)\ 45 = 9 \cdot 5 = (2 \cdot 4 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1), \text{então } k = p_1^4 \cdot p_2^2, \text{logo,}$$
$$xy = p_1^4 \cdot p_2^2(x + y), \text{com } p_j \text{ primos, ou}$$

$$iv)\ 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1), \text{então } k = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdot p_3^2, \text{logo,}$$
$$xy = p_1 p_2 p_3^2(x + y), \text{com } p_j \text{ primos.}$$

Exemplos correspondentes aos casos acima, de equações que possuem $S_0 = 45$ soluções, são:

$$i)\ xy = 17^{22}(x + y),$$
$$ii)\ xy = 17 \cdot 29^7(x + y),$$
$$iii)\ xy = 17^4 \cdot 29^2(x + y),$$
$$iv)\ xy = 17 \cdot 29 \cdot 53^2(x + y).$$

# 6 Referências


SANTOS, R. C.; SOUZA, V. M. Paralelepípedos de área numericamente igual ao volume. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1 - 8, jul. 2020.

SANTOS, R. C.; SOUZA, V. M. Retângulos de área igual ao perímetro: novas provas. **Revista do Professor de Matemática,** v. 101, p. 8 - 10, 2020.

USISKIN, Z. Seis problemas não triviais equivalentes. **Revista do Professor de Matemática**, n. 4, 1984.