Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022

Eudes Antonio Costa
Câmpus de Arraias - Matemática
Universidade Federal do Tocantins
eudes@uft.edu.br

Douglas Catulio dos Santos
Câmpus de Barreiras
Instituto Federal da Bahia
douglascatulio@ifba.edu.br

Algumas propriedades da sequência de Pell

Some properties of the Pell sequence

Resumo

Seja n um número inteiro não negativo. Neste trabalho consideramos a usual sequência de Pell, a qual denotamos por $\mathcal{P}_n$ e o elemento de posição $n \geq 0$ desta sequência por P_n. Bicknell (1975) afirma que a sequência de Pell possui propriedades aritméticas semelhantes as propriedades da sequência de Fibonacci ou Lucas (que não serão tratadas aqui), no entanto é pouco conhecida ou difundida, sendo restrita a pesquisadores, estudiosos ou diletantes em Teoria dos Números. Com a curiosidade atiçada pela afirmação de Bicknell, estudamos (revisão bibliográfica) algumas propriedades desta sequência numérica. Por exemplo, Santana e Díaz-Barrero (2006) apresentam um estudo sobre algumas somas parciais de termos P_n, isso nos instigou a fazermos algumas observações e conjecturar alguns resultados, e assim obtemos alguns resultados. Em especial Santana e Díaz-Barrero (2006) mostram que, a soma dos primeiros $4n + 1$ elementos de $\mathcal{P}_n$ é um quadrado perfeito. Nossa principal contribuição é uma caracterização do divisor ímpar de P_n, sendo n ímpar e P_n composto.

Palavras-chave: Divisibilidade. Números de Pell. Somas parciais

Abstract

Let n be a non-negative integer. In this work, we consider the usual Pell sequence, which we denote by $\mathcal{P}_n$ and the positioning element $n \geq 0$ of this sequence by P_n. Bicknell (1975) states that the Pell sequence has arithmetic properties similar to the properties of the Fibonacci or Lucas sequence (which will not be discussed here), however, it is little known or widespread, being restricted to researchers, scholars or, dilettantes in Number Theory. With curiosity piqued by Bicknell's statement, we studied (bibliographic review) some properties of this numerical sequence. For example, Santana and Díaz-Barrero (2006) present a study on some partial sums of the terms P_n, this instigated us to make some observations and conjecture some results, thus we obtain the Proposition (9). In particular, Santana and Díaz-Barrero (2006) show that the sum of the first $4n+1$ elements of $\mathcal{P}_n$ is a perfect square. Our main contribution is a characterization of the odd divisor of P_n, being n odd and P_n composite.

Keywords: Divisibility. Partial sum. Pell Numbers

Artigo recebido em maio 2022 e aceito em nov. 2022

1 Introdução

Seja n um número inteiro não negativo, diremos que n é um número natural, se n é não nulo. Considere a sequência de números inteiros $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n, \ldots$ dada por

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n\ ,\ \text{para } n \geq 1 \text{ natural.} \tag{1}$$

Em geral dizemos que uma sequência é *recorrente*, quando o termo sucessor é determinado em relação (ou associado) à alguns termos antecessores dados, não todos nulos, assim a Equação (1) recebe o nome de equação de *recorrência*, veja Caminha (2019) ou Gusmão (2004).

A Equação (1) determina infinitas sequências numéricas, basta adotarmos valores diferentes para P_1 e P_2. não ambos nulos. Por exemplo

$$\begin{aligned} 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ \cdots \\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ \cdots \\ 1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ \cdots \\ -2,\ 2,\ 2,\ 6,\ 14,\ 34,\ 82,\ \cdots \\ 2021,\ 2022, 6065,\ 14152,\ 34369,\ \cdots \end{aligned}$$

Aqui consideramos a recorrência de Pell usual, isto é, a sequência dada pela recorrência (1), com $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, ou seja,

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 2 \\ P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n,\ n \geq 1\ . \end{cases} \tag{2}$$

O conjunto dos elementos obtidos por (2) formam o conjunto $\mathcal{P}_n = \{1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots\}$ dos números (ou recorrência) de Pell (GÖKBAS; KÖSE, 2017; HORADAM, 1971) e por simplicidade denotamos por $\mathcal{P}_n$. Por conveniência ou quando for necessário consideramos $P_0 = 0$.

Dados os números inteiros a e b dizemos que b é um divisor de a se existir um número c tal que $a = b \cdot c$, e indicamos por $b \mid a$. Neste trabalho abordaremos algumas propriedades aritméticas, enfatizando a relação de divisibilidade entre termos, ou somas parciais de termos, da sequência de Pell $\mathcal{P}_n$. Aqui apresentaremos uma demonstração mais simples e direta do seguinte resultado, diferente e alternativa a demonstração apresentada por Santana e Díaz-Barreiro (2006) .

Proposição 1 *(SANTANA; DÍAZ-BARRERO, 2006) Para quaisquer k, n naturais, temos que:*

(a) $P_{2n+1} \mid \left(\sum_{k=0}^{2n} P_{2k+1} \right)$.

(b) $P_{2n} \mid \left(\sum_{k=1}^{2n} P_{2k-1} \right)$.

Apresentaremos a demonstração da Proposição 1 na Seção 5.1.

Nosso principal resultado é uma caracterização do divisor do termo P_n para n ímpar, precisamente temos

Teorema 2 *Para todo natural $n \geq 3$ ímpar, se P_n for um número composto e d seu divisor, então $d \equiv 1 \mod 4$, ou seja, d é da forma $4k + 1$, para algum k natural.*

Na Seção 3 apresentaremos a demonstração. Como aplicação vejamos um exemplo.

Exemplo 3 *Para* $n = 7$ *temos que* $P_7 = 169 = 13^2$ *é composto e* $13 \equiv 1 \mod 4$; *e para* $n = 17$ *temos* $P_{17} = 1136689 = 137 \times 8297$ *também é composto e* $137 \equiv 8297 \equiv 1 \mod 4$.

Apresentaremos parte do nosso estudo (pesquisa bibliográfica) sobre a sequência de Pell $\mathcal{P}_n$, e alguns resultados (propriedades aritméticas) que obtivemos, aqueles sem indicação de referência.

2 Algumas propriedades

Para que o trabalho fique o mais autocontido possível apresentamos aqui algumas propriedades conhecidas ou clássicas acerca sequência de Pell $\mathcal{P}_n$. Estes resultados, Proposição 4 à Proposição 7, podem ser consultadas em Aydin e Körklu (2017), Dasdemir (2011) e Noronha e Alves (2018).

Proposição 4 *Para quaisquer* $m,\ n$ *naturais, temos* $P_{n+m} \;=\; P_nP_{m+1} + P_{n-1}P_m$.

Demonstração: Fixando n, aplicaremos a indução em m. Para $m = 1$ temos

$$P_{n+1} \;=\; P_nP_{1+1} + P_{n-1}P_1 \;=\; 2P_n + P_{n-1}\ .$$

Este fato garante a validade da sentença para $m = 1$.

Suponha que para algum $m \geq 1$ a sentença $P_{n+m} = P_nP_{m+1} + P_{n-1}P_m$ seja válida. Vamos mostrar a validade para $m + 1$.

$$\begin{aligned} P_{n+(m+1)} &:= 2P_{n+m} + P_{n+(m-1)} \\ &\overset{\text{hip ind}}{=} 2(P_nP_{m+1} + P_{n-1}P_m) + (P_nP_m + P_{n-1}P_{m-1}) \\ &= P_n(2P_{m+1} + P_m) + P_{n-1}(2P_m + P_{m-1}) \\ &= P_nP_{m+2} + P_{n-1}P_{m+1}\ . \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para todo m. ■

Os próximos resultados são consequência da Proposição 4.

Proposição 5

(a) Para todo n natural temos que $P_{2n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2$.

(b) Para todo n natural temos que $P_{2n} = \dfrac{P_{n+1}^2 + P_{n-1}^2}{2}$.

Demonstração:

(a) Como $2n - 1 = n + (n - 1)$, segue da Proposição 4 que

$$\begin{aligned} P_{2n-1} &= P_{n+(n-1)} \\ &= P_nP_n + P_{n-1}P_{n-1} \\ &= p_n^2 + P_{n-1}^2\ . \end{aligned}$$

(b) Veja que da Equação (1) temos $P_n = \dfrac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2}$, e da Proposição 4 que $P_{2n} = P_{n+1}P_n + P_nP_{n-1}$. Disto obtemos

$$\begin{aligned} P_{2n} &= P_{n+1}P_n + P_nP_{n-1} \\ &= \frac{P_{n+1}(P_{n+1} - P_{n-1})}{2} + \frac{P_{n-1}(P_{n+1} - P_{n-1})}{2} \\ &= \frac{P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2}{2} . \end{aligned}$$

■

Proposição 6 *Para todo n natural temos que* $P_{3n} = \dfrac{P_{n+1}^3 + 2P_n^3 - P_{n-1}^2}{2}$.

Demonstração: Basta usar que $3n = n + 2n$, e aplicar a Proposição 4. ■

O próximo resultado é conhecido como identidade de Cassini, a saber temos que

Proposição 7 *Para todo n natural, tem-se* $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$.

Demonstração: Faremos por indução em n. Para $n = 1$ é imediato, pois, $P_2P_0 - P_1^2 = 2 \cdot 0 - 1^2 = -1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a sentença $P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$ seja válida. Devemos mostrar a validade para todo $n + 1$, veja que:

$$\begin{aligned} P_nP_{n+2} - P_{n+1}^2 &= P_nP_{n+2} - P_{n+1}(2P_n + P_{n-1}) \\ &= P_nP_{n+2} - 2P_nP_{n+1} - P_{n-1}P_{n+1} \\ &= P_n(P_{n+2} - 2P_{n+1}) - P_{n-1}P_{n+1} \\ &= P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} \\ &= (-1)(P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2) \\ &= (-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

Isto assegura a validade da sentença para todo n. ■

Corolário 8 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se* $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = (-1)^n$.

Demonstração: Pela Equação (1) Temos que $P_{n-1} = P_{n+1} - 2P_n$, substituindo na Proposição 7, obtemos o resultado. ■

Agora apresentamos alguns resultados que obtivemos, em termos de somas parciais de elementos da sequência de Pell.

Proposição 9 *Dada a sequência de Pell* $\mathcal{P}_n$. *As seguintes identidades são verificadas, para quaisquer* k, n *naturais:*

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{2k-1} = \frac{P_{2n}}{2}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{2k} = \frac{P_{2n+1} - 1}{2}$.

(iii) $\sum_{k=1}^{n} P_k = \dfrac{3P_n + P_{n-1} - 1}{2}$.

(iv) $\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \dfrac{P_n P_{n+1}}{2}$.

Demonstração: Salientamos que em todos os itens, pode aplicar a indução em n, nesse sentido apresentaremos apenas o primeiro caso e deixamos os demais ao leitor, assim:

(i) para $n = 1$ é fácil perceber que $P_1 = \dfrac{P_2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Isso garante a validade da sentença para $n = 1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a sentença $\sum_{k=1}^{n} P_{2k-1} = \dfrac{P_{2n}}{2}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} P_{2k-1} &:= \sum_{k=1}^{n} P_{2k-1} + P_{2n+1} \\ &= \frac{P_{2n}}{2} + P_{2n+1} \\ &= \frac{2P_{2n+1} + P_{2n}}{2} \\ &= \frac{P_{2(n+1)}}{2} \, . \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para todo n. ■

3 Demonstração do Teorema 2

Ao observarmos ou estudarmos os divisores de um número de Pell, obtivemos uma caracterização acerca dos divisores ímpares de P_n, sendo P_n um elemento composto e n é ímpar. E para isso usaremos o seguinte resultado auxiliar, cuja demonstração pode ser consultada em Hefez (2016).

Lema 10 *Seja n um número natural, com n* ≥ 2. *Todo divisor ímpar (positivo) de* $n^2 + 1$ *é da forma* $4k + 1$*, para algum k natural.*

Agora vamos a *Demonstração:* do Teorema 2

Se n é ímpar, segue da Proposição 7 que $P_n^2 = P_{n+1}P_{n-1} + 1$, assim $P_n^2 = (2P_n + P_{n-1})P_{n-1} + 1$ e por fim $P_n^2 - 2P_nP_{n-1} = P_{n-1}^2 + 1$. Logo, todo divisor de P_n (composto e ímpar) é divisor de $P_{n-1}^2 + 1$, consequentemente, pelo Lema 10, todo divisor ímpar de P_n é da forma $4k + 1$, e obtemos o resultado. ■

4 Recorrência linear e a fórmula de Binet

Nesta seção apresentamos uma expressão que fornece os números de Pell em $\mathcal{P}_n$, em função exclusivamente de n e não mais recursivamente pelos elementos anteriores. Para isso determinaremos as sequências que são soluções da recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, e dentre estas soluções quais satisfazem o caso em que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. De acordo com Gusmão (2003) uma equação na qual a incógnita é uma sequência (a_n) que relaciona k termos, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, $\cdots$, a_{n+k-1} é chamada de equação de diferenças. De modo geral uma equação de diferenças linear possui a forma

$$f_k(n)x_{n-k} + f_{k-1}(n)x_{n-k+1} + f_{k-2}(n)x_{n-k+2} + \cdots + f_o(n)x_n = 0 ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e f_0, f_1, $\ldots$, f_k são funções cujo o domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$ (naturais), dizemos que uma equação de diferenças possui ordem k quando $(f_i)_{i=0,1,\ldots,k}$ não são funções nulas. Em particular a Equação (2) é uma equação de diferenças linear de ordem 2. Sendo assim, para determinarmos uma solução para a equação de diferenças apresentaremos seguintes resultados auxiliares (Lemas), cujas demonstrações podem ser consultadas em Gusmão (2004), Hefez (2016), Noronha e Alves (2018), Morgado e Carvalho (2014).

Lema 11 *A equação de diferença linear dada por*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

com $x_1 = a_1$ e $x_2 = a_2$, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, possui uma única solução.

Lema 12 *Se a equação $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes r_1 e r_2 distintas, as sequências $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, em que $n \in \mathbb{N}$, e c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, são soluções de*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}, n \geq 1 .$$

Veja que a equação de diferença associada a Sequência de *Pell* $\mathcal{P}_n$ é

$$P_{n+2} - 2P_{n+1} - P_n = 0 , \tag{3}$$

que possui como equação característica $r^2 - 2r - 1 = 0$ e suas raízes reais são $r = 1 \pm \sqrt{2}$. Pelo Lema 12, temos que uma solução geral para Equação (3) é da forma

$$P_n = c_1(1 + \sqrt{2})^n + c_2(1 - \sqrt{2})^n .$$

Vamos determinar c_1 e c_2, considerando que $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, e obtemos o sistema,

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1(1 + \sqrt{2}) + c_2(1 - \sqrt{2}) . \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $c_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ e $c_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Assim acabamos de mostrar que

Proposição 13 *(SANTANA; DÍAZ-BARRERO, 2006) Para todo n natural temos*

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

.

A expressão acima é conhecida como fórmula de Binet do número de Pell. Combinando com Proposição 9 apresentamos uma demonstração alternativa do seguinte resultado.

Proposição 14 *(SANTANA; DÍAZ-BARRERO, 2006) Seja* $(P_k)_{k\geq 1}$ *um termo da Sequência de Pell. Então:*

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} - 2}{4} \, .$$

Demonstração: Da Proposição 9, item *(iii)*, temos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{3P_n + P_{n-1} - 1}{2}$, agora da Proposição 13 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{3P_n + P_{n-1} - 1}{2} &= \frac{3(1+\sqrt{2})^n - 3(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1} - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}(6+4\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})^{n-1}(4\sqrt{2}-6) - 4}{8} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^{n-1}(1-\sqrt{2})^2 - 2}{4} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} - 2}{4} \, ,
\end{aligned}$$

disto obtemos o resultado. ■

Uma consequência direta da Proposição 14 é o

Corolário 15 *(SANTANA; DÍAZ-BARRERO, 2006) Para todo* $k \geq 0$ *temos que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{4k+1} P_k = a^2$, *sendo* a *natural.*

Demonstração: Basta considerar $n = 4k + 1$ e aplicar a Proposição 14. ■

5 Divisibilidade na sequência de Pell

Motivados pelos trabalhos Costa e Carvalho (2015) e Costa e Santos (2020) fizemos um estudo, e apresentamos nesta seção, acerca de propriedades relacionadas a divisibilidade ou multiplicidade entre dois termos da sequência de Pell $\mathcal{P}_n$, a exemplo do trabalho de Gusmão (2004) que apresenta algumas destas propriedades sobre a sequência de Fibonacci. Assim apresentaremos parte do nosso estudo, e resultados que obtivemos, enfaticamente as demonstrações. Ressaltamos que estes resultados são aqueles sem indicação de referência, e registramos que não os encontramos nas referências que dispomos ou consultamos. Por fim, tais resultados conceberam o nosso arcabouço para demonstrarmos a Proposição 1, objetivo final desta seção.

Lembramos que dados dois inteiros a e b, o maior divisor comum (mdc) entre a e b é indicado por (a, b). Primeiramente, o clássico resultado conhecido como *algoritmo do maior divisor comum* entre dois números inteiros, um resultado auxiliar cuja demonstração também pode ser consultada em Hefez (2016).

Lema 16 *Dados os inteiros* a, b, *com* $b = aq + r$ *para* q *e* $0 \leq r < |b|$ *inteiros. O maior divisor comum entre* a *e* b *é dado por*

$$mdc(a, b) = mdc(a, r) \, .$$

Como aplicação do Lema 16, temos que

Proposição 17 *Dois termos consecutivos da sequência de Pell são coprimos, ou seja,* $(P_{n+1}, P_n) = 1$.

Demonstração: Basta observar que $(P_2, P_1) = 1$ e pelo algoritmo de Euclides, obtemos que

$$(P_{n+1}, P_n) = (P_n, P_{n-1}) \ ,$$

assim recursivamente obtemos o resultado. ∎

Em Horadam (1971) mostra que para todo n, tem-se $P_n \mid P_{2n}$. Na verdade este fato pode ser generalizado no resultado seguinte.

Proposição 18 *Para quaisquer naturais m, n, se n é múltiplo m então P_n é múltiplo de P_m, em que P_m e P_m são elementos da Sequência de Pell $\mathcal{P}_n$.*

Demonstração: Como temos que $n = mk$, usaremos a indução em k. Veja que para $k = 1$, temos fácil que $P_m \mid P_n$.

Suponha que para algum $n = mk$ com $k \geq 1$ que a sentença $P_m \mid P_n$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$. Segue da Proposição 4 que $P_{mk+m} = P_{mk}P_{m+1} + P_{mk-1}P_m$, como $P_m \mid P_m$ e por hipótese de indução $P_m \mid P_{mk}$, portanto, este fato mostra validade da sentença para $n + 1$. ∎

Corolário 19 *Para todo $n \geq 2$ natural, tem-se P_{kn} é composto, múltiplo de P_k, para todo k.*

A Proposição 21, adiante, seguirá diretamente do próximo resultado auxiliar, cuja demonstração também pode ser consultada em Hefez (2016).

Lema 20 *Seja $(a_n)_n = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ uma sequência tal que $a_0 = 0$ e para todo $m \geq n$, $(a_m, a_n) = (a_n, a_r)$, sendo r o resto da divisão euclidiana de m por n, então tem-se que*

$$(a_m, a_n) = a_{(m,n)} \ .$$

A recíproca da Proposição 18 também é verdadeira, mas antes precisamos de um resultado. Este apresenta uma forma de obter o mdc entre quaisquer dois termos da sequência, vejamos:

Proposição 21 *Sejam P_m e P_n elementos da Sequência de Pell $\mathcal{P}_n$, então:*

$$(P_m, P_n) = P_{(m,n)} \ .$$

Demonstração: Suponha que $m \geq n$, assim decorre do algoritmo de Euclides que $m = nk + r$, com $0 \leq r < n$. Desse modo segue da Proposição 4 que

$$P_m = P_{nk+r} = P_{nk}P_{r+1} + P_{nk-1}P_r \ .$$

Pela Proposição 18 obtemos que $P_n \mid P_{nk}$, disto segue que $(P_m, P_n) = (P_{nk-1}P_r, P_n)$. Pela Proposição 17 temos que $(P_{nk-1}, P_{nk}) = 1$, consequentemente $(P_{nk-1}, P_n) = 1$, daí temos que

$$(P_m, P_n) = (P_n, P_r) \ .$$

Agora, segue do Lema 20 que

$$(P_m, P_n) = P_{(n,m)} \ .$$

∎

É interessante observar que alguns números primos fazem parte da sequência de Pell, como por exemplo $P_2 = 2$ e $P_3 = 5$, denotaremos tais elementos como números primos de Pell, de modo geral segue da Proposição 21 que:

Corolário 22 *Se P_n é primo , então n é primo.*

No entanto não vale a recíproca do Corolário 22, uma vez que $n = 7$ e $n = 17$ são primos, e $P_7 = 169$ e $P_{17} = 1136689$ são compostos, veja Exemplo (3). Sabemos que para os valores $n = 2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53$ e 59 tem-se que P_n é primo. Lembramos que a questão sobre a infinitude dos primos de Pell é um problema em aberto. Como alertado por Ribenboim[16] existe uma dificuldade computacional para a verificação da primalidade dos números, de Pell ou não, com milhares de dígitos.

Agora estamos em condições de apresentar a recíproca da Proposição 18, qual seja

Proposição 23 *Dados P_m e P_n termos da sequência de Pell $\mathcal{P}_n$, com $m \geq n$, se P_n divide P_m então n divide m.*

Demonstração: Com $P_n \mid P_m$, temos $(P_m, P_n) = P_n$, assim pela Proposição 21 temos que $(P_m, P_n) = P_{(m,n)}$, disto obtemos que $n = (m, n)$, ou seja, $n \mid m$. ∎

Para finalizar esta seção apresentamos uma prova alternativa da Proposição 1.

5.1 Demonstração da Proposição 1

(a) Segue da Proposição 9, item *(i)*, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{2k+1} = \frac{P_{2(n+1)}}{2}$, assim $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P_{2k+1} = \frac{P_{4n+2}}{2}$. Fazendo $4n + 2 = 2(2n + 1)$, da Proposição 18 temos que $P_{2n+1} \mid P_{2(2n+1)} = P_{4n+2}$. Agora segue da Proposição 21 que $(P_{2n+1}, P_2) = (P_{2n+1}, 2) = 1$, e obtemos o resultado.

(b) Novamente da Proposição 9, item *(i)*, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} P_{2k-1} = \frac{P_{4n}}{2}$. Segue da Proposição 13 que:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{4n}}{2} &= \frac{(1+\sqrt{2})^{4n} - (1-\sqrt{2})^{4n}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \\
&= \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}}\right] \times \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right] \\
&= P_{2n} \times \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right].
\end{aligned}$$

Disto obtemos o resultado.

6 Forma matricial da sequência de Pell

No interesse de despertar outros estudos, apresentamos outra forma de representar e obter os elementos da sequência de Pell (2), a forma matricial

$$P = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

para $n \geq 1$ e com $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$. Fazendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja que na posição a_{11} da matriz P^2 aparece o próximo termo da recorrência. E mais, as potências da matriz P, na posição a_{11}, determinam os próximos termos da sequência $\mathcal{P}_n$. Isto é dado pelo seguinte resultado, que pode ser consultado em Noronha e Alves (2018).

Proposição 24 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$P^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Aplicaremos a indução em n. Para $n = 1$ temos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix}.$$

Este fato atesta a validade da sentença para $n = 1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a sentença $P^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para todo $n + 1$. Vejamos

$$\begin{aligned} P^{n+1} &:= P^n \times P \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2P_{n+1} + P_n & P_{n+1} \\ 2P_n + P_{n-1} & P_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para todo n. ∎

7 Considerações finais

De acordo com Malcolm (2000), John Pell (1611 - 1685) foi um matemático inglês que tem seu nome associado aos estudos de equações da forma $x^2 - ny^2 = 1$, equações de Pell, em que x e y são inteiros e n é um número inteiro não quadrado. A associação do sobrenome Pell a uma sequência numérica é um processo interessante, visto que os termos pertencentes a sequência de Pell já faziam parte de um problema clássico grego conhecido como a *escada de Theon* que consiste em um algoritmo para determinar uma boa aproximação para raiz quadrada de um número inteiro, veja Campos (2014). Contudo, de acordo com Boyer (2009), coube a Euler a associação definitiva de Pell ao conjunto numérico de termos P_n ao atribuir a ele o estudo da solução da equação diofantina $x^2 - 2y^2 = (\pm 1)$, tal equação possui como solução o par de números inteiros (P_n, Q_n), para $n \geq 1$, que são elementos da *escada de Theon* para a aproximações da $\sqrt{2}$, como pode ser visto em Roque e Carvalho (2012) no Problema 3.18. Neste trabalho apresentamos algumas propriedades associadas à sequência de Pell $\mathcal{P}_n$, e por este esperamos despertar outros estudos. Em nossos estudos , aqui apresentado, procuramos novos resultados relacionados a divisibilidade dos números de Pell.

Referências

[1] AYDIN, T. F.; KÖKLÜ, K. On generalizations of the Pell sequence. **arXiv:1711.06260, [math.CO]**, 2017. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1711.06260.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[2] BICKNELL, M. A primer on the Pell sequence and related sequences. **The Fibonacci Quarterly**, v. 13, n. 4, p. 345-349, 1975. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/13-4/bicknell.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[3] BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Blucher, 2009.

[4] CAMINHA, A. Resolvendo recorrências. **Revista Matemática Universitária**, v. 1, p. 23-31, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.21711/26755254/rmu202014. Acesso em: 27 ago. 2022.

[5] CAMPOS, D. A. **Algoritmos de aproximação de raízes quadradas**. 2014. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014. Disponível em: `https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat\_tcc.php?id1=1267&id2=349`. Acesso em: 27 ago. 2022.

[6] COSTA, E. A.; CARVALHO, F. S. Escrever o número $111\ldots111$ como produto de dois números, **Revista do Professor de Matemática**, v. 87, p.15-19, 2015. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/87/36.html. Acesso em: 27 ago. 2022.

[7] COSTA, E. A.; SANTOS, D. C. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Revista do Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836. Acesso em: 27 ago. 2022.

[8] DASDEMIR, A. On the Pell, Pell-Lucas and modified Pell numbers by matrix method. **Applied Mathematical Sciences**, v. 5, n. 64, p. 3173-3181, 2011. Disponível em: https://users.dimi.uniud.it/~giacomo.dellariccia/Table%20of%20contents/Dasdemir2011.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[9] GÖKBAS, H.; KÖSE, H. Some sum formulas for products of Pell and Pell-Lucas numbers. **International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 4, n. 4, p. 1-4, 2017. Disponível em: http://www.ijaamm.com/uploads/2/1/4/8/21481830/v4n4p1_1-4.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[10] GUSMÃO, G. A. P. A sequência de Fibonacci. **Revista da Olimpíada**, n. 4, p. 55-71, 2003. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Fibonacci.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[11] HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT; 8).

[12] HORADAM, A. F. Pell identities. **Fibonacci Quartertly**, v. 9, n. 3, p. 245-252, 1971. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/9-3/horadam-a.pdf. Acesso em: 27 ago. 2022.

[13] MALCOLM, N. The publications of John Pell, F. R.S (1611 – 1685): some new light and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 54, n. 3, p. 275-292, 2000. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsnr.2000.0113. Acesso em: 27 ago. 2022.

[14] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT; 12).

[15] NORONHA, W. F. R.; ALVES, F. R. V. Sequências de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. **C.Q.D.– Revista eletrônica Paulista de Matemática**, v. 13, p. 1-30, dez. 2018. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/. Acesso em: 27 ago. 2022.

[16] RIBENBOIM, P. **Números primos**: velhos mistérios e novos recordes. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[17] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.(Coleção PROFMAT; 3).

[18] SANTANA, S. F.; DÍAZ-BARRERO, J. L. Some properties of sums involving Pell numbers. **Missouri Journal of Mathematical Sciences**, v. 18, n. 1, p. 33-40, 2006. Disponível em: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.mjms/1564797636. Acesso em: 27 ago. 2022.