

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022

Gustavo Franco de Souza
Campus Cedeteg
UNICENTRO
gustavofrancodesouza95@gmail.com

Pedro Roberto de Lima
Campus Seropédica
UFRRJ
pedrorobertodelima@ufrrj.br

Análise do modelo SIR na pandemia de covid-19 em Guarapuava-PR por meio do GeoGebra

Analysis of the SIR model in the covid-19 pandemic in Guarapuava-PR by means of GeoGebra

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise quantitativa de dados coletados na cidade de Guarapuava-PR durante parte da pandemia de covid-19. Efetuou-se a coleta de dados utilizando-se as informações fornecidas pela prefeitura do município e aplicando-os no modelo epidemiológico compartimental SIR, assim como em sua variação com vacinação. As partes numérica e gráfica foram implementadas por meio do software livre GeoGebra e as planilhas dinâmicas construídas foram disponibilizadas no apêndice, possibilitando seu uso em situações congêneres. Os cálculos realizados possibilitaram estimar tanto o impacto das medidas de contenção tomadas no âmbito do município quanto o número efetivo de reprodução, o qual é importante por refletir a capacidade de contágio da doença ao longo do tempo.

Palavras-chave: Modelo SIR. Número efetivo de reprodução. GeoGebra. Covid-19. Guarapuava-PR.

Abstract

This work presents a quantitative analysis of data collected in the city of Guarapuava-PR during part of the covid-19 pandemic. Data collection was carried out using information provided by the municipal government and applying them in the SIR compartmental epidemiological model, as well as in its variation with vaccination. The numerical and graphic parts were implemented using the free software GeoGebra and the dynamic spreadsheets built were made available in the appendix, allowing their use in similar situations. The performed calculations made it possible to estimate both the impact of containment measures taken within the municipality and the effective number of reproduction, which is important because it reflects the contagion capacity of the disease over time.

Keywords: SIR model. Effective reproduction number. GeoGebra. Covid-19. Guarapuava-PR.





1 Introdução

A sociedade mundial tem passado por um momento incomum, problemático e preocupante da história. A pandemia de covid-19 espalhou-se de forma rápida e avassaladora, ultrapassando, em abril de 2022, a marca de 6 milhões de óbitos por todo o mundo, sendo que destes mais de 660 mil eram cidadãos brasileiros. Além disso, no mesmo período, tinha-se mais de 500 milhões de casos confirmados ao redor do mundo, dos quais ainda pouco se sabia sobre possíveis sequelas deixadas pelo vírus (WHO, 2022).

O início desta situação deu-se em Wuhan na China, que teve seu primeiro caso registrado no dia 11 de dezembro de 2019 (UOL, 2021). Segundo a Organização Pan-Americana da Saúde e a Organização Mundial da Saúde (OPAS/OMS), a covid-19 é uma doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2 e propaga-se a partir da boca ou do nariz de uma pessoa infectada através de pequenas partículas líquidas emitidas quando a pessoa tosse, espirra, fala, canta ou respira. Em 30 de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto de covid-19 constituía uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional – o mais alto nível de alerta da Organização. Naquele momento, estavam confirmados casos em 19 países, com transmissão entre humanos na China, Japão, Alemanha, Vietnã e Estados Unidos da América.

No Brasil, bastaram dois meses para que o vírus se fizesse presente. No dia 26 de fevereiro de 2020, São Paulo registrou o primeiro caso de infecção pelo vírus em questão: um homem de 61 anos que havia realizado viagem para a Itália no começo do mesmo mês (G1 SP, 2020). Em Guarapuava, cidade localizada na região centro-sul do estado do Paraná e ponto de partida para o presente estudo, a confirmação do primeiro caso veio um mês após o primeiro caso brasileiro, no dia 26 de março de 2020 (PMG, 2020).

Diante deste cenário, diversos estudos matemáticos começaram a ser realizados ao redor do mundo com o intuito de analisar a situação e prever possíveis impactos da pandemia. Porém, o uso da matemática neste contexto é relativamente antigo: um dos primeiros estudos matemáticos de que se tem conhecimento acerca da disseminação de doenças foi realizado pelo matemático suíço Daniel Bernoulli (BERNOULLI, 1760; BERNOULLI; BLOWER, 2004). Submetido à Academia de Ciências de Paris em 1760 e publicado em 1766, este estudo tinha como objetivo analisar se a vacinação contra a varíola deveria ser encorajada mesmo podendo causar a morte (BACAËR, 2011) e resultou no que hoje é considerado o primeiro modelo epidemiológico (MARTCHEVA, 2015).

De modo geral, um modelo epidemiológico busca compreender mecanismos que influenciam na propagação de doenças e sugerir estratégias de controle (BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ, 2012). As motivações de estudos deste gênero decorrem do fato que doenças infecciosas afetam as mais diversas populações do planeta há muito tempo. No decorrer do século seguinte ao de Bernoulli, outros estudos envolvendo transmissibilidade de doenças continuaram sendo publicados, mas foi em 1927 o surgimento de um dos modelos de maior relevância e influência: o modelo SIR, que surge como caso especial de um modelo mais geral proposto por Kermack e McKendrick (1927), o qual colocou a epidemiologia matemática em um novo nível (BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ, 2012; MARTCHEVA, 2015).

Um bom modelo matemático é aquele que é suficientemente simples para permitir uma análise com as ferramentas matemáticas e computacionais disponíveis e, ao mesmo tempo, complexo o bastante para gerar conclusões não triviais que auxiliem na compreensão do fenômeno em estudo (NACHBIN; TABAK, 1997; SEGEL; EDELSTEIN-KESHET, 2013; VELTEN, 2009). É por esta razão que o modelo SIR ficou famoso: apesar de sua simplicidade, ele é capaz de prever características importantes de uma epidemia, sendo uma das principais a existência do limiar epidêmico

(ARENAS *et al.*, 2020; MATA; DOURADO, 2021).

Detalhes sobre o modelo SIR, incluindo o resultado que garante a existência do referido limiar, serão apresentados na Seção 2. O objetivo do presente trabalho é utilizá-lo pra estudar a evolução da pandemia de covid-19 no município de Guarapuava-PR, buscando determinar estimativas que possam contribuir para a compreensão do impacto das medidas de contenção tomadas no âmbito do município. Na Seção 3 apresenta-se os materiais e métodos. Os resultados e discussões são apresentados na Seção 4.

2 O modelo SIR

A principal ferramenta matemática utilizada no desenvolvimento deste trabalho é o bem conhecido modelo SIR, proposto por Kermack e Mckendrick (1927) para o estudo de epidemias considerando uma população com N indivíduos compartimentada em três classes disjuntas: suscetíveis (aptos a contrair o vírus), infectados (transmissores do vírus) e recuperados (contraíram o vírus, mas já cessaram de transmiti-lo). Para conveniência do leitor, esta seção faz uma breve apresentação deste modelo conforme Smith e Moore (2001), Brauer e Castillo-Chavez (2012) e Weiss (2013).

2.1 Dedução do modelo

O modelo SIR é deduzido sob as seguintes hipóteses:

- A única forma de deixar de ser suscetível é tornando-se infectado; a única forma de deixar de ser infectado é tornando-se recuperado; nenhum recuperado volta a torna-se suscetível.
- As três classes estão homogeneamente distribuídas entre a população, a qual permanece constante.
- Cada infectado faz β contatos infecciosos por dia e demora k dias para recuperar-se.
- O período de latência é nulo (ou seja, o contágio inicia-se junto com a exposição ao vírus).

Sendo $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ o número de suscetíveis, infectados e recuperados no dia t , respectivamente, conclui-se que no dia t :

- Cada infectado contamina $\beta \frac{S(t)}{N}$ indivíduos e, portanto, o número de novos infectados é $\beta \frac{S(t)}{N} \times I(t) = \frac{\beta}{N} S(t) I(t)$. Assim:

$$S'(t) = -\frac{\beta}{N} S(t) I(t). \quad (1)$$

- O número médio de infectados que se recupera é $\frac{1}{k} I(t)$. Assim, supomos que

$$R'(t) = \frac{1}{k} I(t). \quad (2)$$

- $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Assim:

$$I'(t) = (N - S(t) - R(t))' = \frac{\beta}{N} S(t) I(t) - \frac{1}{k} I(t). \quad (3)$$

O “modelo SIR” é constituído pelas equações (1)-(3). Escrevendo $b = \frac{\beta}{N}$ e $\gamma = \frac{1}{k}$, ele toma a forma

$$\begin{cases} S' = -bSI \\ I' = bSI - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases} \quad (4)$$

e deve ser complementado com condições iniciais

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0.$$

Observação 1 *Dividindo as equações (1)-(3) por N e escrevendo*

$$s = \frac{S}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad r = \frac{R}{N},$$

obtém-se o modelo SIR em sua forma “normalizada” dada por

$$\begin{cases} s' = -\beta si \\ i' = \beta si - \gamma i \\ r' = \gamma i \end{cases} \quad (5)$$

com condições iniciais

$$s(0) = s_0, \quad i(0) = i_0, \quad r(0) = r_0,$$

onde as variáveis s , i e r expressam proporções em vez de números absolutos. A forma normalizada é particularmente conveniente para a implementação computacional no GeoGebra, pois evita o uso de valores muito altos.

2.2 Determinação do parâmetro β

No início do surto quase todos os indivíduos da população são suscetíveis. Assim, tomando $S = N$ na equação (3), obtém-se a equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$I' = (\beta - \gamma)I$$

cujas soluções são dadas pela função exponencial

$$I(t) = I_0 e^{Bt},$$

onde $B = \beta - \gamma$. Isto significa que, no início do surto, o crescimento de infectados é aproximadamente exponencial, de modo que B pode ser determinado a partir dos dados por regressão exponencial. Consequentemente, sendo γ conhecido e estando B determinado, obtém-se $\beta = B + \gamma$.

2.3 O número efetivo de reprodução

O “número efetivo de reprodução” num dia t – que aqui será representado por $\mathcal{R}_e(t)$ – fornece o número de novas infecções causadas por cada indivíduo infectado no dia t . No contexto do modelo SIR, ele é dado por

$$\mathcal{R}_e(t) = \beta \frac{S(t)}{N} \times k$$

e sua importância manifesta-se no resultado seguinte.

Teorema 1 (Teorema do Limiar Epidêmico) *Sob as hipóteses do modelo SIR:*

1. Se $\mathcal{R}_e(0) \leq 1$, o número de infectados $I(t)$ decresce para 0 quando $t \rightarrow \infty$.
2. Se $\mathcal{R}_e(0) > 1$, o número de infectados $I(t)$ cresce até atingir um valor máximo

$$I_{\max} = \frac{\gamma}{b} \left[\ln \left(\frac{\gamma}{b} \right) - \ln(S_0) - 1 \right] + S_0 + I_0$$

e, a partir disso, decresce para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Ver Weiss (2013, p. 4-5, 8).

Resulta do Teorema 1 que se $\mathcal{R}_e(t) \leq 1$, então, a partir do dia t , o contágio começa a diminuir e a epidemia caminha para seu término – daí a importância de acompanhar os valores de $\mathcal{R}_e(t)$ para estimar a eficácia de medidas sanitárias tomadas: o objetivo é torná-lo menor do que 1 e tão próximo de 0 quanto possível. Para isso, as possibilidades são:

- Diminuir β (quantidade de contatos infecciosos diários), por exemplo, por meio de isolamento social, uso de máscara e higiene (como lavagem de mãos e uso de álcool).
- Diminuir $S(t)$ (quantidade de indivíduos suscetíveis), por exemplo, por meio de vacinação.
- Diminuir k (período de transmissibilidade), por exemplo, por meio do uso de medicamentos.

Esta análise fundamenta matematicamente as estratégias teóricas básicas das intervenções de saúde pública.

3 Material e métodos

Foi feita a coleta e tabulação dos dados de casos e óbitos referentes à pandemia divulgados pela prefeitura municipal de Guarapuava, no intervalo de tempo entre 01 de outubro de 2020 e 31 de julho de 2021. Ademais, foi realizada a coleta e análise de decretos municipais que vigoraram durante o período estudado. A partir disso, os dados foram ajustados com os modelos epidemiológicos compartimentais clássicos, gerando gráficos que apontam a evolução no número de casos, assim como possíveis novas ondas e picos. Dados referentes ao começo da vacinação no início do ano de 2021 também foram coletados, a fim de estimar os impactos de tais medidas de contenção na disseminação do vírus em Guarapuava. Por fim, cálculos para o número efetivo de reprodução também foram realizados, a fim de analisar a capacidade de contágio do vírus no decorrer do tempo.

Os dados sobre números de casos e vacinas foram extraídos das contas no *Instagram* @guarapuava_pref e @guarapuava_covid (PG, 2022a; 2022b) e encontram-se disponíveis no Apêndice. Os dados sobre decretos municipais foram extraídos do site oficial da prefeitura (PMG, 2021). Todas as estimativas numéricas e apresentações gráficas foram realizadas por meio do software livre GeoGebra. Modelos das planilhas dinâmicas utilizadas, que podem ser aplicadas em situações congêneres mediante simples adaptações, também se encontram disponíveis no Apêndice.

4 Resultados e discussões

4.1 Análise exploratória

Na presente seção, apresenta-se a média \bar{x} , o desvio padrão σ , a mediana M , o mínimo e o máximo de casos ativos.

Na Figura 1 está a apresentação dos dados do gráfico geral, partindo do dia 01 de outubro de 2020 ao dia 31 de julho de 2021, destacando-se os decretos mais relevantes durante o intervalo de tempo citado.

Os segmentos de reta mostram o início de decretos municipais com medidas de distanciamento social e/ou fechamento do comércio. Os segmentos em vermelho denotam medidas que de alguma forma intensificaram o sistema vigente. Observa-se no gráfico que, em momentos de crescimento de casos, decretos mais rigorosos foram postos em prática, como em 26/11/20 (dia 57). De maneira análoga, após uma sequência de decréscimo de casos ativos, decretos mais brandos foram sancionados, como pode ser visto na data 07/01/21 (dia 99). A última grande queda observada deve-se, provavelmente, ao decreto em 19/05/21 (dia 231), assim como ao reflexo da campanha de vacinação exercida pela prefeitura neste período. A partir de 13/06/21 (dia 256), o sistema de bandeiramento foi instaurado, determinando o comportamento da cidade em relação à pandemia. Iniciado na bandeira laranja, após uma queda brusca no número de casos, foi alterado para a bandeira amarela em 03/07/21 (dia 276), permanecendo assim até o fim do intervalo estudado.

Nota-se que existem dois momentos de crescimento acentuado aparentemente exponencial: um no início, começando em 01/10/20 (dia 1) e outro mais a frente, começando logo após as festividades de fim de ano, por volta de 03/01/21 (dia 195). Mais adiante, esses dois momentos serão chamados, respectivamente, de “primeira onda” e “segunda onda”.

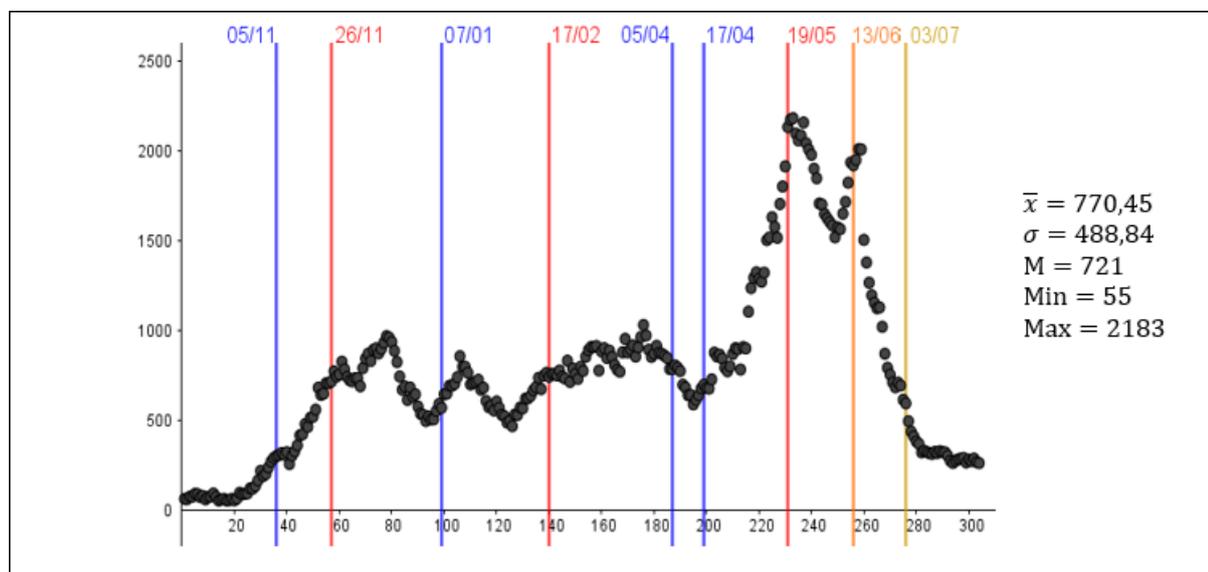


Figura 1: Evolução do número de casos de covid-19 no município de Guarapuava durante o período de estudo com destaque para datas de início de decretos municipais.

A partir dos dados mostrados na Figura 2, observa-se que o mês com menor média de casos ativos foi outubro de 2020, assim como a maior média mensal foi encontrada em maio de 2021. O

menor e o maior número diário de casos ativos ocorreram em outubro de 2020 (14/10) e maio de 2021 (21/05), respectivamente.

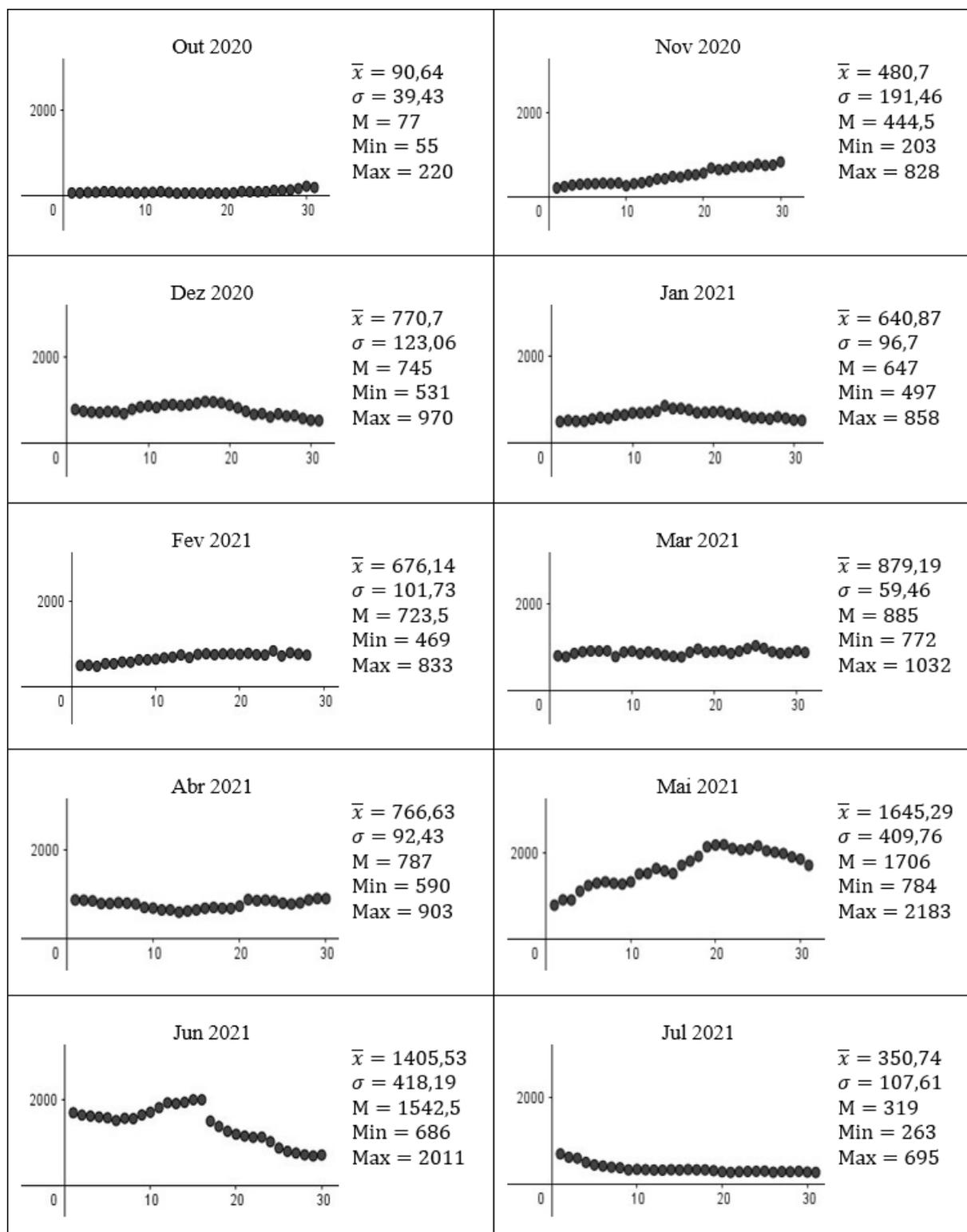


Figura 2: Evolução do número de casos de covid-19 no município de Guarapuava conforme o mês.

4.2 Estimativas com o modelo SIR

Para o presente estudo, considerou-se $N = 182.644$ e utilizou-se o modelo (5) com $\gamma = \frac{1}{12} \approx 0,083$, $\beta \approx 0,126$ e condições iniciais

$$s(0) = \frac{181.838}{N} \approx 0,995, \quad i(0) = \frac{65}{N} \approx 0,0003, \quad r(0) = \frac{741}{N} \approx 0,004.$$

As condições iniciais foram definidas a partir dos dados e do referido valor de N , o qual foi tomado conforme o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2017). O valor de $\gamma = \frac{1}{k}$ foi definido utilizando o período de transmissibilidade de $k = 12$ dias conforme a Secretaria de Estado da Saúde do Paraná (SESA/PR, 2021). O parâmetro $\beta = B + \gamma$, por sua vez, foi obtido conforme exposto na Seção 2.2, onde o cálculo de B foi executado no software livre GeoGebra por meio do comando *RegressãoExponencial*(<Lista de Pontos>) usando como base os primeiros 78 dias. Uma vez definidos os parâmetros, o modelo também foi rodado no GeoGebra por meio do comando *ResolverEDONumericamente*(<Lista de Derivadas>, <Abscissa Inicial>, <Lista de Ordenadas Iniciais>, <Abscissa FInal>). Para a construção do gráfico, as proporções diárias de infectados foram extraídas do modelo por meio do comando *Primeiros*(<Lista>, <Número de Elementos>) e, em seguida, multiplicadas por N para a obtenção das quantidades numéricas absolutas. Os dados coletados e aqui utilizados na determinação dos parâmetros, bem como modelos das planilhas dinâmicas utilizadas na implementação numérica e gráfica, podem ser consultados no Apêndice.

A Figura 3 mostra a comparação da previsão do modelo SIR com os dados reais. Visto que o modelo citado supõe a propagação do vírus ocorrendo de forma livre, a previsão mostrada pode ser interpretada como sendo o que aconteceria se nenhuma medida de contenção tivesse sido adotada.

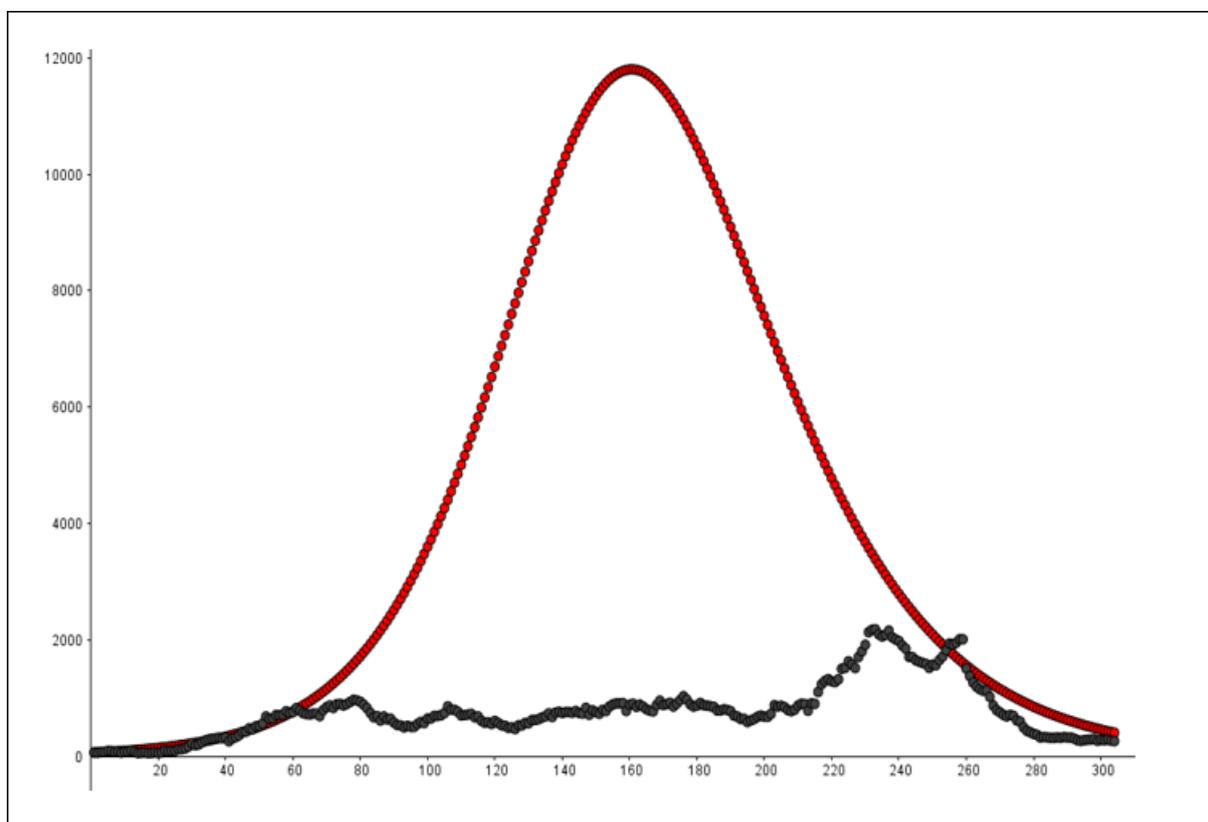


Figura 3: Comparação entre o número real de casos e a previsão do modelo SIR.

Nota-se que, em ambos os casos, passados 300 dias, a propagação do vírus diminuiu substancialmente. Porém, houve uma diferença considerável no pico de casos ativos: enquanto na realidade o maior número ocorreu em 21/05/21 (dia 233) com 2.183 casos ativos registrados, no modelo SIR a estimativa era alcançar o pico de 11.806 casos na data de 10/03/21 (dia 161).

Cabe ressaltar que em 04/03/21 (dia 155), o Hospital Regional de Guarapuava registrou 100% de ocupação dos 30 leitos de UTI (Unidade de Terapia Intensiva) reservados para adultos com covid-19 (G1 PR, 2021). Na data em questão, o município registrava 892 casos, número muito menor que os 11.678 estimados pelo modelo SIR. A estimativa completa pode ser consultada no Apêndice.

A Figura 4 mostra uma tentativa de previsão da segunda onda que veio a começar por volta de 13/04/21 (dia 195), obtida pela aplicação do modelo já construído com condições iniciais

$$s(0) = \frac{170.445}{N} \approx 0,933, \quad i(0) = \frac{590}{N} \approx 0,003, \quad r(0) = \frac{11.609}{N} \approx 0,063.$$

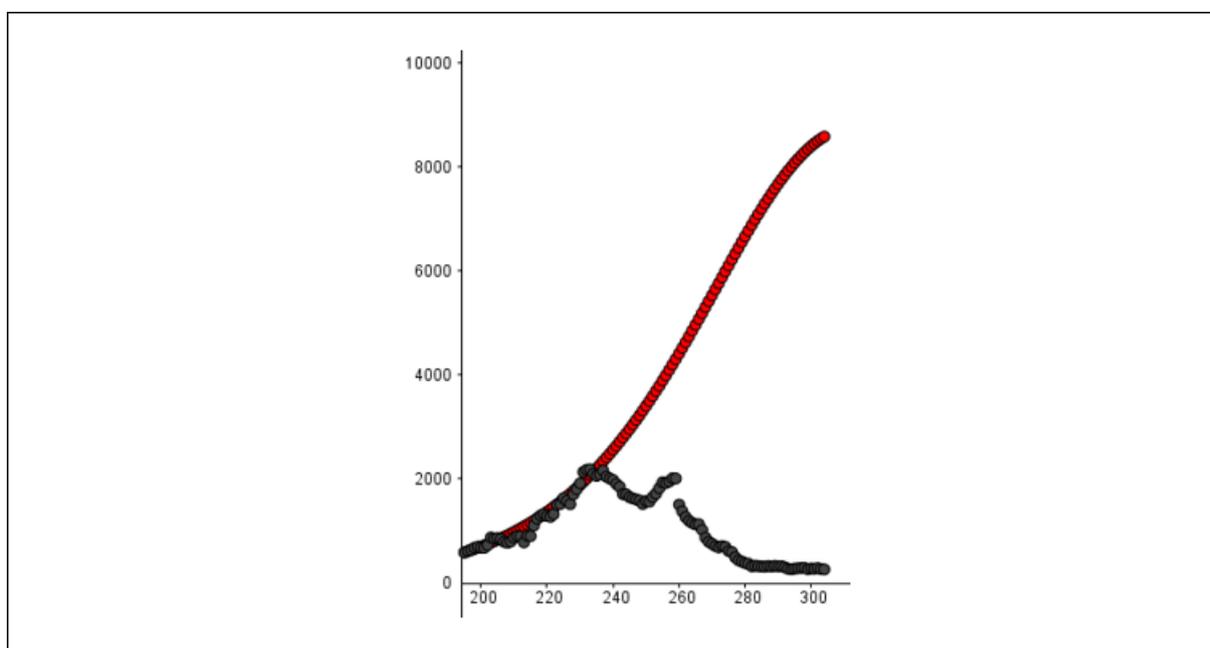


Figura 4: Comparação entre o número real de casos a partir do início da segunda onda com a previsão do modelo SIR.

Verifica-se que o decreto posto em prática em 19/05/21 (dia 231) – conforme mostrado na Figura 2 – foi importante, pois de acordo com a previsão, o número de casos nos dias seguintes aumentaria consideravelmente até o fim do período estudado, tendo como pico 8.577 casos na data de 31/07/21 (dia 304). Essa diferença entre a previsão e a realidade deve-se, possivelmente, a fatores como a utilização de parâmetros calculados com base nos dados do início da pandemia – em que a política de decretos era deficiente – assim como o começo da campanha de vacinação fortemente aderida pela população, que conseguiu imunizar boa parte dos cidadãos no decorrer do tempo. A estimativa completa da segunda onda também pode ser consultada no Apêndice.

Para encerrar esta seção, apresenta-se o cálculo do número efetivo de reprodução no início do período estudado (dia 1), no início da segunda onda (dia 195) e no final do período estudado (dia 304), conforme definido na Seção 2.3:

$$\mathcal{R}_e(1) \approx 1,508, \quad \mathcal{R}_e(195) \approx 1,414, \quad \mathcal{R}_e(304) \approx 1,316.$$

Em vista do Teorema 1, estes números podem ser interpretados como sendo um indicativo de que, na ausência de medidas de contenção, em nenhuma das datas consideradas o contágio iria cessar, mas sim continuar de forma crescente – o que reflete a importância das medidas de contenção adotadas no município.

4.3 Abordagem alternativa para o número efetivo de reprodução

Nesta seção, apresenta-se uma abordagem alternativa para o cálculo do número efetivo de reprodução. Para distinguir da situação tratada anteriormente, o valor estimado na presente seção será representado por \mathcal{R}_t e chamado de “número instantâneo de reprodução”. Fora do contexto do modelo SIR, ele pode ser calculado de diversas maneiras. Aqui, o cálculo deu-se com base na aplicação do modelo proposto por Cori *et al* (2013) por meio de uma planilha do Excel disponibilizada pelos referidos autores e complementado com estimativas da média (4,7) e desvio padrão (2,9) para a covid-19 também utilizadas em Figueiredo (2021). Assim, foram encontrados resultados referentes ao \mathcal{R}_t calculados em intervalos de 7, 15 e 30 dias, que serão mostrados abaixo. Cabe ressaltar que, mesmo sendo um modelo apresentado em 2013, ele também tem sido aplicado em estudos mais recentes sobre a covid-19, como por exemplo em Caicedo-Ochoa *et al* (2020).

Na Figura 5, observa-se a estimativa, na linha em vermelho, do número instantâneo de reprodução \mathcal{R}_t calculado em intervalos de 7 dias, enquanto a variação em verde indica o número diário de novos casos (que se manterá nos gráficos seguintes). A Figura 6 estima o \mathcal{R}_t calculado em intervalos de 15 dias. Por fim, a Figura 7 apresenta a estimativa do \mathcal{R}_t calculado em intervalos de 30 dias.

Nota-se que o pico do \mathcal{R}_t deu-se nos primeiros dias do período em estudo, visto que a política de decretos ainda era bastante problemática, assim como o entendimento da situação pandêmica pela população. Em contrapartida, os menores valores foram alcançados nos últimos 50 dias do estudo, provavelmente devido a uma política mais robusta de decretos, bem como o início da vacinação, reduzindo a quantidade de contágios.

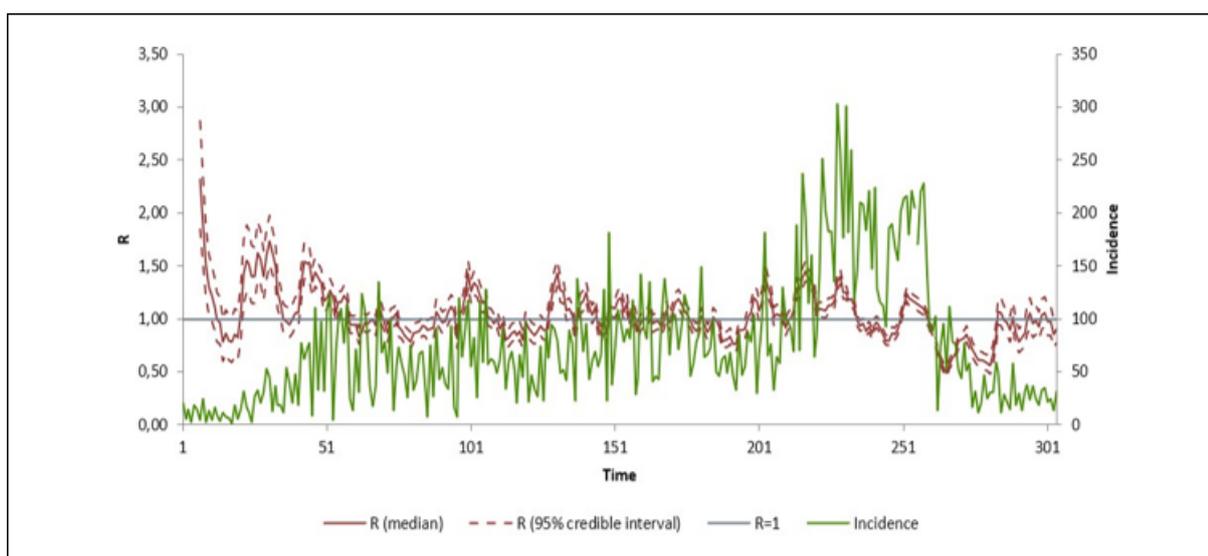


Figura 5: Estimativa do \mathcal{R}_t calculada em intervalos de 7 dias conforme modelo fornecido por Cori *et al* (2013).

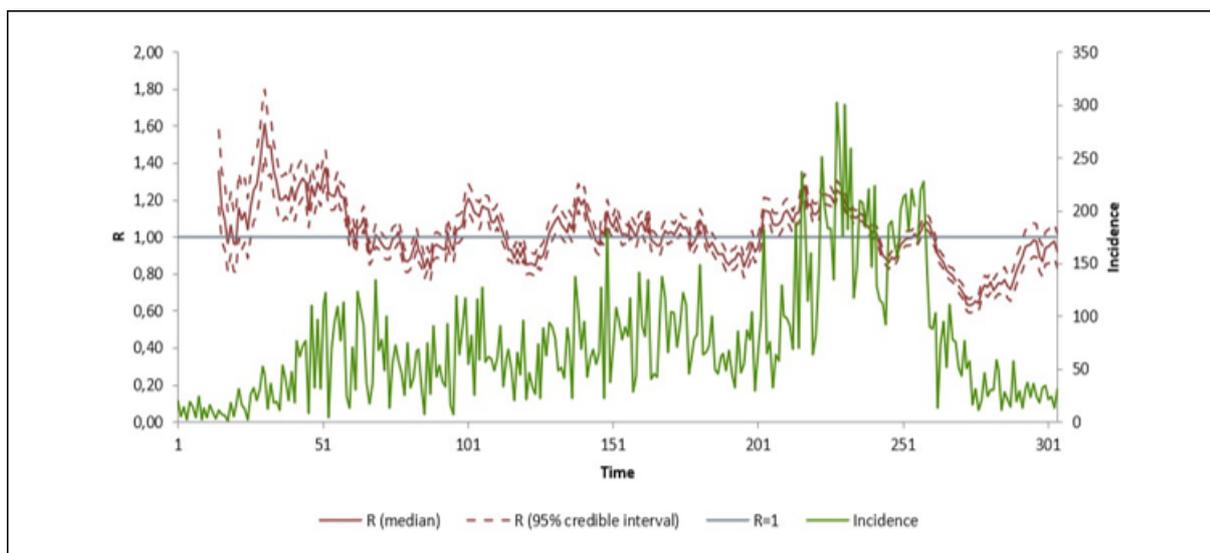


Figura 6: Estimativa do R_t calculada em intervalos de 15 dias conforme modelo fornecido por Cori *et al* (2013).

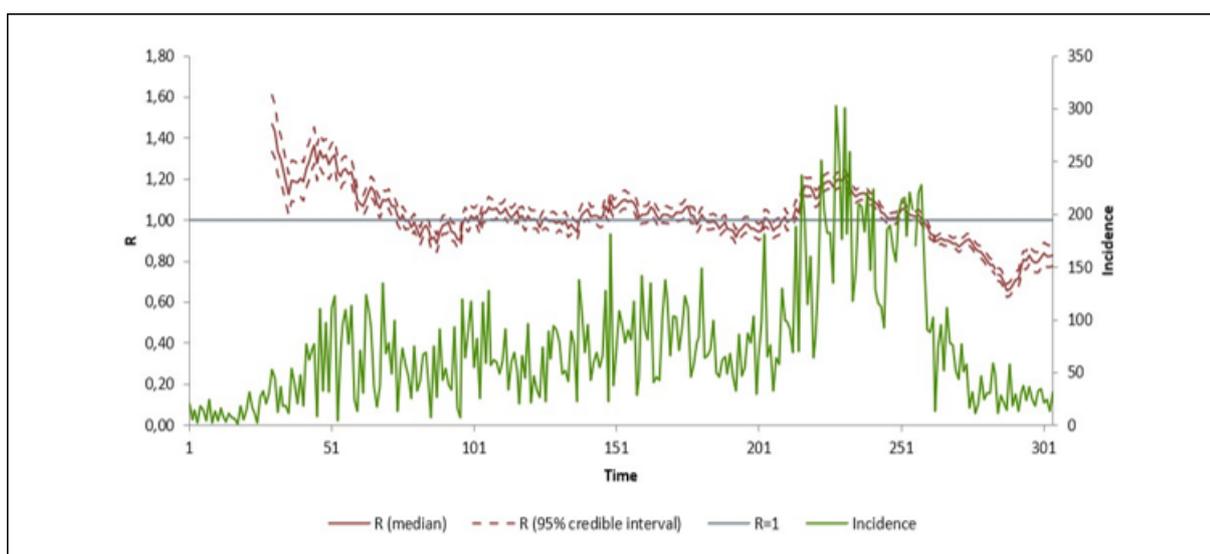


Figura 7: Estimativa do R_t calculada em intervalos de 30 dias conforme modelo fornecido por Cori *et al* (2013).

Fazendo uma comparação do número instantâneo de reprodução \mathcal{R}_t em seu início com o número efetivo de reprodução $\mathcal{R}_e(7) \approx 1,508$ (calculado conforme a Seção 2.3), em um primeiro momento utilizando o gráfico semanal, observa-se uma diferença significativa, possivelmente devido ao uso de apenas sete dados precedentes, bem como às diversas simplificações do modelo SIR. Porém, tomando tanto o gráfico quinzenal quanto mensal, nota-se uma aproximação mais satisfatória dos valores encontrados conforme o modelo SIR ($\mathcal{R}_e(15) \approx 1,507$ e $\mathcal{R}_e(30) \approx 1,505$) para com o modelo mais sofisticado utilizado nesta seção. Em contrapartida, observando o início da segunda onda (dia 195), o número efetivo de reprodução $\mathcal{R}_e(195) \approx 1,414$ aproxima-se mais justamente do gráfico semanal, enquanto nos demais se observa uma diferença considerável. Já no final do período (dia

304), o número efetivo de reprodução $\mathcal{R}_e(304) \approx 1,316$ não apresenta uma aproximação razoável de nenhuma das situações. Essa discrepância entre os valores pode ser interpretada como sendo um reflexo do fato de que o cálculo conforme o modelo SIR leva em conta apenas o número total de suscetíveis disponíveis, não considerando a dinâmica dos contágios (que é fortemente afetada, por exemplo, por isolamento, máscaras e vacinação – medidas estas que estavam vigorando no município).

4.4 Estimativas com o modelo SIR-V

Variantes do modelo SIR apresentado na Seção 2 são possíveis, por exemplo, compartimentando a população em novas classes. Considerando uma classe de vacinados, obtém-se o modelo que será chamado de SIR-V e é dado em sua forma normalizada por

$$\begin{cases} s' = -\beta si - \delta s \\ i' = \beta si - \gamma i \\ r' = \gamma i \\ v' = \delta s \end{cases}$$

onde δ é a taxa de vacinação e v é a proporção de vacinados. Aqui, além das hipóteses do modelo SIR, supõe-se também que a vacina confere imunidade total imediata.

Em geral, a taxa de vacinação δ pode não ser constante. Os dados disponibilizados pela prefeitura indicam que ela é aproximadamente crescente durante o início da segunda onda. Procurando um formato polinomial na variável temporal para δ por meio de um ajuste visual da curva de infectados, encontra-se que $\delta = 10^{-9}(t + t^2 + t^3 + t^4)$ fornece uma aproximação minimamente razoável, embora imperfeita. A seguir, supõe-se que δ é dada por esta expressão.

A Figura 8 ilustra o gráfico de casos ativos da segunda onda juntamente com a curva de infectados prevista pelo modelo SIR-V:

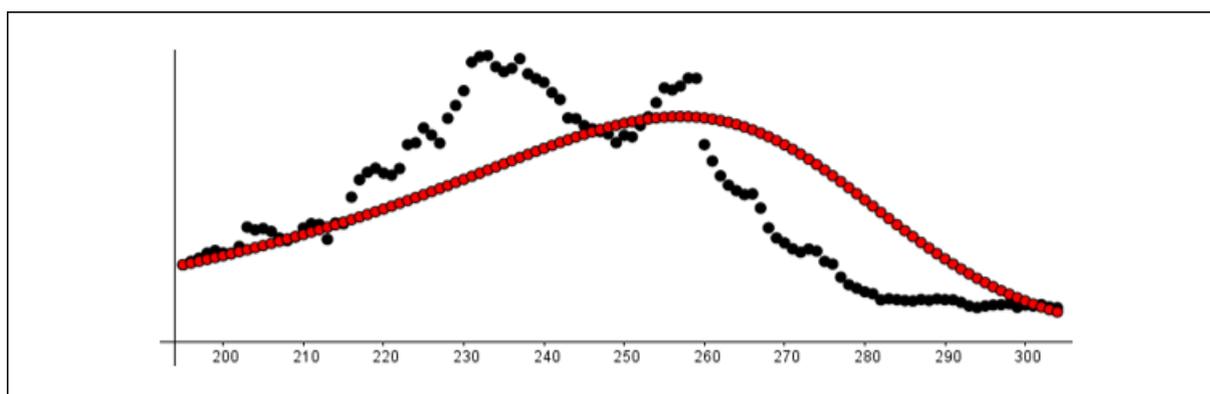


Figura 8: Comparação entre o número real de casos a partir do início da segunda onda com a previsão do modelo SIR-V.

A seguir, a Figura 9 mostra uma tentativa de previsão considerando a mesma taxa de vacinação δ aplicada aos primeiros 110 dias do período estudado.

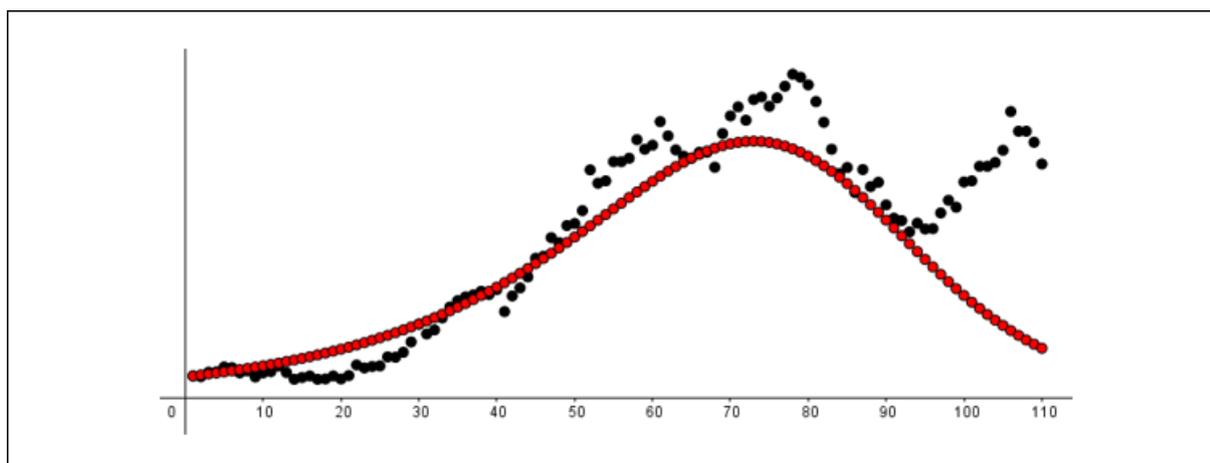


Figura 9: Comparação entre o número real de casos a partir do início da primeira onda com a previsão do modelo SIR-V.

Em 17/12/20 (dia 78), o município atingiu 970 casos ativos, sendo um dos picos deste intervalo. Considerando a referida taxa de vacinação, o número de casos ativos no dia em questão teria uma considerável queda, registrando aproximadamente 746 casos ativos. Outro ponto importante, já no fim do intervalo, é em 14/01/21 (dia 106), registrando 858 casos ativos. De acordo com a previsão incluindo a taxa vacinal, registrar-se-iam aproximadamente apenas 201 casos ativos.

4.5 Comparação com a literatura

O parâmetro β , que desempenha um papel fundamental tanto no modelo SIR quanto no modelo SIR-V, em geral não tem seu valor dado diretamente e precisa de algum modo ser estimado a partir dos dados. O método aqui utilizado para calculá-lo (discutido na Seção 2.2) é o mesmo apresentado por Abreu (2020). Executando as planilhas dinâmicas aqui disponibilizadas nos itens 4 e 7 do Apêndice com os dados do Exemplo 4.1 de Abreu (2020), obtemos os mesmos valores por ele obtido para β e $\mathcal{R}_e(0)$. Além disso, executando a planilha disponibilizada no item 6 do Apêndice com os dados da Seção 4.2 de Abreu (2020), obtemos os mesmos valores para o número diário de infectados com exatidão de 5 casas decimais.

Por outro lado, Almeida e Silveira (2021) utilizam um método diferente para determinar β que baseia-se na relação de linearidade $\ln(S) = -\frac{\beta}{\gamma}R + \ln(S_0)$ entre $\ln(S)$ e R . Aplicando este método aos dados do presente estudo obtém-se boas aproximações para o valor $\beta \approx 0,126$ aqui utilizado, a depender da quantidade de dias considerados. Por exemplo, 66 dias também produz 0,126. Porém, 78 dias (período aqui utilizado para obtenção do valor 0,126 via regressão exponencial) produz 0,118 enquanto 304 dias (período completo) produz 0,091. Essa discrepância entre valores segue, possivelmente, dos dados não satisfazerem estritamente as hipóteses do modelo SIR – o que pode decorrer de imprecisão do controle dos recuperados (resultante, por exemplo, da falta de comunicação aos órgãos competentes por parte da população) bem como de influência do isolamento social e vacinação.

Esta breve análise mostra que os resultados produzidos pelos modelos implementados no GeoGebra e aqui utilizados para analisar a situação pandêmica de Guarapuava são consistentes com resultado prévio e método distinto presentes na literatura.



5 Conclusões

Diante do exposto no presente trabalho, fica evidente após toda análise e previsões feitas que a curva de infectados poderia ser maior não fosse a existência de decretos, assim como o início da campanha de vacinação, gerando uma diferença de quase nove mil casos ativos se comparado o pico real ao pico da previsão. Ao mesmo tempo, uma aceleração no processo de vacinação poderia gerar um declínio da curva de infectados em um período anterior, reduzindo possivelmente o número total de casos, assim como as internações decorrentes do vírus e possíveis óbitos. Assim sendo, o objetivo inicial de utilizar o modelo SIR para estimar o impacto das medidas de contenção no âmbito do município foram atingidos.

No que diz respeito à análise dos modelos matemáticos, tanto o modelo SIR quanto o modelo SIR-V geraram previsões possíveis, em cenários hipotéticos, onde tanto a política de decretos quanto a vacinação não estariam presentes. Além disso, o número básico de reprodução do modelo SIR apresentou aproximações possivelmente relevantes quando comparado à abordagem mais sofisticada de Cori *et al* (2013).

Finalmente, cabe ressaltar que os resultados apresentados devem ser interpretados à luz das hipóteses simplificadoras dos modelos SIR e SIR-V, tais como: parâmetros β , k e N constantes, população homogênea, período de latência nulo e vacina com imunidade total imediata. A abordagem de modelos que buscam diminuir estas simplificações, uma aproximação menos rudimentar para o parâmetro δ , uma coleta e análise dos dados posteriores a 31/07/21 bem como uma comparação mais abrangente com resultados prévios presentes na literatura ficam como possibilidades para trabalhos futuros.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem aos pareceristas anônimos por suas sugestões úteis que ajudaram a melhorar a versão anterior do manuscrito.

7 Referências bibliográficas

ABREU, M. O. R. Modelagem matemática da Covid-19 usando SIR. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, v. 4, n. 1, p. 27-48, 2020. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art3-n1-2020.pdf>. Acesso em: 16 out. 2022.

ALMEIDA, L. A. F.; SILVEIRA, G. P. Análise do comportamento da Covid-19 no Brasil via modelo SIR. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 21, p. 24-37, 2021. Edição Iniciação Científica. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v21a03ic-analise-do-comportamento-da-covid.pdf>. Acesso em: 17 out. 2022.

ARENAS, A. *et al*. Epidemic spreading: tailored models for COVID-19. **Europhysics News**, v. 51, n. 5, p. 38-40, 2020.



BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. London: Springer, 2011.

BERNOULLI, D. Essai d'une nouvelle analyse: de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. **Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, tirés des registres de l'Académie Royale des Sciences**, p. 1-45, 1760. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3558n/f220.image.r=daniel%20bernoulli>. Acesso em: 14 out. 2022.

BERNOULLI, D.; BLOWER, S. An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it. **Reviews in Medical Virology**, v. 14, n. 5, p. 275-288, 2004.

BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. **Mathematical models in population biology and epidemiology**. 2nd ed. New York: Springer, c2012.

CAICEDO-OCHOA, Y. *et al.* Effective reproductive number estimation for initial stage of Covid-19 pandemic in Latin American Countries. **International Journal of Infectious Diseases**, v. 95, p. 316-318, 2020.

CORI, A. *et al.* New framework and software to estimate time-varying reproduction numbers during epidemics. **American Journal of Epidemiology**, v. 178, n. 9, p. 1505-1512, 2013.

FIGUEIREDO, F. **Estimativas de R(t) por estados do Brasil**. Jun. 2021. Disponível em: <https://flaviiovf.github.io/covid19/>. Acesso em: 12 ago. 2021.

G1 PR; RPC GUARAPUAVA. Hospital Regional de Guarapuava tem 100% de ocupação em UTI Covid-19 do SUS. **G1: Campos Gerais e Sul RPC**, [s. l.], 04 mar. 2021, 13:32. Disponível em: <http://g1.globo.com/pr/campos-gerais-sul/noticia/2021/03/04/hospital-regional-de-guarapuava-volta-a-ter-100percent-de-ocupacao-em-uti-covid-19-do-sus.ghtml>. Acesso em: 27 jan. 2022.

G1 SP. Primeiro caso confirmado de Covid-19 no Brasil ocorreu em SP e completa seis meses nesta quarta. **G1: G1 SP, São Paulo**, 26 ago. 2020, 06:58. Disponível em: <https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2020/08/26/primeiro-caso-confirmado-de-covid-19-no-brasil-ocorreu-em-sp-e-completa-seis-meses-nesta-quarta.ghtml>. Acesso em 12 out. 2022.

IBGE. **Guarapuava: panorama**. c2017. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/guarapuava/panorama>. Acesso em: 20 ago. 2021.

KERMACK, W. O; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences**, v. 115, n. 772, p. 700-721, 1927.

MATA, A. S.; DOURADO, S. M. P. Mathematical modeling applied to epidemics: an overview. **São Paulo Journal of Mathematical Sciences**, v. 15, n. 2, p. 1025-1044, 2021.

MARTCHEVA, M. **An introduction to mathematical epidemiology**. New York: Springer, 2015.



NACHBIN, A.; TABAK, E. **Equações diferenciais em modelagem matemática computacional**. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/21_CBM_97_01.pdf. Acesso em: 18 out. 22.

OPAS/OMS. **Folha informativa sobre COVID-19**. [Washington, DC]: OPAS, 2022. Disponível em: <https://www.paho.org/pt/covid19>. Acesso em: 17 out. 2022.

PMG. **Nota oficial: Guarapuava tem primeiro caso confirmado de COVID-19**. 2020. Disponível em: <https://www.guarapuava.pr.gov.br/noticias/nota-oficial-guarapuava-tem-primeiro-caso-confirmado-de-covid-19/>. Acesso em: 20 ago. 2021.

PMG. **Portal Covid-19**. 2021. Disponível em: <https://www.guarapuava.pr.gov.br/portal-covid-19>. Acesso em: 20 ago. 2021.

PG. **Perfil oficial da Prefeitura de Guarapuava - Paraná**. Boletim Covid-19. Guarapuava, 2022a. Instagram: @guarapuava_pref. Disponível em: https://www.instagram.com/guarapuava_pref. Acesso em: 05 maio 2022.

PG. **Instagram Oficial exclusivo para divulgação de informações sobre a Covid 19 em Guarapuava**. Guarapuava, 2022b. Instagram: @guarapuava_covid. Disponível em: https://www.instagram.com/guarapuava_covid. Acesso em: 05 maio 2022.

SEGEL, L. A.; EDELSTEIN-KESHET, L. **A primer on mathematical models in biology**. Philadelphia: SIAM, 2013.

SESA/PR. **Plano de contingência Covid-19: nível 3 - execução**. [Curitiba]: Secretaria de Estado da Saúde do Paraná, 2021. Disponível em: https://www.saude.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-03/Plano%20de%20Contigencia%20Covid%202023.03.21%20FINAL.pdf. Acesso em: 26 nov. 2021.

SMITH, D.; MOORE, L. The SIR model for spread of disease. **JOMA**, v. 1, n. 3, 2001. Disponível em: https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/4/vol1/Contents3.html. Acesso em: 19 jul. 21.

UOL. Covid: 1º caso em Wuhan foi de vendedora de mercado de animais, diz estudo. VivaBemUOL, [S. l.], 19 nov. 2021, 08:38. Disponível em: <http://www.uol.com.br/vivabem/noticias/rfi/2021/11/19/covid-1-caso-em-wuhan-foi-de-vendedora-de-mercado-de-animais-diz-estudo.htm>. Acesso em: 13 out. 2022.

VELTEN, K. **Mathematical modeling and simulation**. Weinheim: Wiley-VCH, 2009.

WEISS, H. The SIR model and the foundations of public health. **Materials Matemàtics**, v. 2013, n. 3, 2013. Disponível em: <https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2013n03.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2021.



WHO. **WHO Coronavirus (Covid-19) Dashboard**. 2022. Disponível em: <https://covid19.who.int>. Acesso em: 21 abr. 2022.

8 Apêndice

Este apêndice disponibiliza os dados que foram coletados bem como os dados que foram gerados pelos modelos estudados. Além disso, também são disponibilizadas algumas planilhas dinâmicas do GeoGebra que podem ser utilizadas como modelo para cálculos similares (bastando para isso a alteração dos valores numéricos dos parâmetros e dados).

1. Planilha com os dados da prefeitura sobre número diário de novos casos, casos ativos, casos confirmados, recuperados e óbitos: https://docs.google.com/spreadsheets/d/12m6ipgjjvHQkUxgHYSIvD_oHSICbF97ne/edit#gid=49087188.
2. Planilha com os dados da prefeitura sobre número diário de vacinação: <https://docs.google.com/spreadsheets/d/13CKcmRQh3EmpN19CsdsRG8dVfzzfW9JB/edit#gid=1840558477>.
3. Planilha com as previsões geradas pelos modelos: <https://docs.google.com/spreadsheets/d/13BWW-Z1imle61ZqEJISXihMLB3RZIPJ/edit#gid=839056574>
4. Planilha dinâmica com o cálculo da regressão exponencial: <https://www.geogebra.org/m/wtfh2z9x>.
5. Planilha dinâmica com a implementação do modelo SIR: <https://www.geogebra.org/m/n8ug4yjj>.
6. Planilha dinâmica com a extração dos valores numéricos da curva de infectados: <https://www.geogebra.org/m/hkuejunv>.
7. Planilha dinâmica com o cálculo do $\mathcal{R}_e(t)$: <https://www.geogebra.org/m/nfrv9jbw>.
8. Planilha dinâmica com a implementação do modelo SIR-V: <https://www.geogebra.org/m/uyekvt5r>.