Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022

A generalização dos sedenios de Leonardo e Narayana

The generalization of the sedenions of Leonardo and Narayana

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará
UFC
re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
IFCE
fregis@gmx.fr

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
UTAD
pcatarino23@gmail.com

Resumo

Assim como ocorre para a sequência de Fibonacci, tem-se o processo de complexificação da sequência de Leonardo e Narayana, outras duas sequências não muito conhecidas na literatura Matemática. Desse modo, este trabalho apresenta de forma introdutória os sedenios de Leonardo e Narayana, realizando ainda a sua generalização para os números inteiros não positivos. Com isso, são estudadas algumas propriedades matemáticas inerente à esses números, abordando a sua respectiva forma matricial, função geradora, fórmula de Binet e dentre outros aspectos matemáticos. Para pesquisas futuras, busca-se uma investigação em torno da aplicação dos sedenios dessas duas sequências apresentadas, integrando com a área de física moderna.
Palavras-chave: Forma matricial, Fórmula de Binet, Sedenios, Sequência de Leonardo, Sequência de Narayana.

Abstract

As for the Fibonacci sequence, there is the process of complexification of the Leonardo and Narayana sequence, two other sequences not very well known in the Mathematics literature. Thus, this work introduces the sedenios of Leonardo and Narayana in an introductory way, also carrying out their generalization for non-positive whole numbers. Thus, some mathematical properties inherent to these numbers are studied, addressing their respective matrix form, generating function, Binet's formula and among other mathematical aspects. For future research, an investigation is sought around the application of the seneniums of these two sequences presented, integrating with the area of modern physics.
Keywords: Matrix form, Binet's formula, Sedenion, Leonardo sequence, Narayana sequence.

Artigo recebido em abr. 2022 e aceito em out. 2022

1 Introdução

A sequência de Narayana foi introduzida pelo matemático indiano Narayana Pandita (1340-1400), após realizar estudos sobre a problemática das vacas e bezerros [1, 2]. Dessa forma, tem-se essa sequência com notação N_n, como sendo do tipo numérica, de terceira ordem, linear e recorrente, apresentando a seguinte relação de recorrência $N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, n \geqslant 3, N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$.

O polinômio característico dessa sequência é dado pela equação $x^3 - x^2 - 1 = 0$, em que possui como solução duas raízes complexas e uma raiz real. Assim, o valor real é representado pela proporção de super-ouro, possuindo valor aproximado de 1,46. Contudo, outros aspectos matemáticos e históricos inerentes à essa sequência podem ser estudados em outros trabalhos [1, 2].

Tão logo tratando sobre a sequência de Leonardo (L_n), tem-se que essa é do tipo numérica, de segunda ordem, linear e recorrente [3, 4]. Porém, pouca sabe-se sobre o criador desses números, havendo uma suposição que seja criada por Leonardo Pisano, uma vez que apresenta semelhanças com a sequência de Fibonacci. Assim, tem-se que a sua relação de recorrência é dada por $L_n = L_{n-1} + L_{n-2} + 1, n \geqslant 2, L_0 = L_1 = 1$. No trabalho de Catarino e Borges [4], foi possível estabelecer uma outra relação de recorrência, dada por: $L_n = 2L_{n-1} - L_{n-3}, n \geqslant 3$. O polinômio característico dessa sequência é $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, apresentando uma raiz igual a 1 e as outras duas iguais as raízes do polinômio característico referente à sequência de Fibonacci, existindo assim uma relação entre essas duas sequências [5, 6].

Contudo, serão estudados os números sedenios, desenvolvidos por Cayley-Dickson [7, 8], sendo então denotados por $\mathbb{S}$, em que a sua álgebra $\mathbb{S}$ possui 16 dimensões. Desse modo os sedenios são aplicados em diversas áreas da ciência, tais como: gravidade linear e teoria eletromagnética.

A seguir, são utilizados os elementos $\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, ..., \mathrm{e}_{15}$, em que e_0 é o elemento unitário, pertencente ao conjunto dos números reais e $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, ..., \mathrm{e}_{15}$ pertencem ao conjunto dos números complexos, sendo então unidades imaginárias. Logo, um sedenio S é escrito por:

$$S = \sum_{i=0}^{15} a_i \mathrm{e}_\mathrm{i},$$

em que $a_0, a_1, ..., a_{15}$ são números reais, em que a_0 é a parte real de $\mathbb{S}$.

Os sedenios foram definidos como [8]:

$$S = (O_1; O_2) \in \mathbb{S}, O_1, O_2 \in \mathbb{O},$$

onde $\mathbb{O}$ é a álgebra dos octônios sobre os reais. Dessa forma, percebe-se que um sedenio é um par ordenado de dois octônios, possuindo o seu conjugado definido como $\overline{S} = (O_1; -O_2)$ [9].

Cawagas [10] construiu uma tabela de multiplicação para a base de $\mathbb{S}$, como mostrado na Tabela 1. Assim, tem-se dois sedenios dados por A e B, em que a sua soma é dada por:

$$\begin{aligned} A + B = \sum_{i=0}^{15} a_i \mathrm{e}_\mathrm{i} + \sum_{i=0}^{15} b_i \mathrm{e}_\mathrm{i} &= (a_0 + b_0)\mathrm{e}_0 + (a_1 + b_1)\mathrm{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathrm{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathrm{e}_3 + (a_4 + b_4)\mathrm{e}_4 + (a_5 + b_5)\mathrm{e}_5 \\ &+ (a_6 + b_6)\mathrm{e}_6 + (a_7 + b_7)\mathrm{e}_7 + (a_8 + b_8)\mathrm{e}_8 + (a_9 + b_9)\mathrm{e}_9 + (a_{10} + b_{10})\mathrm{e}_{10} + (a_{11} + b_{11})\mathrm{e}_{11} + (a_{12} + b_{12})\mathrm{e}_{12} \\ &+ (a_{13} + b_{13})\mathrm{e}_{13} + (a_{14} + b_{14})\mathrm{e}_{14} + (a_{15} + b_{15})\mathrm{e}_{15} \\ &= \sum_{i=0}^{15} (a_i + b_1)\mathrm{e}_\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Tabela 1: Tábua de multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$. Fonte: Bilgici [8]

$\cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Assim, com base na Tabela 1, a multiplicação de dois sedenios A e B é dada por:

$$\begin{aligned}
AB &= \sum_{i=0}^{15} a_i \mathrm{e_i} \sum_{i=0}^{15} b_i \mathrm{e_i} \\
&= (a_0\mathrm{e}_0 + a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3 + a_4\mathrm{e}_4 + a_5\mathrm{e}_5 + a_6\mathrm{e}_6 + a_7\mathrm{e}_7 + a_8\mathrm{e}_8 + a_9\mathrm{e}_9 + a_{10}\mathrm{e}_{10} + a_{11}\mathrm{e}_{11} \\
&+ a_{12}\mathrm{e}_{12} + a_{13}\mathrm{e}_{13} + a_{14}\mathrm{e}_{14} + a_{15}\mathrm{e}_{15}) \\
&(b_0\mathrm{e}_0 + b_1\mathrm{e}_1 + b_2\mathrm{e}_2 + b_3\mathrm{e}_3 + b_4\mathrm{e}_4 + b_5\mathrm{e}_5 + b_6\mathrm{e}_6 + b_7\mathrm{e}_7 + b_8\mathrm{e}_8 + b_9\mathrm{e}_9 + b_{10}\mathrm{e}_{10} + b_{11}\mathrm{e}_{11} \\
&+ b_{12}\mathrm{e}_{12} + b_{13}\mathrm{e}_{13} + b_{14}\mathrm{e}_{14} + b_{15}\mathrm{e}_{15}) \\
&= a_0b_0\mathrm{e}_0 + a_0b_1\mathrm{e}_1 + a_0b_2\mathrm{e}_2 + a_0b_3\mathrm{e}_3 + a_0b_4\mathrm{e}_4 + a_0b_5\mathrm{e}_5 + a_0b_6\mathrm{e}_6 + a_0b_7\mathrm{e}_7 + a_0b_8\mathrm{e}_8 + a_0b_9\mathrm{e}_9 + a_0b_{10}\mathrm{e}_{10} \\
&+ a_0b_{11}\mathrm{e}_{11} + a_0b_{12}\mathrm{e}_{12} + a_0b_{13}\mathrm{e}_{13} + a_0b_{14}\mathrm{e}_{14} + a_0b_{15}\mathrm{e}_{15} \\
&+ a_1b_0\mathrm{e}_1 - a_1b_1\mathrm{e}_0 + a_1b_2\mathrm{e}_3 - a_1b_3\mathrm{e}_2 + a_1b_4\mathrm{e}_5 - a_1b_5\mathrm{e}_4 - a_1b_6\mathrm{e}_7 + a_1b_7\mathrm{e}_6 + a_1b_8\mathrm{e}_9 - a_1b_9\mathrm{e}_8 - a_1b_{10}\mathrm{e}_{11} \\
&+ a_1b_{11}\mathrm{e}_{10} - a_1b_{12}\mathrm{e}_{13} + a_1b_{13}\mathrm{e}_{12} + a_1b_{14}\mathrm{e}_{15} - a_1b_{15}\mathrm{e}_{14} \\
&+ \cdots \\
&+ a_{15}b_0\mathrm{e}_{15} - a_{15}b_1\mathrm{e}_{14} - a_{15}b_2\mathrm{e}_{13} - a_{15}b_3\mathrm{e}_{12} + a_{15}b_4\mathrm{e}_{11} + a_{15}b_5\mathrm{e}_{10} - a_{15}b_6\mathrm{e}_9 + a_{15}b_7\mathrm{e}_8 - a_{15}b_8\mathrm{e}_7 + a_{15}b_9\mathrm{e}_6 \\
&- a_{15}b_{10}\mathrm{e}_5 - a_{15}b_{11}\mathrm{e}_4 + a_{15}b_{12}\mathrm{e}_3 + a_{15}b_{13}\mathrm{e}_2 + a_{15}b_{14}\mathrm{e}_{15} - a_{15}b_{15}\mathrm{e}_1
\end{aligned}$$

Ressalta-se que as propriedades associativa e comutativa não se verificam nessa álgebra.

2 Os sedenios de Leonardo

Nesta seção, serão estudados os sedenios de Leonardo, abordando os seus respectivos aspectos matemáticos, com base no trabalho de Mangueira *et al.* [12], em que tratam dos sedenios de Leonardo.

Definição 1. *Para $n \geqslant 0$, os sedenios de Leonardo são definidos por [11]:*

$$SL_n = \sum_{s=0}^{15} L_{n+s}\mathrm{e_s},$$

Em consequência da Definição 1 e da fórmula de recorrência unidimensional de Leonardo $L_n = 2L_{n-1} - L_{n-3}$, tem-se que a fórmula de recorrência dos sedenios de Leonardo, é dada por:

$$SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3},$$

onde $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. *A função geradora dos sedenios de Leonardo, SL_n, é dada por [11]:*

$$g(SL_n, x) = \frac{SL_0 + (SL_1 - 2SL_0)x + (SL_2 - 2SL_1)x^2}{(1 - 2x - x^3)}.$$

Demonstração. Baseado na função:

$$g(SL_n, x) = SL_0 + SL_1x + SL_2x^2 + \ldots + SL_nx^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ e x^3, resultando:

$$2xg(SL_n, x) = 2SL_0x + 2SL_1x^2 + 2SL_2x^3 + \ldots + 2SL_{n-1}x^n + \ldots$$
$$x^3g(SL_n, x) = SL_0x^3 + SL_1x^4 + SL_2x^5 + \ldots + SL_{n-3}x^n + \ldots$$

Realizando $g(SL_n, x) - 2xg(SL_n, x) - x^3g(SL_n, x)$, tem-se que:

$$(1 - 2x - x^3)g(SL_n, x) = SL_0 + (SL_1 - 2SL_0)x + (SL_2 - 2SL_1)x^2$$
$$g(SL_n, x) = \frac{SL_0 + (SL_1 - 2SL_0)x + (SL_2 - 2SL_1)x^2}{(1 - 2x - x^3)}.$$

□

Teorema 3. *A fórmula de Binet dos sedenios de Leonardo, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por [11]:*

$$SL_n = \alpha_l r_1^n + \beta_l r_2^n + \gamma_l r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 são as raízes do polinômio característico $r^3 - 2r^2 + 1 = 0$,

$$A_l = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B_l = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C_l = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$
$$\alpha_{sl} = \sum_{i=0}^{15} x_1^i \mathrm{e_i}, \beta_{sl} = \sum_{i=0}^{15} x_2^i \mathrm{e_i}, \gamma_{sl} = \sum_{i=0}^{15} x_3^i \mathrm{e_i},$$
$$\alpha_l = A_l \alpha_{sl}, \beta_l = B_l \beta_{sl}, \gamma_l = C_l \gamma_{sl}.$$

Demonstração. Por meio da fórmula de Binet $SL_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$ e da recorrência dos sedenios de Leonardo $SL_n = \sum_{i=0}^{15} L_{n+i}\mathrm{e_i}$, com os valores iniciais $SL_0 = \sum_{i=0}^{15} L_i\mathrm{e_i}$, $SL_1 = \sum_{i=0}^{15} L_{i+1}\mathrm{e_i}$ e $SL_2 = \sum_{i=0}^{15} L_{i+2}\mathrm{e_i}$, é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = \sum_{i=0}^{15} L_i\mathrm{e_i} \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 & = \sum_{i=0}^{15} L_{i+1}\mathrm{e_i} \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 & = \sum_{i=0}^{15} L_{i+2}\mathrm{e_i} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-r_2 - r_3)\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + r_2 r_3 \left(\sum_{i=0}^{15} L_i \mathrm{e_i}\right)}{r_1^2 - r_1 r_2 - r_1 r_3 + r_2 r_3},$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-r_1 - r_3)\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + r_1 r_3 \left(\sum_{i=0}^{15} L_i \mathrm{e_i}\right)}{r_2^2 - r_2 r_3 - r_1 r_2 + r_1 r_3},$$

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-r_1 - r_2)\left(\sum_{i=0}^{15} L_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + r_1 r_2 \left(\sum_{i=0}^{15} L_i \mathrm{e_i}\right)}{r_3^2 + r_1 r_2 - r_1 r_3 - r_2 r_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = -1, x_1 + x_2 + x_3 = 2$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$, é fácil ver que:

$$\alpha_l = \frac{(r_2r_2 - r_2 - r_3 + 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \sum_{i=0}^{15} r_1^i \mathrm{e_i} = \frac{(r_2 - 1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \sum_{i=0}^{15} r_1^i \mathrm{e_i} = A_l \sum_{i=0}^{15} r_1^i \mathrm{e_i},$$

$$\beta_l = \frac{(r_1r_3 - r_1 - r_3 + 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \sum_{i=0}^{15} r_2^i \mathrm{e_i} = \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \sum_{i=0}^{15} r_2^i \mathrm{e_i} = B_l \sum_{i=0}^{15} r_2^i \mathrm{e_i},$$

$$\gamma_l = \frac{(r_1r_2 - r_1 - r_2 + 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \sum_{i=0}^{15} r_3^i \mathrm{e_i} = \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \sum_{i=0}^{15} r_3^i \mathrm{e_i} = C_l \sum_{i=0}^{15} r_3^i \mathrm{e_i}.$$

Definindo $\alpha_{sl} = \sum_{i=0}^{15} r_1^i \mathrm{e_i}, \beta_{sl} = \sum_{i=0}^{15} r_2^i \mathrm{e_i}$ e $\gamma_{sl} = \sum_{i=0}^{15} r_3^i \mathrm{e_i}$, é fácil ver que:

$$\alpha_l = A_l \alpha_{sl}, \beta_l = B_l \beta_{sl}, \gamma_l = C_l \gamma_{sl}.$$

□

A forma matricial dos sedenios de Leonardo é realizada com base no trabalho de Vieira, Mangueira, Alves e Catarino [12], em que realiza um estudo referente à forma matricial da sequência de Leonardo unidimensional.

Assim, as igualdades abaixo estão demonstradas no referido trabalho [12].

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} L_{k+2} & L_{k+1} & L_k \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} L_{k+2} & L_{k+1} & L_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} L_{k+3} & L_{k+2} & L_{k+1} \end{bmatrix}$$

Teorema 4. *Para $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos sedenios de Leonardo é dada por [12]:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{n+2}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{n+1}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_n} & SF_{-1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}L_{n+2} & L_{n+1} & L_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{n+2}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{n+1}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_n} & SF_{-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}SL_{n+2} & SL_{n+1} & SL_n\end{bmatrix},\end{aligned}$$

em que $SLF_n = SL_n - SF_n$.

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 2$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_4}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_3} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_2} & SF_{-1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}9 & 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{9}\\ \frac{SLF_{-2}}{5} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{3} & SF_{-1}\end{bmatrix}\\ = \begin{bmatrix}9SF_2 - 3SF_0 + SLF_{-2} & 9SF_0 + 5SF_{-1} + SLF_{-2} & SLF_{-2} + 5SF_0 + 3SF_{-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}SL_4 & SL_3 & SL_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo que vale para qualquer $n = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_k} & SF_{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}SL_{k+2} & SL_{k+1} & SL_k\end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{k+1}\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+2} & L_{k+1} & L_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+3} & L_{k+2} & L_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}}\\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0\\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+3}SF_{-2} - L_{k+1}SF_0 + SLF_{-2} & L_{k+3}SF_0 + L_{k+2}SF_{-1} + SLF_{-2} & L_{k+2}SF_0 + L_{k+1}SF_{-1} + SLF_{-2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}SL_{k+3} & SL_{k+2} & SL_{k+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

3 Os sedenios de Narayana

Nesta seção, são estudados os sedenions de Narayana, abordando os seus respectivos aspectos matemáticos.

Definição 5. *Para $n \geqslant 0$, os sedenios de Narayana são definidos por:*

$$SN_n = \sum_{s=0}^{15} N_{n+s}\mathrm{e}_s,$$

Em consequência da Definição 5 e da fórmula de recorrência unidimensional de Narayana $N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$, tem-se que a fórmula de recorrência dos sedenios de Narayana, é dada por:

$$SN_n = SN_{n-1} + SN_{n-3},$$

onde $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6. *A função geradora dos sedenios de Narayana, SN_n, é dada por:*

$$g(SN_n, x) = \frac{SN_0 + (SN_1 - SN_0)x + (SN_2 - SN_1)x^2}{(1 - x - x^3)}.$$

Demonstração. Com base na função:

$$g(SN_n, x) = SN_0 + SN_1x + SN_2x^2 + \ldots + SN_nx^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por x e x^3, resultando:

$$xg(SN_n, x) = SN_0x + SN_1x^2 + SN_2x^3 + \ldots + SN_{n-1}x^n + \ldots$$
$$x^3g(SN_n, x) = SN_0x^3 + SN_1x^4 + SN_2x^5 + \ldots + SN_{n-3}x^n + \ldots$$

Realizando $g(SN_n, x) - xg(SN_n, x) - x^3g(SN_n, x)$, tem-se que:

$$(1 - x - x^3)g(SN_n, x) = SN_0 + (SN_1 - SN_0)x + (SN_2 - SN_1)x^2$$
$$g(SN_n, x) = \frac{SN_0 + (SN_1 - SN_0)x + (SN_2 - SN_1)x^2}{(1 - x - x^3)}.$$

□

Teorema 7. *A fórmula de Binet dos sedenios de Narayana, com $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:*

$$SN_n = A\alpha_s x_1^n + B\beta_s x_2^n + C\gamma_s x_3^n,$$

em que x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico $x^3 - x^2 - 1 = 0$,

$$A = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$
$$\alpha_s = \sum_{i=0}^{15} x_1^i \mathrm{e}_i, \beta_s = \sum_{i=0}^{15} x_2^i \mathrm{e}_i, \gamma_s = \sum_{i=0}^{15} x_3^i \mathrm{e}_i.$$

Demonstração. Por meio da fórmula de Binet $SN_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n$ e da recorrência dos sedenios de Narayana $SN_n = \sum_{s=0}^{15} N_{n+s}\mathrm{e_s}$, com os valores iniciais $SN_0 = \sum_{i=0}^{15} N_i\mathrm{e_i}$, $SN_1 = \sum_{i=0}^{15} N_{i+1}\mathrm{e_i}$ e $SN_2 = \sum_{i=0}^{15} N_{i+2}\mathrm{e_i}$, é possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = \sum_{i=0}^{15} N_i\mathrm{e_i} \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 & = \sum_{i=0}^{15} N_{i+1}\mathrm{e_i} \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 & = \sum_{i=0}^{15} N_{i+2}\mathrm{e_i} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-x_2 - x_3)\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + x_2x_3\left(\sum_{i=0}^{15} N_i\mathrm{e_i}\right)}{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3},$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-x_1 - x_3)\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + x_1x_3\left(\sum_{i=0}^{15} N_i\mathrm{e_i}\right)}{x_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 + x_1x_3},$$

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+2}\mathrm{e_i}\right) + (-x_1 - x_2)\left(\sum_{i=0}^{15} N_{i+1}\mathrm{e_i}\right) + x_1x_2\left(\sum_{i=0}^{15} N_i\mathrm{e_i}\right)}{x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$, é fácil ver que:

$$\alpha = \frac{(x_2x_2 - x_2 - x_3 + 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \sum_{i=0}^{15} x_1^i\mathrm{e_i} = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \sum_{i=0}^{15} x_1^i\mathrm{e_i} = A \sum_{i=0}^{15} x_1^i\mathrm{e_i},$$

$$\beta = \frac{(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \sum_{i=0}^{15} x_2^i\mathrm{e_i} = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \sum_{i=0}^{15} x_2^i\mathrm{e_i} = B \sum_{i=0}^{15} x_2^i\mathrm{e_i},$$

$$\gamma = \frac{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \sum_{i=0}^{15} x_3^i\mathrm{e_s} = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \sum_{i=0}^{15} x_3^i\mathrm{e_i} = C \sum_{i=0}^{15} x_3^i\mathrm{e_i}.$$

Definindo $\alpha_s = \sum_{i=0}^{15} x_1^i\mathrm{e_i}, \beta_s = \sum_{i=0}^{15} x_2^i\mathrm{e_i}$ e $\gamma_s = \sum_{i=0}^{15} x_3^i\mathrm{e_i}$, é fácil ver que:

$$\alpha = A\alpha_s, \beta = B\beta_s, \gamma = C\gamma_s.$$

□

A forma matricial dos sedenios de Narayana é realizada de acordo com o trabalho [13], em que aborda a matriz geradora da sequência de Narayana, segundo uma generalização dos seus respectivos coeficientes da fórmula de recorrência.

Teorema 8. *Para $n \geqslant 3$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos sedenios de Narayana é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{n+1} & N_n & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-2} & N_{n-3} \\ N_n & N_{n-1} & N_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} SN_{n+1} & SN_n & SN_{n-1} \\ SN_{n-1} & SN_{n-2} & SN_{n-3} \\ SN_n & SN_{n-1} & SN_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2SN_1 + SN_{-1} + SN_0 & 2SN_0 + SN_{-2} + SN_{-1} & 2SN_{-1} + SN_{-3} + SN_{-2} \\ SN_1 + SN_{-1} & SN_0 + SN_{-2} & SN_{-1} + SN_{-3} \\ SN_1 + SN_{-1} + SN_0 & SN_0 + SN_{-2} + SN_{-1} & SN_{-1} + SN_{-3} + SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} SN_4 & SN_3 & SN_2 \\ SN_2 & SN_1 & SN_0 \\ SN_3 & SN_2 & SN_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, assumindo que vale para qualquer $n = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SN_{k+1} & SN_k & SN_{k-1} \\ SN_{k-1} & SN_{k-2} & SN_{k-3} \\ SN_k & SN_{k-1} & SN_{k-2} \end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} N_{k+1} & N_k & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-2} & N_{k-3} \\ N_k & N_{k-1} & N_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} N_{k+2} & N_{k+1} & N_k \\ N_k & N_{k-1} & N_{k-2} \\ N_{k+1} & N_k & N_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} SN_{k+2} & SN_{k+1} & SN_k \\ SN_k & SN_{k-1} & SN_{k-2} \\ SN_{k+1} & SN_k & SN_{k-1} \end{bmatrix}.$$

$\square$

4 A generalização dos sedenios de Leonardo

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos sedenios de Leonardo, tendo como base os resultados apresentados por Mangueira *et al.* [12].

Definição 9. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o sedenios de Leonardo, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação [12]:*

$$SL_{-n} = \sum_{s=0}^{15} L_{-n+s}\mathrm{e}_s.$$

Com base na recorrência $SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3}$, pode-se obter a relação $SL_{-n} = 2SL_{-n+2} - SL_{-n+3}$, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 10. *A função geradora dos sedenios de Leonardo para índice inteiro não positivo, é expressa por [12]:*

$$g(SL_{-n}, x) = \frac{SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2}{x^3 - 2x^2 + 1},$$

com os respectivos valores iniciais: $SL_{-2} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e}_s$, $SL_{-1} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e}_s$ *e* $SL_0 = \sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e}_s$.

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por $2x^2$ e x^3, tem-se que:

$$g(SL_{-n,x}) = \sum_{n=0}^{\infty} SL_{-n}x^n = SL_0 + SL_{-1}x + SL_{-2}x^2 + \ldots + SL_{-n}x^n + \ldots$$

$$2x^2 g(SL_{-n}, x) = 2SL_0x^2 + 2SL_{-1}x^3 + 2SL_{-2}x^4 + \ldots + 2SL_{-n-2}x^n + \ldots$$

$$x^3 g(SL_{-n}, x) = SL_0x^3 + SL_{-1}x^4 + SL_{-2}x^5 + \ldots + SL_{-n-3}x^n + \ldots$$

Assim, ao realizar a operação $x^3 g(SL_{-n}, x) - 2x^2 g(SL_{-n}, x) + g(SL_{-n}, x)$, tem-se que:

$$(x^3 - 2x^2 + 1)g(SL_{-n}, x) = SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2$$

$$g(SL_{-n}, x) = \frac{SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2}{x^3 - 2x^2 + 1}$$

Com os valores iniciais: $SL_{-2} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e}_s$, $SL_{-1} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e}_s$ e $SL_0 = \sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e}_s$. □

Propriedade 11. *Para $n > 0$, a forma matricial dos sedenios de Leonardo, com índice inteiro não negativo, é dada por [12]:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n}} & SF_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n}} & SF_{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} SL_{-n+2} & SL_{-n+1} & SL_{-n} \end{bmatrix},$$

em que $SLF_{-n} = SL_{-n} - SF_{-n}$.

Demonstração. De modo similar à demonstração realizada na Propriedade 4, pode-se validar esta propriedade. □

5 A generalização dos sedenios de Narayana

Nessa seção, realiza-se o estudo em relação aos sedenios de Narayana para os números inteiros não positivos, generalizando assim os sedenios de Narayana.

Definição 12. *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o sedenios de Narayana, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$SN_{-n} = \sum_{s=0}^{15} N_{-n+s}\mathrm{e}_s.$$

Com base na recorrência $SN_n = SN_{n-1} + SN_{n-3}$, pode-se obter a relação $SN_{-n} = SN_{-n+3} - SN_{-n+2}$, para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 13. *A função geradora dos sedenios de Narayana para índice inteiro não positivo, é expressa por:*

$$g(SN_{-n}, x) = \frac{SN_0 + SN_{-1}x - (SN_{-2} - SN_0)x^2}{x^3 - x^2 - 1},$$

com os respectivos valores iniciais: $SN_{-2} = \sum_{s=0}^{15} N_{-2+s}\mathrm{e}_s$, $SN_{-1} = \sum_{s=0}^{15} N_{-2+s}\mathrm{e}_s$ *e* $SN_0 = \sum_{s=0}^{15} N_s\mathrm{e}_s$.

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2 e x^3, tem-se que:

$$\begin{aligned}
g(SN_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} SN_{-n}x^n = SN_0 + SN_{-1}x + SN_{-2}x^2 + \ldots + SN_{-n}x^n + \ldots \\
x^2 g(SN_{-n}, x) &= SN_0 x^2 + SN_{-1}x^3 + SN_{-2}x^4 + \ldots + SN_{-n-2}x^n + \ldots \\
x^3 g(SN_{-n}, x) &= SN_0 x^3 + SN_{-1}x^4 + SN_{-2}x^5 + \ldots + SN_{-n-3}x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Assim, ao realizar a operação $x^3 g(SN_{-n}, x) - (x^2 g(SN_{-n}, x) + g(SN_{-n}, x))$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
(x^3 - x^2 - 1)g(SN_{-n}, x) &= SN_0 + SN_{-1}x - (SN_{-2} - SN_0)x^2 \\
g(SN_{-n}, x) &= \frac{SN_0 + SN_{-1}x - (SN_{-2} - SN_0)x^2}{x^3 - x^2 - 1}
\end{aligned}$$

Com os valores iniciais: $SN_{-2} = \sum_{s=0}^{15} N_{-2+s}\mathrm{e}_s$, $SN_{-1} = \sum_{s=0}^{15} N_{-2+s}\mathrm{e}_s$ e $SN_0 = \sum_{s=0}^{15} N_s\mathrm{e}_s$. □

Propriedade 14. *Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos sedenios de Narayana, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_{-n+1} & N_{-n} & N_{-n-1} \\ N_{-n-1} & N_{-n-2} & N_{-n-3} \\ N_{-n} & N_{-n-1} & N_{-n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SN_1 & SN_0 & SN_{-1} \\ SN_{-1} & SN_{-2} & SN_{-3} \\ SN_0 & SN_{-1} & SN_{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} SN_{-n+1} & SN_{-n} & SN_{-n-1} \\ SN_{-n-1} & SN_{-n-2} & SN_{-n-3} \\ SN_{-n} & SN_{-n-1} & SN_{-n-2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração. De modo similar à demonstração realizada na Propriedade 8, pode-se validar esta propriedade. □

6 Propriedades dos sedenios de Leonardo e Narayana

A seguir, são estudadas algumas propriedades inerentes aos sedenios de Leonardo e Narayana.

Propriedade 15. *A soma dos n primeiros termos sedenios de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SL_m = SL_0 + SL_1 + \ldots + SL_{n-3} + 2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} - SL_{-2} - SL_{-1}.$$

Demonstração. Utilizando a relação $SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
SL_1 &= 2SL_0 - SL_{-2} \\
SL_2 &= 2SL_1 - SL_{-1} \\
SL_3 &= 2SL_2 - SL_0 \\
SL_4 &= 2SL_3 - SL_1 \\
SL_5 &= 2SL_4 - SL_2 \\
&\vdots \\
SL_{n-3} &= 2SL_{n-4} - SL_{n-6} \\
SL_{n-2} &= 2SL_{n-3} - SL_{n-5} \\
SL_{n-1} &= 2SL_{n-2} - SL_{n-4} \\
SL_n &= 2SL_{n-1} - SL_{n-3}.
\end{aligned}$$

Após a realização dos cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} ON_m = SL_0 + SL_1 + \ldots + SL_{n-3} + 2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} - SL_{-2} - SL_{-1}.$$

□

Propriedade 16. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos sedenios de Leonardo, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SL_{-m} = SL_1 + SL_0 + SL_{-1} + \ldots + SL_{-n+3} + 2SL_{-n+2}.$$

Demonstração. Com base na relação de recorrência dos sedenios de Leonardo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
SL_{-1} &= 2SL_1 - SL_2 \\
SL_{-2} &= 2SL_0 - SL_1 \\
SL_{-3} &= 2SL_{-1} - SL_0 \\
SL_{-4} &= 2SL_{-2} - SL_{-1} \\
&\vdots \\
SL_{-n+3} &= 2SL_{-n+5} - SL_{-n+6} \\
SL_{-n+2} &= 2SL_{-n+4} - SL_{-n+5} \\
SL_{-n+1} &= 2SL_{-n+3} - SL_{-n+4} \\
SL_{-n} &= 2SL_{-n+2} - SL_{-n+3}.
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^{n} SL_{-m} = SL_1 + SL_0 + SL_{-1} + \ldots + SL_{-n+3} + 2SL_{-n+2}.$$

$\square$

Propriedade 17. *A soma dos n primeiros termos sedenios de Narayana é dada por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SN_m = SN_{n+3} - SN_3.$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $SN_n = SN_{n-1} + SN_{n-3}$, pode-se obter a relação:

$$SN_{n-3} = SN_n - SN_{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
SN_1 &= SN_4 - SN_3\\
SN_2 &= SN_5 - SN_4\\
SN_3 &= SN_6 - SN_5\\
SN_4 &= SN_7 - SN_6\\
SN_5 &= SN_8 - SN_7\\
&\vdots\\
SN_{n-3} &= SN_n - SN_{n-1}\\
SN_{n-2} &= SN_{n+1} - SN_n\\
SN_{n-1} &= SN_{n+2} - SN_{n+1}\\
SN_n &= SN_{n+3} - SN_{n+2}.
\end{aligned}$$

Após a realização dos cancelamentos sucessivos, tem-se que:

$$\sum_{m=1}^{n} SN_m = SN_{n+3} - SN_3.$$

$\square$

Propriedade 18. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo dos sedenios de Narayana, são expressos por:*

$$\sum_{m=1}^{n} SN_{-m} = -SN_{-n+2} + SN_2.$$

Demonstração. Com base na relação de recorrência dos sedenios de Narayana, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$SN_{-n} = SN_{-n+3} - SN_{-n+2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
SN_{-1} &= SN_2 - SN_1 \\
SN_{-2} &= SN_1 - SN_0 \\
SN_{-3} &= SN_0 - SN_{-1} \\
SN_{-4} &= SN_{-1} - SN_{-2} \\
&\vdots \\
SN_{-n+3} &= SN_{-n+6} - SN_{-n+5} \\
SN_{-n+2} &= SN_{-n+5} - SN_{-n+4} \\
SN_{-n+1} &= SN_{-n+4} - SN_{-n+3} \\
SN_{-n} &= SN_{-n+3} - SN_{-n+2}.
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^{n} SN_{-m} = -SN_{-n+2} + SN_2.$$

□

7 Conclusão

Nesse trabalho foi possível introduzir os sedenios de Leonardo e Narayana, abordando a sua generalização para os números inteiros não positivos. Com isso, realizou-se uma discussão em torno dos aspectos matemáticos referentes à: função geradora, fórmula de Binet, forma matricial e algumas outras propriedades inerentes à esses números.

Para pesquisas futuras, busca-se a aplicação desses números, em suas respectivas sequências de Leonardo e Narayana, bem como a integração com a área da física moderna, permitindo ainda a sua visualização computacional.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap).

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

8 Bibliografia

[1] ALLOUCHE, J.-P; JOHNSON, T. Narayana's cows and delayed morphisms. In: JOURNEES D'INFORMATIQUE MUSICALE, 3., 1996, Île de Tatihou. **Proceedings** [...]. Île de Tatihou: [*S. n.*], 1996. Disponível em https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02986050. Acesso em: 14 set. 2022.

[2] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons fractal from the recurring linear sequence with Google Colab: an example of Brazil X Portugal research. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.

[3] CATARINO, P.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2020.

[4] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-213, 2019.

[5] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S. Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocensia**, v. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

[6] SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Note on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019.

[7] BILGICI, G.; TOKESER, U.; UNAL, Z. Fibonacci and Lucas Sedenions. **Journal of Integer Sequences**, v. 20, n. 1, article 17.1.8, 2017.

[8] IMAEDA, K; IMAEDA, M. Sedenions: algebra and analysis. **Applied Mathematics and Computation**, v. 2-3, p. 77-88, 2000.

[9] HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23-33, 1993.

[10] CAWAGAS, R. E. On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra. **Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications**, v. 24, n. 2, p. 251-265, 2004.

[11] MANGUEIRA, M.; VIEIRA, R.; ALVES, F.; CATARINO, P. A generalização dos duais e sedenios de Leonardo. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 20, p. 13–27, jul. 2021. Edição Iniciação Científica.

[12] VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, v. 42, 2020.

[13] RAMÍREZ, J. L.; SIRVENT, V. F. A note on the k-Narayana sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 45, p. 91-105, 2015.