

Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664  
v. 22, n. 3, dez. 2022

**Juan López Linares**

Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos  
Universidade de São Paulo  
jlopez@usp.br

## Jogos com a desigualdade triangular

Games with triangular inequality

### Resumo

Jogos são ferramentas eficazes no processo de ensino-aprendizagem em determinados contextos. O presente trabalho compila oito atividades que podem ser desenvolvidas em diversos espaços da escola. O professor de Matemática pode convidar seus pares das áreas de Computação e Educação Física para executar os desafios como projeto multidisciplinar. Estuda-se a desigualdade triangular para formar ou não um triângulo, a Lei da Reflexão, o Problema do Cavaleiro, a tarefa do Removedor de Minas, a construção da Faixa de Pedestres, como atravessar um Rio Traíçoeiro, o Ponto de Fermat e o Problema de Fagnano. A estrutura de jogo justifica-se devido a existência de diversas possibilidades para cumprir uma tarefa. Cada jogador ou time deve encontrar determinada configuração que minimiza algum comprimento. Embora a desigualdade triangular seja um conteúdo clássico ela é pouco explorada nos livros de textos. Todos os links das figuras são disponibilizados de forma interativa no site do GeoGebra.

**Palavras-chave:** Desigualdade triangular. Jogos. GeoGebra. Olimpíadas internacionais de matemática. Ensino médio e universitário. Geometria.

### Abstract

Games are effective tools in the teaching-learning process in certain contexts. The present work compiles eight activities that can be developed in different spaces of the school. The Mathematics teacher can invite their peers from the areas of Computing and Physical Education to perform the challenges as a multidisciplinary project. Triangular Inequality is studied to form or not a triangle, the Law of Reflection, the Knight Problem, the task of the Mine Clearer, the construction of the Pedestrian Crossing, how to cross a Treacherous River, the Fermat Point and the Fagnano's Problem. The game structure is justified due to the existence of several possibilities to accomplish a task. Each player or team must find a certain configuration that minimizes some length. Although Triangular Inequality is a classic content, it is little explored in textbooks. All the links to the figures are available interactively on the GeoGebra website.

**Keywords:** Triangular inequality. Games. GeoGebra. International mathematics olympics. High school and university. Geometry.





# 1 Introdução

Brincadeiras e jogos são ferramentas eficazes de aprendizagem em determinados contextos. Segundo Kamii e Joseph (1992), brincadeiras podem ser utilizados na educação matemática para estimular a habilidade de pensar de forma independente. A pesquisa de Savi e Ribas (2008) traz pontos importantes para uso de jogos digitais na educação. Os autores listam três potencialidades da interação com os computadores para o ensino: efeito motivador, aprendizado por descoberta e socialização.

Em Souza (2014), o autor apresenta com figuras, textos e vídeos um conjunto de problemas (jogos) que são resolvidos pelas transformações geométricas de Translação e Rotação. Outro artigo muito didático sobre o Teorema de Napoleão e o ponto de Fermat pode ser encontrado em Rodrigues (2019).

O presente trabalho compila oito atividades que podem ser desenvolvidas em salas de aula, num laboratório de informática, como tarefa de casa ou na quadra de esportes da escola. O professor de Matemática pode convidar seus pares das áreas de Computação e Educação Física para executar os desafios como projeto multidisciplinar.

Em todos os casos está envolvida a desigualdade triangular. O jogo justifica-se pela existência de diversas possibilidades. Deve ser encontrada determinada configuração, majoritariamente, aquela que minimiza o comprimento de uma poligonal. Embora a desigualdade triangular seja um conteúdo clássico ela é pouco explorada nos livros de textos.

Este texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Outros conjuntos de problemas resolvidos de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Potência de um ponto e Eixo Radical (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021a), Extremos com desigualdades na Geometria (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021b) e a Transformação de Inversão (LÓPEZ LINARES, 2022) foram publicados.

Inicia-se na seção 2 com a lista dos jogos, o enunciado dos desafios, regras, materiais e questionamentos. Na seção 3 é discutida a teoria como um suporte para o professor interessado em aplicar alguma destas atividades.

## 2 Lista de jogos

1. Não conseguir formar um triângulo. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.1. Apoio teórico em 3.1.
2. Lei da Reflexão. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.2. Apoio teórico em 3.2.
3. Problema do Cavaleiro. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.3. Apoio teórico em 3.3.
4. Removedor de Minas. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.4. Apoio teórico em 3.4.
5. Faixa de Pedestres. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.5. Apoio teórico em 3.5.
6. Rio Traíçoero. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.6. Apoio teórico em 3.6.

7. Ponto de Fermat. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.7. Apoio teórico em 3.7.
8. Problema de Fagnano. Desafio, regras, materiais e questionamentos em 2.8. Apoio teórico em 3.8.

## 2.1 Jogo 1: não conseguir formar um triângulo

Formar grupos de 3 ou 4 jogadores. Com um barbante (segmento  $AD$  na Figura 1) pedir a um estudante (ou grupo) para dividir em três partes de comprimentos diferentes ( $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ ). A seguir solicitar que tente formar um triângulo, de tal forma que o pedaço de barbante  $AB$  fica fixo (e esticado) na horizontal. Os estudantes nos vértices  $C$  e  $D$  podem movimentar-se livremente, mas mantendo a corda esticada.

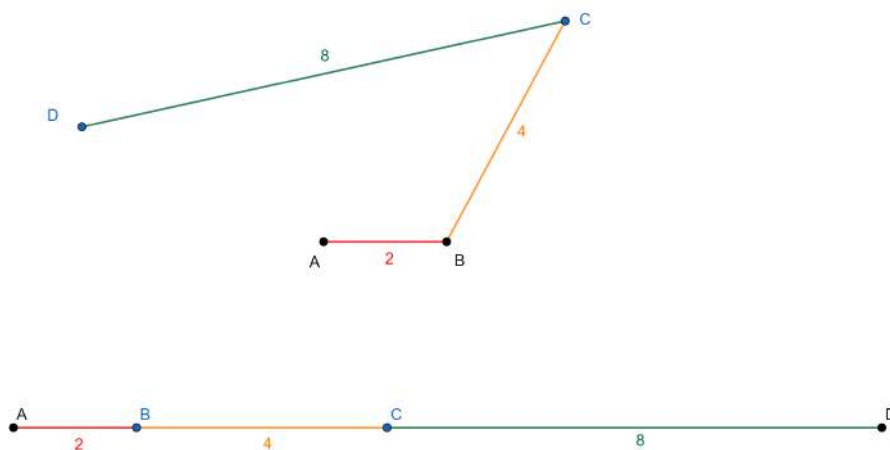


Figura 1: Dividir em três ( $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ ) partes diferentes o barbante  $AD$  e tentar NÃO formar um triângulo. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Conseguiram formar um triângulo? Como explica-se o resultado pela desigualdade triangular? Como a maior parte das pessoas tende a dividir em partes aproximadamente iguais é mais difícil não conseguir. Ganha o grupo que lograr NÃO formar um triângulo e explicar corretamente o porquê.

## 2.2 Jogo 2: lei da reflexão

Formar grupos de 3 jogadores. Desenhar uma reta  $r$  e dois pontos  $C$  e  $D$  no mesmo semiplano em relação a  $r$  (Figura 2). Um jogador fica no ponto  $C$ , o segundo no ponto  $D$  e o terceiro escolhe um ponto  $F \in r$  procurando minimizar o comprimento da poligonal  $CFD$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal  $CFD$  de menor comprimento. Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

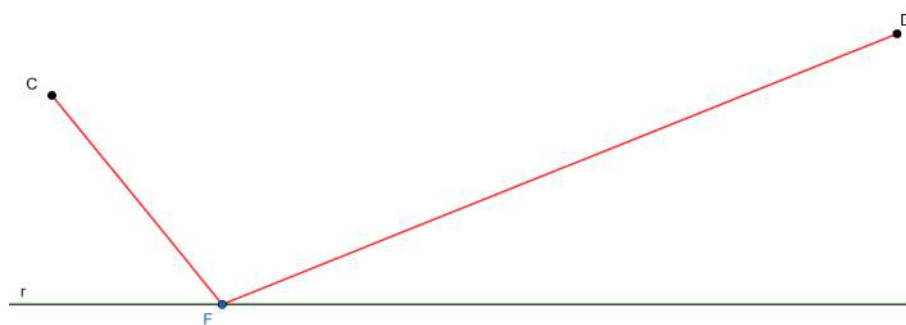


Figura 2: Escolher um ponto  $F \in r$  procurando minimizar o comprimento da poligonal  $CFD$ . A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

### 2.3 Jogo 3: problema do cavaleiro

Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto  $A$  (Figura 3). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer grama em algum ponto  $B \in MN$ . A seguir tomar água em algum ponto  $C \in PN$  e finalmente continuar para o Estábulo no ponto  $D$ . Qual deve ser a posição dos pontos  $B$  e  $C$  para que o comprimento da poligonal  $ABCD$  seja mínima?

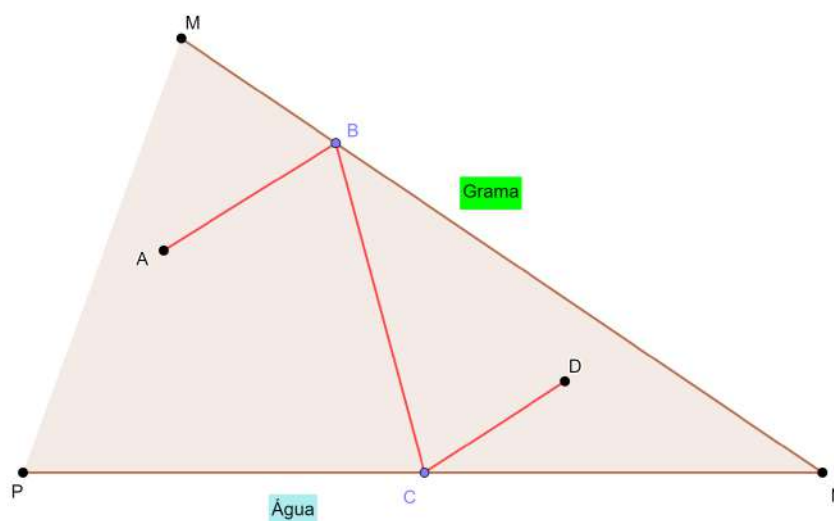


Figura 3: Problema do cavaleiro. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal  $ABCD$  de menor comprimento. Existe alguma relação entre este jogo e o anterior? Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

### 2.4 Jogo 4: removedor de minas

Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero  $ABC$  de lado  $l$  (Figura 4). O raio  $R$  do seu detector é igual a metade da altura  $h$  do  $\triangle ABC$ . O soldado

começa no vértice  $A$ . Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir para garantir que toda a região seja checada. O soldado é representado pela letra  $S$  e a circunferência  $s$  delimita a área verificada.

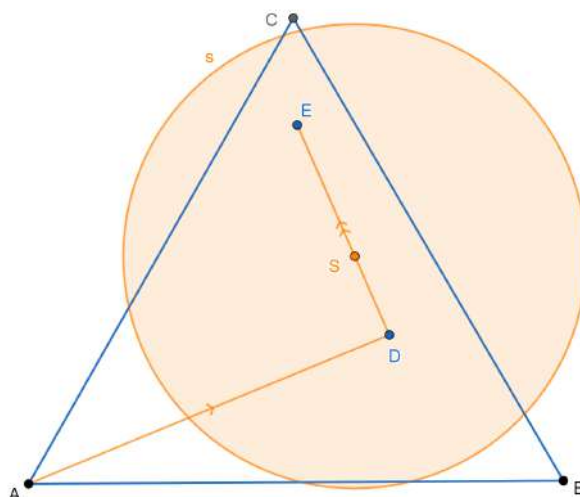


Figura 4: Removedor de minas. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Escolher uma vareta de comprimento  $r$  como detector (pode ser um cabo de vassoura). O jogador com a vareta representa o soldado e pode verificar a área atingida simplesmente girando a vareta sobre sua posição. Caso gire com o braço esticado, este também deve ser considerado. Ou seja, o raio da circunferência  $s$  é  $R = r + b$ , onde  $b$  representa a medida do braço.

Lembra-se que a altura  $h$  num triângulo equilátero em função do lado  $l$  calcula-se como:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Para satisfazer a restrição  $R = \frac{h}{2}$  o  $\triangle ABC$  deve ter um comprimento dos lados:

$$l = \frac{4}{\sqrt{3}}R = \frac{4\sqrt{3}}{3}R \approx 2,3R.$$

O  $\triangle ABC$  pode ser construído com um barbante seguindo o critério lado-lado-lado. A poligonal  $ADE$  pode ser representada com barbante. Formar grupos de 3 ou 4 jogadores. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal  $ADE$  de menor comprimento. A simetria do triângulo equilátero pode ser explorada de alguma forma? Como poderia ser utilizada a desigualdade triangular?

## 2.5 Jogo 5: faixa de pedestres

Uma pessoa deve deslocar-se do ponto  $P$  até o ponto  $Q$  pela poligonal  $PXYQ$  (Figura 5). O segmento  $XY$  representa uma faixa de pedestres colocada perpendicularmente aos segmentos  $AB$  e  $CD$  e que atravessa uma avenida perigosa. Como escolher o ponto  $X \in CD$  de tal forma que a poligonal  $PXYQ$  tenha comprimento mínimo?

Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras  $P$ ,  $X$ ,  $Y$  e  $Q$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal  $PXYQ$  de menor comprimento. Existe uma estratégia eficiente para este jogo? Pode ser relacionada com a desigualdade triangular? Alguma semelhança com o jogo 2?

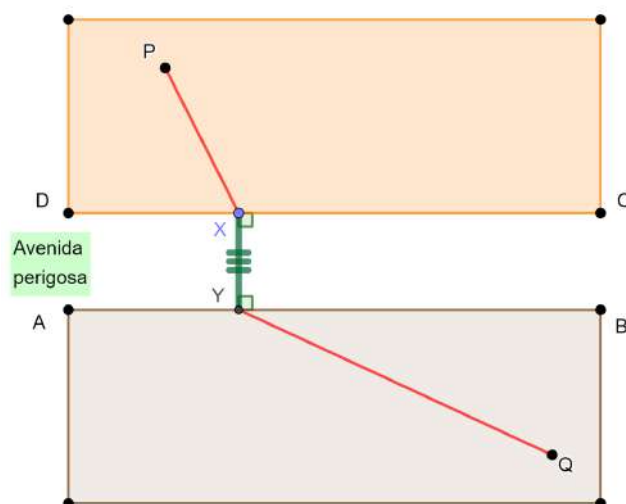


Figura 5: Faixa de pedestres. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

## 2.6 Jogo 6: rio traiçoeiro

Uma pessoa deve deslocar-se do ponto  $P$  até o ponto  $Q$  pela poligonal  $PABCDQ$  (Figura 6). Os segmentos  $AB$  e  $CD$  representam pontes construídas perpendicularmente aos lados dos retângulos e que atravessam um rio traiçoeiro. Como escolher os pontos  $A \in MN$  e  $C \in RS$  de tal forma que a poligonal  $PABCDQ$  tenha comprimento mínimo?

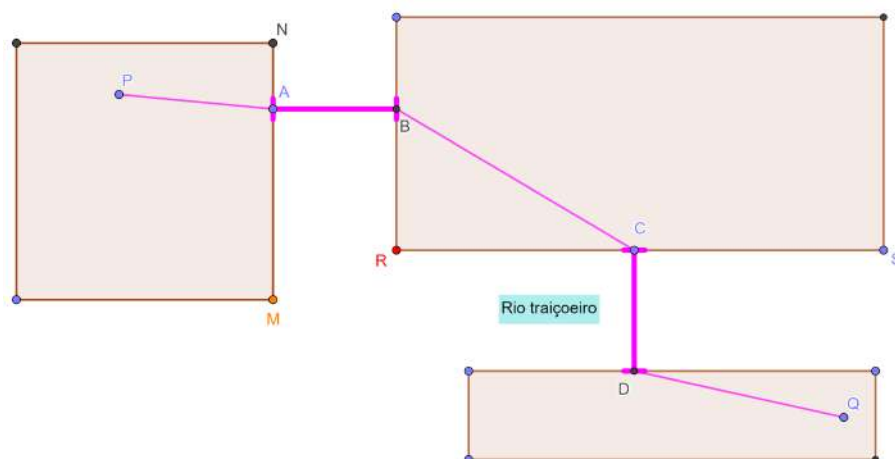


Figura 6: Rio traiçoeiro. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Formar grupos de 6 jogadores, um para cada uma das letras  $P$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $Q$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. Ganha o grupo que tiver escolhido a poligonal  $PABCDQ$  de

menor comprimento. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? Como relaciona-se com o anterior? Qual a correlação com a desigualdade triangular?

## 2.7 Jogo 7: ponto de Fermat

Dado um  $\triangle ABC$ , encontrar o ponto  $P$  que minimiza a soma  $AP + BP + CP$  (Figura 7). Formar grupos de 4 jogadores, um para cada uma das letras  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. O triângulo  $ABC$  pode ser desenhado no chão com giz. Ganha o grupo com menor  $AP + BP + CP$ . Para comparar o resultado da soma entre diferentes grupos solicitar que os jogadores alinhem-se num único segmento de reta  $APBPC$ , mantendo os barbantes esticados. Isto é, os jogadores em  $P$  e  $B$  devem segurar simultaneamente dois barbantes. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? O resultado depende do tipo de  $\triangle ABC$ ? O mínimo deve acontecer dentro ou fora do triângulo? Como relaciona-se com a desigualdade triangular?

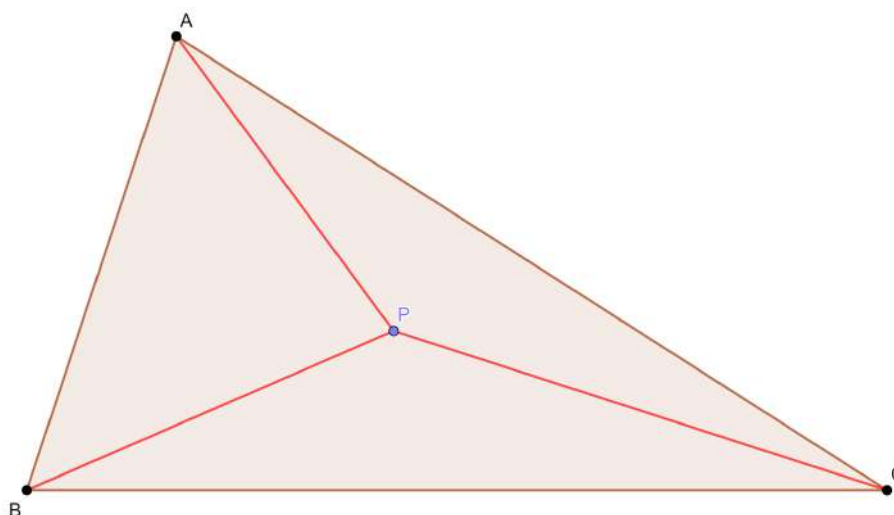


Figura 7: Jogo sobre o ponto de Fermat. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

## 2.8 Jogo 8: problema de Fagnano

Dado um triângulo acutângulo  $ABC$  encontrar o  $\triangle XYZ$  de perímetro mínimo, inscrito no  $\triangle ABC$  (Figura 8). Ou seja,  $X \in AB$ ,  $Y \in BC$  e  $Z \in CA$ .

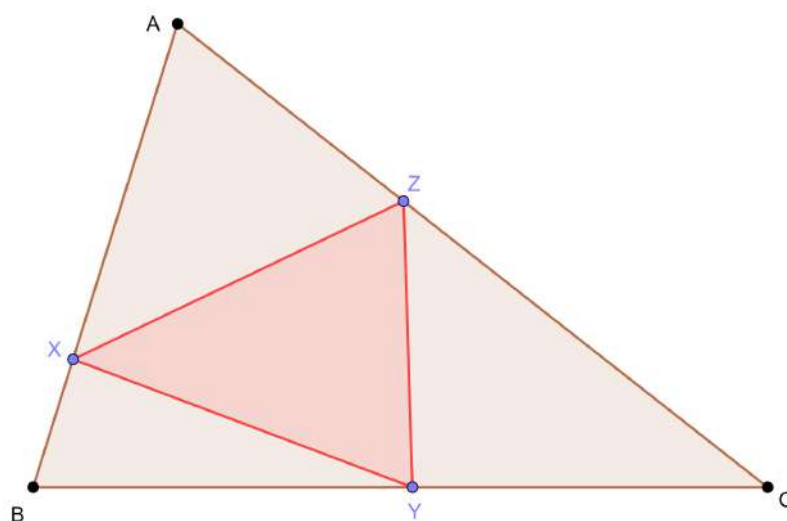


Figura 8: Jogo sobre o problema de Fagnano. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Formar grupos de 3 jogadores, um para cada uma das letras  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ . As medidas podem ser feitas com um barbante esticado. O triângulo acutângulo  $ABC$  pode ser desenhado no chão com giz. Ganha o grupo com menor comprimento de  $XY + YZ + ZX$ . Para comparar o resultado da soma entre diferentes grupos solicitar que os jogadores alinhem-se num único segmento de reta  $XYZX$ , mantendo os barbantes esticados. Isto é, os jogadores em  $Y$  e  $Z$  devem segurar simultaneamente dois barbantes. Existe alguma estratégia eficiente para este jogo? Como relaciona-se com a desigualdade triangular? Qual a menor distância entre um ponto fora de uma reta e esta?

### 3 Fundamentação teórica dos jogos

#### 3.1 Desigualdade triangular (jogo 1)

**Proposição 1** (Ao maior lado corresponde o maior ângulo). *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

*Demonstração.* A Figura 9 mostra um triângulo  $ABC$ . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que  $BC > AC$ . Marca-se sobre  $BC$  o ponto  $D$  tal que  $AC = CD$ . Logo, o  $\triangle CAD$  é isósceles de base  $AD$  e  $\angle CAD = \angle CDA = \theta$ . Sejam  $\angle CBA = \beta$  e  $\angle BAD = \gamma$ . Pelo Teorema do Ângulo Externo, aplicado no vértice  $D$  do  $\triangle BDA$ , tem-se  $\theta = \beta + \gamma$ . Portanto,  $\theta > \beta$ . Além disso, como  $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$ , então  $\alpha > \beta$ . Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo.  $\square$



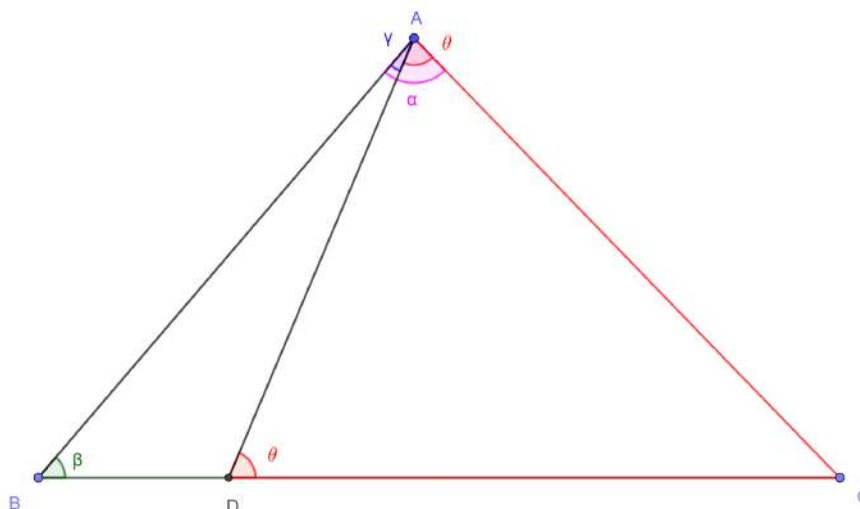


Figura 9: Guia para a demonstração da Proposição 1. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Ainda na Figura 9, por redução ao absurdo e a Proposição 1 prova-se a recíproca. Isto é, se  $\alpha > \beta$ , então  $BC > AC$ .

**Proposição 2** (Desigualdade triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

*Demonstração.* Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 10 mostra um triângulo  $ABC$  com  $\angle ABC = \beta$ . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que  $BC \geq CA \geq AB$ . Estende-se a semirreta  $CA$  e marca-se o ponto  $D \in CA$  de tal forma que  $AD = AB$ . Seja  $\angle DBC = \gamma$ . Como o  $\triangle ABD$  é isósceles de base  $BD$  tem-se  $\angle ABD = \angle ADB = \theta$ . Adicionalmente, de

$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e da Proposição 1, segue que:

$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

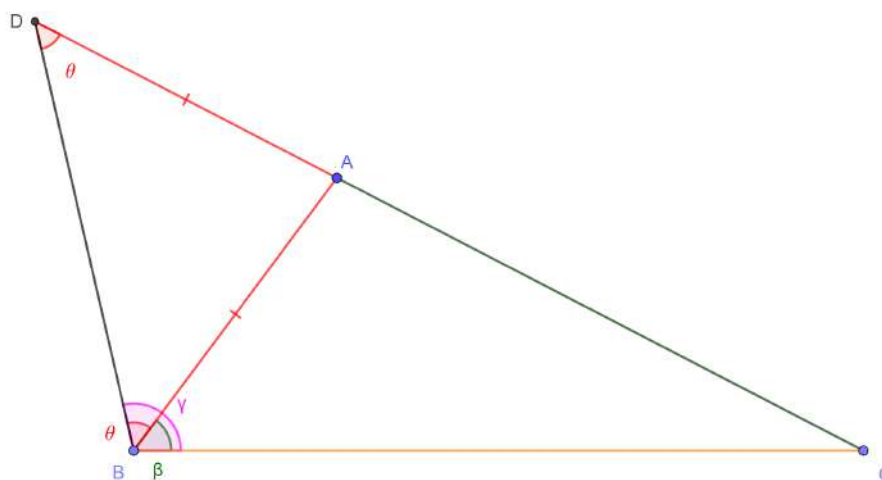


Figura 10: Guia para a demonstração da Proposição 2. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

**Problema 1.** *Como cortar um barbante em três partes e conseguir NÃO formar um triângulo?*

### 3.1.1 Resolução do Problema 1

Pela discussão anterior, no Jogo 1, para conseguir NÃO formar um triângulo basta que o lado de maior comprimento seja mais longo que a soma dos outros dois.

## 3.2 Comprimento mínimo passando por uma reta (jogo 2)

**Problema 2.** *Qual é a posição do ponto  $F \in r$  que minimiza o comprimento da poligonal  $CFD$  (Figura 11)?*

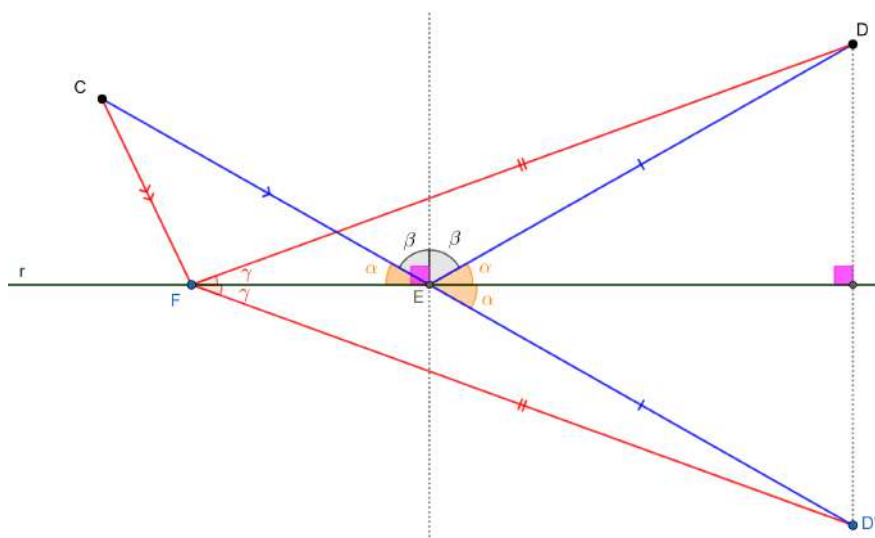


Figura 11: O ponto  $E \in r$ , tal que  $C, E$  e  $D'$  sejam colineares, minimiza o comprimento da poligonal  $CFD$ . A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

### 3.2.1 Resolução do Problema 2

Seja o ponto  $D'$  a reflexão de  $D$  relativo a reta  $r$  (Figura 11). Considera-se o ponto  $E \in r$  tal que  $C, E$  e  $D'$  sejam colineares. Tem-se que  $FD = FD'$  e  $ED = ED'$ . Pela desigualdade triangular no  $\triangle CD'F$  o caminho  $CED'$ , igual a  $CED$ , é mais curto que  $CFD'$ , igual a  $CFD$ . Ou seja,

$$CE + ED = CE + ED' \leq CF + FD' = CF + FD.$$

Isto é, no jogo 2, a posição do ponto  $F$  deve coincidir com o ponto  $E$  para minimizar o comprimento da poligonal  $CFD$ .

Este conteúdo pode ser correlacionado com a lei da reflexão de ondas eletromagnéticas estudada nos cursos de Física. Os ângulos de incidência e reflexão, respeito a uma perpendicular a  $r$  passando por  $E$ , são iguais ( $\beta$ ). Num médio homogêneo a luz segue o caminho mais curto.

### 3.3 Problema do cavaleiro (jogo 3)

Apresenta-se um dos problemas propostos em Gay (1997).

**Problema 3.** Um cavaleiro está com seu cavalo no ponto  $A$  (Figura 12). Ele deve primeiro levar o cavalo a comer grama em algum ponto  $B \in MN$ . A seguir tomar água em algum ponto  $C \in PN$  e finalmente continuar para o Estábulo no ponto  $D$ . Qual deve ser a posição dos pontos  $B$  e  $C$  para que o comprimento da poligonal  $ABCD$  seja mínima?

#### 3.3.1 Resolução do Problema 3

Sejam  $A'$  e  $D'$  as reflexões dos pontos  $A$  e  $D$  respeito aos segmentos  $MN$  e  $PN$ , respectivamente. Adicionalmente, marquem-se os pontos  $E = A'D' \cap MN$  e  $F = A'D' \cap PN$ . O mínimo acontece quando os pontos  $B$  e  $C$  são colineares com  $A'$  e  $D'$ . Ou seja, quando  $B = E$  e  $C = F$  (Figura 12).

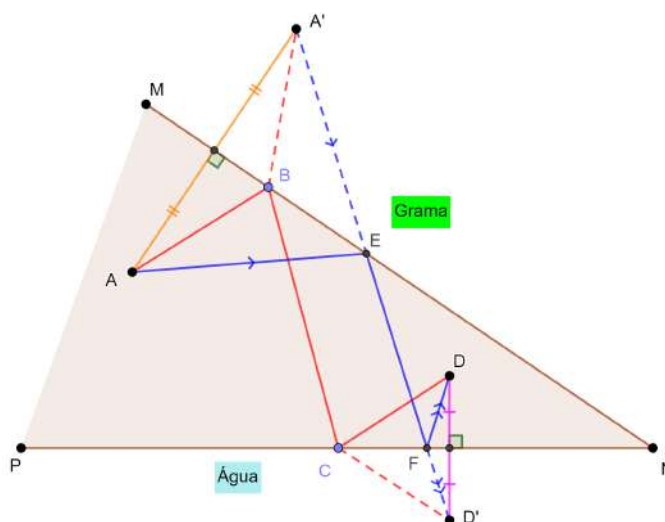


Figura 12: Resolução do problema do cavaleiro. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Pela reflexão vale  $AB = A'B$ ,  $AE = A'E$ ,  $DC = D'C$  e  $DF = D'F$ . Adicionalmente, pela aplicação da desigualdade triangular nos  $\triangle A'BC$  e  $\triangle A'CD'$  obtêm-se:

$$A'B + BC \geq A'C,$$

$$A'C + CD' \geq A'D'.$$

Considerando as duas desigualdades anteriores segue:

$$A'B + BC + CD' \geq A'C + CD' \geq A'D'.$$

Portanto, para quaisquer pontos  $B \in MN$  e  $C \in PN$  é válido que:

$$AB + BC + CD = A'B + BC + CD' \geq A'D' = A'E + EF + FD' = AE + EF + FD.$$

### 3.4 Removedor de minas (jogo 4)

**Problema 4.** Um soldado tem que detectar minas em um área com a forma de um triângulo equilátero. O raio do seu detector é igual a metade da altura do triângulo. O soldado começa em um vértice. Determinar o caminho mais curto que o soldado deve seguir para garantir que toda a região seja checada.

A IMO (International Mathematical Olympiad, Olimpíada Internacional de Matemática) 1973 foi realizada na cidade de Moscou, capital da Rússia. O problema acima foi proposto por Dorde Dugosija da delegação da Iugoslávia (DJUKIC *et al*, 2011).

#### 3.4.1 Resolução do Problema 4

A Figura 13 mostra um triângulo equilátero  $ABC$ .  $M$ ,  $N$  e  $L$  são pontos médios dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ , respectivamente. Os arcos de circunferência  $\beta$  e  $\gamma$  têm raios iguais a metade da altura do

triângulo  $ABC$  e estão centrados em  $B$  e  $C$ , respectivamente.  $H$  é o ponto de interseção da altura  $LB$ , a base média  $MN$  e o arco de circunferência  $\beta$ .  $MN$  é paralela com  $AC$  e tangente a  $\beta$ .

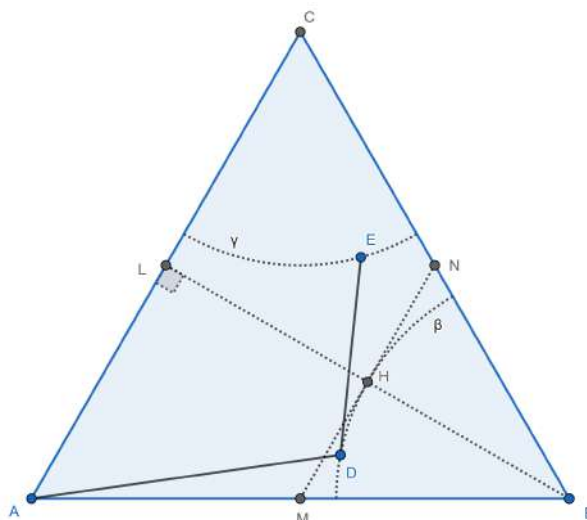


Figura 13: Os arcos de circunferência  $\beta$  e  $\gamma$  tem raios iguais a metade da altura do triângulo  $ABC$  e estão centrados em  $B$  e  $C$ , respectivamente. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Supondo que o soldado parta do vértice  $A$  ele deve chegar no mínimo a um ponto  $D \in \beta$  para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice  $B$ . Da mesma forma, o soldado deve alcançar um ponto  $E \in \gamma$  para verificar toda a área dentro do triângulo perto do vértice  $C$ . Logo, precisa-se minimizar a soma dos comprimentos dos segmentos  $AD$  e  $DE$ .

Seja  $l$  a medida dos lados do triângulo  $ABC$ , utilizando o Teorema de Pitágoras prova-se que  $LB = \frac{\sqrt{3}}{2}l$  e os raios de  $\beta$  e  $\gamma$  são:

$$LH = HB = CE = R = \frac{\sqrt{3}}{4}l.$$

Adicionam-se os segmentos  $CE$ ,  $CD$  e o ponto  $J$ , interseção de  $\gamma$  com  $CD$  (Figura 14). Pela desigualdade triangular aplicada no triângulo  $CDE$  tem-se:

$$CD \leq CE + DE.$$

Portanto, independentemente da posição do ponto  $E$ , encontra-se:

$$DE \geq CD - CE,$$

$$DE \geq CD - \frac{\sqrt{3}}{4}l. \quad (1)$$

Fixado  $D$ , a igualdade em (1) acontece quando o ponto  $E$  coincide com o ponto  $J$ . Adiciona-se o ponto  $C'$ , reflexão do ponto  $C$  em relação a semirreta  $MN$ . Nota-se que  $CC' = LB$ . Também são construídos os segmentos  $AC'$  e  $C'D$  (Figura 14).

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo  $ACC'$ , retângulo em  $C$ , encontra-se que:

$$AC' = \sqrt{AC^2 + (CC')^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2},$$

$$AC' = \frac{\sqrt{7}}{2}l.$$

Agora utiliza-se a desigualdade triangular no triângulo  $ADC'$  :

$$AC' \leq AD + DC'.$$

A igualdade acontece quando o ponto  $D$  é colinear com os pontos  $A$  e  $C'$ . Segue que independentemente da posição do ponto  $D$  tem-se:

$$AD \geq AC' - DC',$$

$$AD \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC'.$$

Sendo o ponto  $P$  a interseção das retas  $CD$  e  $MN$  segue que  $CP = PC'$ , pois  $P$  está na reta de reflexão (Figura 14). Pela desigualdade triangular aplicada no triângulo  $DPC'$  tem-se:

$$DC' \leq DP + PC' = DP + PC = DC.$$

A igualdade acontece quando o ponto  $P$  é colinear com os pontos  $D$  e  $C'$ .

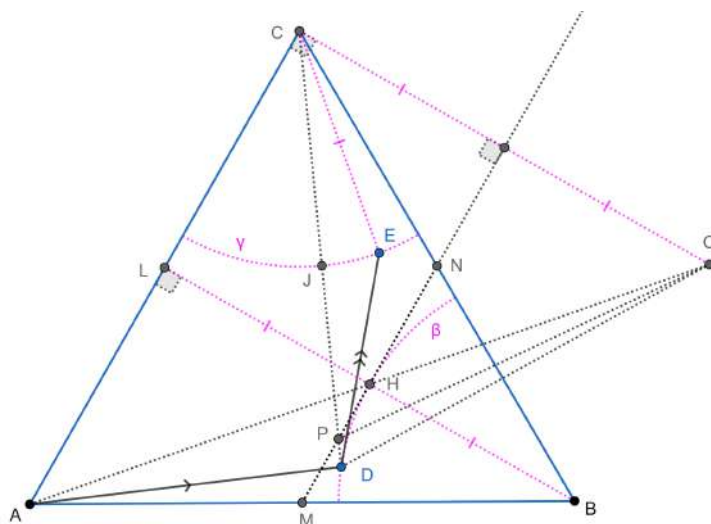


Figura 14: Problema do soldado removedor de minas. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Logo,

$$AD \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC' \geq \frac{\sqrt{7}}{2}l - DC. \tag{2}$$

A igualdade em (2) acontece quando  $D = P = H$ . Somando as desigualdades (1) e (2) encontra-se:

$$AD + DE \geq \left( \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) l. \quad (3)$$

Ou seja, o valor mínimo da soma  $AD + DE$ , igualdade em (3), acontece quando  $D = H$  e  $E = CH \cap \gamma$ .

### 3.5 Problema da faixa de pedestres (jogo 5)

**Problema 5.** Uma pessoa deve deslocar-se do ponto  $P$  até o ponto  $Q$  pela poligonal  $PXYQ$  (Figura 15). O segmento  $XY$  representa uma faixa de pedestres colocada perpendicularmente aos segmentos  $AB$  e  $CD$  e que atravessa uma avenida perigosa. Como escolher o ponto  $X \in CD$  de tal forma que a poligonal  $PXYQ$  tenha comprimento mínimo?

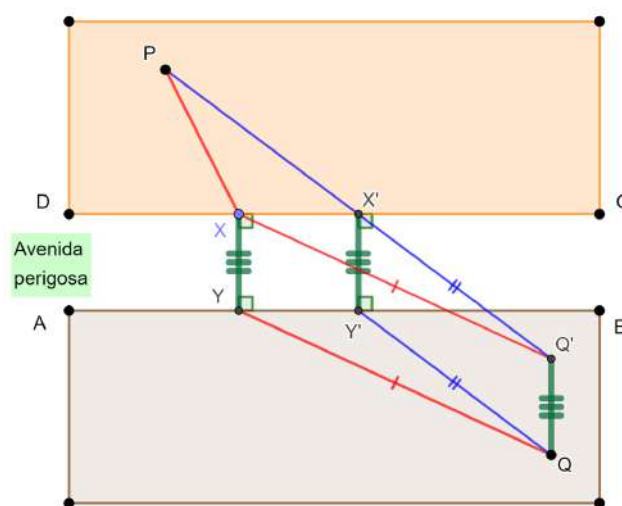


Figura 15: Resolução do problema da faixa de pedestres. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

#### 3.5.1 Resolução do Problema 5

O comprimento do segmento  $XY$  não depende da posição de  $X \in CD$ . Isto é, essa distância não pode ser minimizada e será “eliminada” com uma construção geométrica. Coloca-se o ponto  $Q'$  de tal forma que  $XYQ'Q$  seja um paralelogramo (Figura 15). Consequentemente,  $XY = Q'Q$  e  $XQ' = YQ$ . Seja  $X' \in CD$  colinear com  $P$  e  $Q'$ . Pela desigualdade triangular aplicada no  $\triangle PXQ'$  vale que:

$$PX + XQ' = PX + YQ \geq PQ' = PX' + X'Q'.$$

Mas  $X'Y'Q'Q$  também é um paralelogramo e vale que  $X'Y' = Q'Q$  e  $X'Q' = Y'Q$ . Com isso,

$$PX + YQ \geq PX' + Y'Q,$$

$$PX + XY + YQ \geq PX' + X'Y' + Y'Q.$$

Isto é, a posição do ponto  $X$  que minimiza o comprimento da poligonal  $PXYQ$  encontra-se quando  $X$  é colinear com  $P$  e  $Q'$  (ponto  $X'$ ).

### 3.6 Rio traiçoeiro (jogo 6)

**Problema 6.** Uma pessoa deve deslocar-se do ponto  $P$  até o ponto  $Q$  pela poligonal  $PABCDQ$  (Figura 16). Os segmentos  $AB$  e  $CD$  representam pontes construídas perpendicularmente aos lados dos retângulos e que atravessam um rio traiçoeiro. Como escolher os pontos  $A \in MN$  e  $C \in RS$  de tal forma que a poligonal  $PABCDQ$  tenha comprimento mínimo?

#### 3.6.1 Resolução do Problema 6

Os comprimentos dos segmentos  $AB$  e  $CD$  não dependem da posição de  $A$  e  $C$ . Construções auxiliares podem ser feitas para zerar essas distâncias (Figura 16). Para isso, primeiro, traça-se por  $Q$  uma paralela a  $CD$  e marca-se um ponto  $Q'$ , acima de  $Q$ , tal que  $CD = QQ'$ . Segundo, traça-se por  $Q'$  uma paralela a  $AB$  e marca-se um ponto  $Q''$ , a esquerda de  $Q'$ , tal que  $AB = Q''Q'$ .

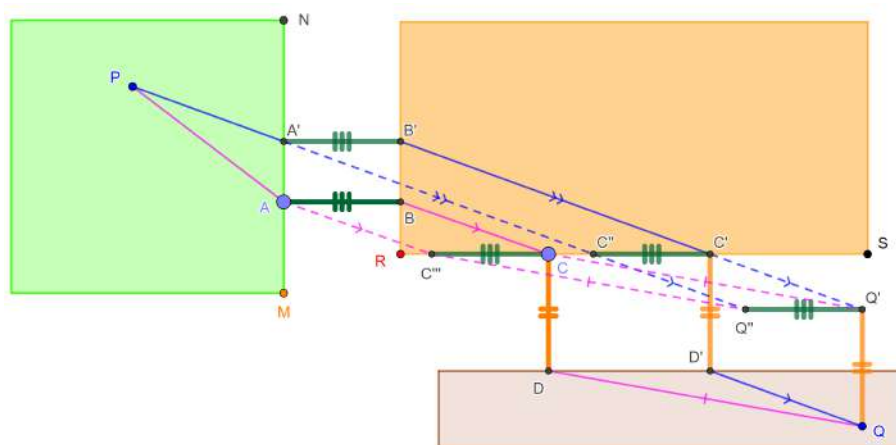


Figura 16: Resolução do problema rio traiçoeiro. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Marcam-se os pontos  $A' = PQ'' \cap MN$  e  $C'' = PQ'' \cap RS$ . Colocam-se os pontos  $C'$  e  $C'''$  de tal forma que  $Q'Q''C''C'$  e  $CBAC'''$ , nessa ordem, sejam paralelogramos. O ponto  $D'$  é representado de modo que o quadrilátero  $C'CDD'$  seja um retângulo. Ou seja,

$$C''Q'' = C'Q' = D'Q,$$

$$C'''Q'' = CQ' = DQ.$$

Para todo  $A \in MN$  e  $C \in RS$  (Figura 16), pela aplicação da desigualdade triangular nos  $\triangle AC'''Q''$  e  $\triangle PAQ''$  obtêm-se:

$$AQ'' \leq AC''' + C'''Q'',$$

$$PQ'' \leq PA + AQ''.$$

Utilizando as duas desigualdades anteriores encontra-se:

$$PQ'' \leq PA + AC''' + C'''Q''.$$

Ou seja, o comprimento do segmento  $PQ'' = PA'C''Q''$  é menor ou igual a poligonal  $PAC'''Q''$ . Segue que:

$$PA' + A'C'' + C''Q'' \leq PA + AC''' + C'''Q'',$$



$$PA' + B'C' + D'Q \leq PA + BC + DQ.$$

Na desigualdade anterior adiciona-se  $A'B' + C'D'$  no lado esquerdo e  $AB + CD = A'B' + C'D'$  no direito:

$$PA' + A'B' + B'C' + C'D' + D'Q \leq PA + AB + BC + CD + DQ,$$

$$PA'B'C'D'Q \leq PABCDQ.$$

Em palavras, a poligonal  $PABCDQ$  de comprimento mínimo acontece quando  $A = A'$  e  $C = C'$ .

### 3.7 Ponto de Fermat (jogo 7)

**Problema 7.** Encontrar o ponto  $P$ , no interior do  $\triangle ABC$ , que minimiza a soma  $AP + BP + CP$ .

Serão discutidos dois casos: o primeiro quando todos os ângulos internos do triângulo são menores que  $120^\circ$  e o segundo quando um dos ângulo é maior ou igual a  $120^\circ$ .

#### 3.7.1 Todos os ângulos internos do $\triangle ABC$ são menores que $120^\circ$ .

Seja  $P$  um ponto arbitrário no interior do  $\triangle ABC$ . É construído o  $\triangle AQ_B B'$  com uma rotação de  $60^\circ$  no sentido anti-horário, com centro em  $A$ , do  $\triangle APC$ . Adicionalmente, constrói-se o  $\triangle BQ_A A'$  com uma rotação de  $60^\circ$  no sentido horário, com centro em  $B$ , do  $\triangle BPC$ . Também é construído o  $\triangle AQ_C C'$  com uma rotação de  $60^\circ$  no sentido horário, com centro em  $A$ , do  $\triangle APB$  (Figura 17).

Obtêm-se, por construção, que  $\triangle AQ_B B' \equiv \triangle APC$ ,  $\triangle BQ_A A' \equiv \triangle BPC$  e  $\triangle AQ_C C' \equiv \triangle APB$ . Adicionalmente, os triângulos  $ACB'$ ,  $BCA'$ ,  $ABC'$ ,  $APQ_B$ ,  $BPQ_A$  e  $APQ_C$  são equiláteros.

Tem-se  $\angle BAB' = \angle C'AC$ ,  $BA = C'A$  e  $AB' = AC$ . Pelo critério de congruência LAL encontra-se  $\triangle BAB' \equiv \triangle C'AC$  e  $BB' = CC'$ . Analogamente mostra-se que  $\triangle ABA' \equiv \triangle C'BC$  e  $BB' = CC' = AA'$ .

Pela desigualdade triangular o comprimento da poligonal  $CPQ_C C'$  é maior ou igual ao comprimento do segmento  $CC'$  e o comprimento da poligonal  $BPQ_B B'$  é maior ou igual ao comprimento do segmento  $BB'$ . Isto é,

$$CP + PA + PB = CP + PQ_C + Q_C C' \geq CC',$$

$$BP + PA + PC = BP + PQ_B + Q_B B' \geq BB'.$$

As igualdades (mínimo de  $AP + BP + CP$ ) acontecem quando os pontos  $C$ ,  $P$ ,  $Q_C$  e  $C'$  e os pontos  $B'$ ,  $Q_B$ ,  $P$  e  $B$  são colineares. Isto é, quando  $P = F = CC' \cap BB'$ .

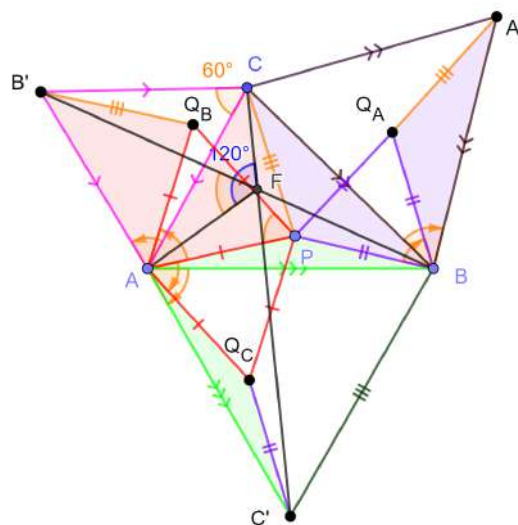


Figura 17: Construção geométrica para o caso em que todos os ângulos internos do  $\triangle ABC$  são menores que  $120^\circ$ . A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

No caso  $P = F$  tem-se  $Q_B \in BB'$  e vale  $\angle B'FA = \angle Q_BFA = \angle B'CA = 60^\circ$ . Ou seja,  $F$  é concíclico com  $A, B'$  e  $C$  e  $\angle AFC = 120^\circ$ . Analogamente mostra-se que  $\angle AFB = \angle BFC = 120^\circ$ .

Para ganhar o jogo 7 neste caso basta construir dois triângulos equiláteros externamente aos lados. Por exemplo, o  $\triangle ABC'$  e o  $\triangle ACB'$ . A seguir estender dois barbantes  $BB'$  e  $CC'$ . A posição do ponto  $P$  que minimiza a soma das distâncias aos vértices encontra-se em  $F = CC' \cap BB'$ .

### 3.7.2 Caso do $\triangle ABC$ com $\angle BAC \geq 120^\circ$ .

Num  $\triangle ABC$  com ângulo interno  $\angle BAC \geq 120^\circ$  o ponto que minimiza as somas das distâncias aos vértices (Ponto de Fermat) é o ponto  $A$ .

Seja  $P$  um ponto do interior do  $\triangle ABC$ . Construimos o  $\triangle AP'C'$  por uma rotação do  $\triangle APC$  em torno ao vértice  $A$  e de tal forma que  $B, A$  e  $C'$  sejam colineares (Figura 18).

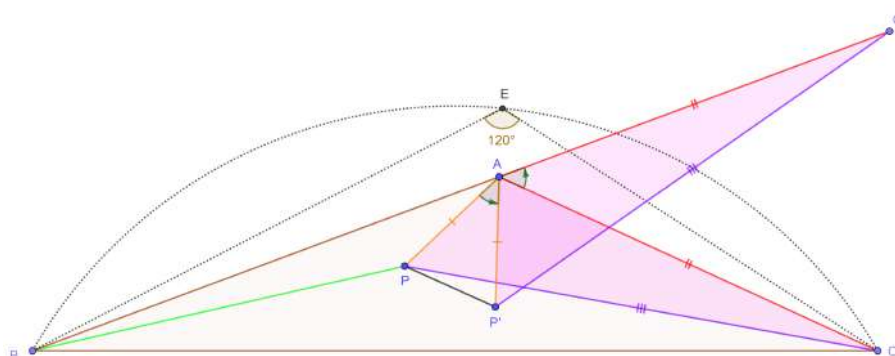


Figura 18: Construção geométrica para o caso em que  $\angle BAC \geq 120^\circ$ . A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

Como  $\angle BAC \geq 120^\circ$ , então  $\angle CAC' = \angle PAP' \leq 60^\circ$  e  $P'A = PA \geq PP'$ . Segue que:

$$PA + PB + PC \geq PP' + PB + P'C' = BP + PP' + P'C' = BPP'C'.$$

Pela desigualdade triangular a poligonal  $BPP'C'$  tem comprimento maior ou igual ao segmento  $BC'$ , logo

$$PA + PB + PC \geq BC' = AB + AC'.$$

Finalmente,  $AC = AC'$  e

$$PA + PB + PC \geq AB + AC.$$

Para ganhar o jogo 7 neste caso basta colocar o ponto  $P$  no vértice  $A$ .

### 3.8 Problema de Fagnano (jogo 8)

**Definição 3** (Triângulo Órtico). *Sejam os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  as projeções ortogonais dos vértices  $C$ ,  $A$  e  $B$  sobre os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. O  $\triangle DEF$  é o triângulo órtico do  $\triangle ABC$  (Figura 19).*

O triângulo órtico também pode ser definido como o triângulo pedal do ortocentro  $H$  de um  $\triangle ABC$ .

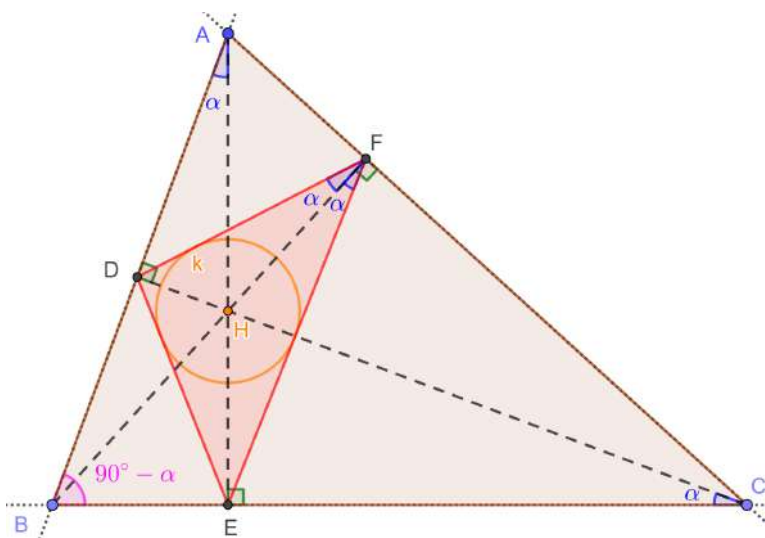


Figura 19: O incentro do triângulo órtico  $DEF$  coincide com o ortocentro do triângulo original  $ABC$ . A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

**Proposição 4.** *O incentro do triângulo órtico  $DEF$  coincide com o ortocentro do triângulo original  $ABC$  (Figura 19).*

*Demonstração.* Seja  $\angle BAE = \alpha$ . Como  $\angle AEB = 90^\circ$ , então  $\angle EBA = 90^\circ - \alpha$ . Do  $\triangle BDC$ , retângulo em  $D$ , segue que  $\angle BCD = \alpha$ .

Como  $\angle HFA = \angle HDA = 90^\circ$  o quadrilátero  $AFHD$  é inscritível. Logo,  $\angle DFH = \angle DAH = \alpha$ . Do mesmo modo, como  $\angle HEC = \angle HFC = 90^\circ$  o quadrilátero  $CFHE$  é inscritível. Logo,  $\angle EFH = \angle ECH = \alpha$ .

Segue que a reta  $HF$  é bissetriz do  $\angle DFE$ . Analogamente, mostra-se que as retas  $HD$  e  $HE$  são bissetrizes do  $\angle FDE$  e  $\angle DEF$ , respectivamente. Ou seja, o ponto  $H$  é o incentro do  $\triangle DEF$  e com centro nele pode ser esboçado o incírculo  $k$ .  $\square$

**Proposição 5** (Problema de Fagnano). *Entre todos os  $\triangle XYZ$  inscritos num triângulo acutângulo  $ABC$  o de perímetro mínimo é o órtico  $DEF$  (Figura 20).*

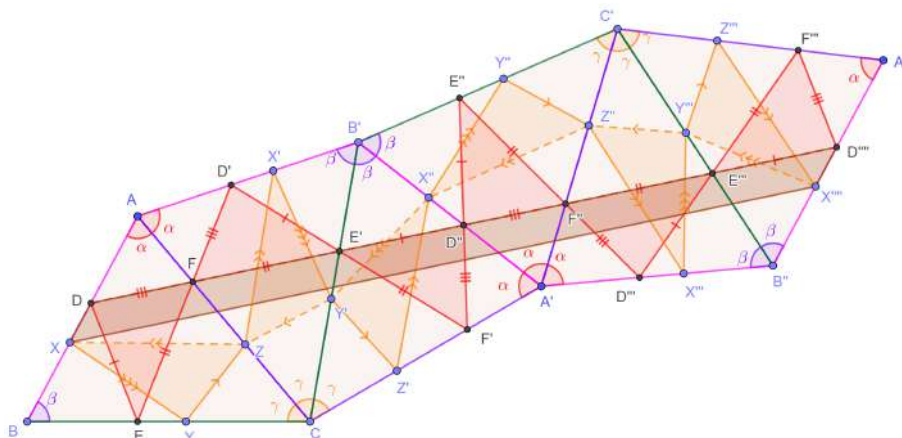


Figura 20: Demonstração do problema de Fagnano. A versão interativa está disponível no site GeoGebra (Juan..., c2022).

*Demonstração.* Como o  $\triangle DEF$  é órtico do  $\triangle ABC$ , viu-se na Proposição 4 que  $\angle DFB = \angle BFE$  (Figura 20). A mesma igualdade não acontece quando traçada uma normal a  $AC$  passando por  $Z \neq F$ . A reflexão de um ponto arbitrário  $P$  será denotada por  $P'$ .

É feita uma primeira reflexão em relação a reta  $AC$  dos triângulos  $ABC$ ,  $XYZ$  e  $DEF$ . Vale que  $DX = D'X'$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha$ . Nota-se ainda que  $\angle DFB = \angle E'FB'$  e com isso os pontos  $D$ ,  $F$  e  $E'$  são colineares. O mesmo não acontece com os pontos  $X$ ,  $Z$  e  $Y'$ .

A seguir é realizada uma segunda reflexão, desta vez em relação a reta  $B'C$ , dos triângulos  $AB'C$ ,  $X'Y'Z'$  e  $D'E'F'$ . Vale que  $DX = D'X' = D''X''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta$ . Os lados dos  $\triangle DEF$  e  $\triangle XYZ$  foram “esticados” nas poligonais  $DFE'D''$  e  $XZY'X''$ . Porém, neste estágio, ainda não fica evidente a comparação entre os comprimentos dessas duas poligonais. Os pontos iniciais e finais são diferentes.

Prossegue-se com uma terceira reflexão em relação a reta  $A'B'$  dos triângulos  $A'B'C$ ,  $X''Y''Z''$  e  $D''E''F''$ . Os pontos  $D''$  e  $X''$  e o lado  $A'B'$  são invariantes. Continua valendo que  $DX = D'X' = D''X''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta$ .

Continua-se com uma quarta reflexão em relação a reta  $A'C'$  dos triângulos  $A'B'C'$ ,  $X'''Y'''Z'''$  e  $D'''E'''F'''$ . Vale que  $DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z'''$  e o lado  $AB$  girou um ângulo  $2\alpha + 2\beta - 2\alpha$ .

Finaliza-se a construção com uma quinta reflexão em relação a reta  $B''C''$  dos triângulos  $A'B''C''$ ,  $X''''Y''''Z''''$  e  $D''''E''''F''''$ . Vale que:

$$DZ = D'Z' = D''Z'' = D'''Z''' = D''''Z''''$$

e o lado  $AB$  girou um ângulo

$$2\alpha + 2\beta - 2\alpha - 2\beta = 0.$$

Como  $AB \parallel A''B''$  e  $XD = X''''D''''$ , então o quadrilátero  $XD''''D''''X''''$  é um paralelogramo. Segue que  $DD'''' = XX''''$ . O anterior permite comparar o comprimento do segmento  $DD''''$ , equivalente ao dobro do perímetro do  $\triangle DEF$ , com a poligonal  $XZY'X''Z''Y''X'''Z'''Y'''X''''Z''''$ , equivalente a duas vezes o perímetro do  $\triangle XYZ$ . Pela aplicação da desigualdade triangular o perímetro do triângulo órtico é o mínimo possível.  $\square$



Para ganhar o jogo 8 basta colocar os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  nas posições dos pés das alturas do  $\triangle ABC$ . Isto é,  $X = D$ ,  $Y = E$  e  $Z = F$ .

## 4 Comentários finais

Foram apresentados e discutidos em detalhe oito jogos envolvendo a desigualdade triangular. Todos os links das figuras são disponibilizados de forma interativa no site do GeoGebra.

O professor de Matemática pode convidar seus pares das áreas de Computação e Educação Física para executar os desafios como projeto multidisciplinar. Os problemas poderiam ser implementados no laboratório de informática, nas salas de aula e na quadra de esporte.

Até o momento os resultados dos testes das atividades propostas neste artigo com estudantes do ensino médio não estão disponíveis. Mas tiveram boa receptividade entre os professores do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra”. Alguns deles já utilizam parcialmente os mesmos em salas de aula.

## 5 Bibliografia

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011.

GAY, D. **Geometry by discovery**. New York: Wiley, 1997.

JUAN López Linares. *In*: GeoGebra. Linz: GeoGebra, c2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vsfydv2v#chapter/623455>. Acesso em: 15 nov. 2022.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas - implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1992.

LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 22, n. 1, p. 27-47, jul. 2022. DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 15 nov. 2022.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 20, p. 22–40, jul. 2021a. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmfsafj2240. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 15 nov. 2022.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021b. DOI: 10.21167/cqdv21202123169664jlljpmfsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 15 nov. 2022.



---

RODRIGUES, A. R. Napoleão e as “revoluções” no plano euclidiano. **É Matemática, Oxente!** v. 1, n. 11, p. 1-9, 2019. Disponível em: <http://ematematicaoxente.com.br>. Acesso em: 15 nov. 2022.

SAVI, R.; ULBRICHT, V. R. Jogos digitais educacionais: benefícios e desafios. **Renote**, v. 6, n. 1, 2008. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14405>. Acesso em: 15 nov. 2022.

SOUZA, D. M. **Uso de transformações geométricas na revigoração do ensino de geometria plana**. 2014. 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: [https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/demetrius\\_melo\\_souza.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/demetrius_melo_souza.pdf). Acesso em: 15 nov. 2022.