Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022

Vitor Henrique Lopes Gusson
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Univesidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
vitor.gusson@unesp.br

Claudio Gomes Pessoa
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Univesidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
c.pessoa@unesp.br

Cotas superiores para o número de zeros de uma combinação linear de funções via Teoria de Chebyshev

Upper bounds for the number of zeros of a linear combination of functions via Chebyshev Theory

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria de Sistemas de Chebyshev clássica e com acurácia. Para isto, reunimos os principais resultados e caracterizamos cada classe de sistemas de Chebyshev a partir do número máximo de zeros de uma combinação linear. Um dos principais resultados sobre sistemas de Chebyshev com acurácia relaciona a existência de uma cota superior para o número máximo de zeros isolados de uma combinação linear de funções com os zeros dos Wronskianos das funções deste conjunto. Aqui, demonstramos um resultado que melhora esta cota superior. Por fim, exibimos alguns exemplos e uma demonstração alternativa direta do Teorema Fundamental da Álgebra via teoria de sistemas de Chebyshev. Este trabalho faz parte da dissertação de mestrado do primeiro autor, orientado pelo segundo autor.

Palavras-chave: Teoria de Chebyshev. Teoria de Chebyshev com Acurácia. Número de Zeros de Funções.

Abstract

We aim to present the classic and current, with accuracy, Chebyshev Systems Theory. For this, we collected the main results and characterize each of these classes of systems from the maximum number of zeros of a linear combination. One of the main results about Chebyshev systems with accuracy relates the existence of an upper bound to the maximum number of isolated zeros of a linear combination of functions to the simple zeros of the wronskians of the functions of this set. Here, we proof an improvement in this upper bound. Finally, we show some examples and an alternative proof of the Fundamental Theorem of Algebra by Chebyshev systems theory. This work is part of the master dissertation of the first author under supervision of the second author,

Keywords: Chebyshev Theory. Chebyshev Theory with Accuracy. Number of Zeros of Functions.

Artigo recebido em ago. 2022 e aceito em dez. 2022

1 Introdução

A teoria de espaços e sistemas de Chebyshev (ou “Tchebycheff”) teve início a partir de problemas de interpolação, cuja intenção era aproximar, de maneira ótima, certas funções, em geral não suficientemente suaves, tal que a aproximação por polinômios apresentava erros não desejáveis (NÜRNBERGER, 1989). Na verdade, em intervalos grandes, os polinômios, mesmo possuindo boas propriedades em relação aos seus zeros, não apresentam flexibilidade o suficiente para aproximar uma dada função. Uma maneira de melhorar, ao menos um pouco, tal problema, é subdividir o intervalo em questão e usar polinômios em cada um individualmente, mantendo a ótima estrutura que polinômios apresentam, principalmente em relação ao controle de zeros de uma função polinomial. No entanto, há um espaço de funções em que seus elementos possuem uma estrutura boa e propriedades desejáveis, quando relacionado à problemas de interpolação em pontos arbitrários de um certo intervalo. Tais espaços são conhecidos por espaços de Chebyshev e uma base para tal espaço é chamada de sistema de Chebyshev ou, apenas, sistema T.

Sistemas de Chebyshev são utilizados em vários ramos e aplicações da matemática como, em análise numérica, na teoria de aproximações, em problemas de valores de fronteira e problemas envolvendo propriedades oscilatórias de zeros de soluções de equações diferenciais (KARLIN; STUDDEN, [1966]). Os principais usos da teoria de Chebyshev, atualmente, estão relacionados a resultados que versam sobre a quantidade de zeros que uma função, escrita como combinação linear de outras, possui. Na teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias, por exemplo, os sistemas de Chebyshev são utilizados no estudo do número de ciclos limites de um campo vetorial planar, por fornecer resultados sobre o número de zeros da chamada função deslocamento, os quais correspondem a ciclos limites do sistema diferencial associado. Tal aplicação está relacionada ao 16º Problema de Hilbert (MAÑOSAS; VILLADELPRAT, 2011).

Aqui, vamos lidar com a Teoria de Chebyshev clássica (KARLIN; STUDDEN, [1966], NÜRNBERGER, 1989) e atual, com acurácia (NOVAES; TORREGROSA, 2017), apresentando os principais resultados sobre a caracterização de tais sistemas a partir do número de zeros de uma combinação linear de funções em um certo conjunto.

Uma destas caracterizações afirma que dado um conjunto de funções $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ suficientemente diferenciáveis em um intervalo $[a, b]$, qualquer combinação linear não trivial $\sum_{i=0}^{k} a_i g_i$, dos subconjuntos $\{g_0, \ldots, g_k\}$, com $k \leq n$, possui, no máximo, k zeros, contando suas multiplicidades, se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$ os Wronskianos, definidos como

$$W(g_0, g_1, \ldots, g_k)(t) = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \cdots & g_k(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \cdots & g_k^{(1)}(t) \\ g_0^{(2)}(t) & g_1^{(2)}(t) & \cdots & g_k^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(k)}(t) & g_1^{(k)}(t) & \cdots & g_k^{(k)}(t) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

em que $g_j^{(q)}(t)$ denota a derivada de ordem q de $g_j(t)$, com $j = 0, 1, \ldots, k$ e $q = 1, 2, \ldots, k$, não se anulam em $[a, b]$. A teoria atual de Chebyshev com acurácia, ao contrário da clássica, permite que tais Wronskianos possuam zeros simples e, nestes casos, fornece resultados sobre a estimativa do número de zeros de uma combinação linear de funções e sobre as possibilidades de realização desta estimativa, ou seja, quando que uma combinação linear possui, exatamente, a quantidade de zeros dada pela estimativa.

Até então, o melhor resultado conhecido era encontrado no artigo de Novaes e Torregrosa (2017), o qual afirma que dado um conjunto de funções analíticas no intervalo $[a, b]$, tal que o Wronskiano $W_i = W(g_0, \dots, g_i)$ possui v_i zeros simples, para $i = 0, 1, \dots, n$, então o número de zeros isolados de toda combinação linear não trivial, $g = \sum_0^n a_i g_i$, é no máximo

$$n + v_n + v_{n-1} + 2\big(v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0\big) + \mu_3 + \cdots + \mu_{n-1}, \tag{2}$$

em que $\mu_r = min(2v_r, v_0 + \cdots + v_{r-3})$, para cada $r = 3, \dots, n-1$. Neste artigo, mostramos o seguinte teorema, o qual fornece uma cota superior melhor que a do trabalho de Novaes e Torregrosa (2017) para o número de zeros de uma dada combinação linear de funções.

Teorema 1 *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n$ funções analíticas no intervalo $[a, b]$. Suponha que todos os v_i's zeros do Wronskiano $W_i = W(g_0, \dots, g_i)$, para $i = 0, 1 \dots, n$, são simples. Então, o número de zeros isolados de toda combinação linear não trivial, $g = \sum_0^n a_i g_i$, é no máximo*

$$n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1}, \tag{3}$$

em que $\mu_r = min(v_r, v_0 + \cdots + v_{r-2})$, para cada $r = 2, 3, \dots, n-1$.

Este artigo é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos as principais definições e resultados da teoria clássica de sistemas de Chebyshev. Dedicamos a Seção 3 para a introdução da teoria atual de sistemas de Chebyshev com acurácia e demonstramos o Teorema 1, o qual é uma melhora dos resultados encontrados na literatura.

2 Teoria clássica de sistemas de Chebyshev

2.1 Sistemas de Chebyshev

O método de interpolação é a maneira usual para aproximar funções, num certo intervalo, por outras mais simples e que coincidam em certos pontos. Os espaços de Chebyshev, em particular, possuem a propriedade de que as interpolações de Lagrange e Hermite são sempre possíveis para uma escolha arbitrária de pontos e, ainda, que tal aproximação é a melhor possível (NÜRNBERGER, 1989).

Definição 1 *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $G \subset C[a, b]$ ($C[a, b]$ denota o espaço de funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$) um subespaço de dimensão $n+1$, $f \in C[a, b]$ e $n+1$ pontos $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$. O problema de interpolação de Lagrange é determinar uma função $g \in G$ tal que $g(t_j) = f(t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Veja que, caso $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ seja uma base do subespaço G, então $g(t_j) = \sum_{i=0}^n a_i \; g_i(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, para certos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Portanto, a interpolação e Lagrange se resume em obter tais coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ de modo que $\sum_{i=0}^n a_i \; g_i(t_j) = f(t_j)$. Ou seja, é equivalente a resolver o seguinte sistema linear nas variáveis $a_i\,'s$,

$$\begin{pmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Considerando o determinante

$$D\begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(t_0) & g_1(t_0) & \cdots & g_n(t_0) \\ g_0(t_1) & g_1(t_1) & \cdots & g_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(t_n) & g_1(t_n) & \cdots & g_n(t_n) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

então o sistema (4) possui solução única se, e somente se, $D\begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0$.

Definição 2 *Um espaço $G \subset C[a,b]$, de dimensão $n+1$, é chamado espaço de Chebyshev*[1] *se existe uma base $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de G tal que $D\begin{pmatrix} g_0, g_1, \dots, g_n \\ t_0, t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} \neq 0$, $\forall\ a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$ em $[a,b]$. Tal base é denominada sistema de Chebyshev ou, simplesmente, sistema T.*

Sendo assim, dizemos, simplesmente, que um conjunto $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ de funções contínuas, definidas em um intervalo, é um *sistema T* se o determinante (5) é não nulo. Pois, neste caso, o conjunto $\{g_i\}_0^n$ é *LI* e gera um espaço de dimensão $n+1$.

Como veremos, os principais resultados da Teoria de Chebyshev, aqui exibidos, concentram-se na caracterização dos sistemas de Chebyshev a partir da quantidade de zeros, contando ou não suas multiplicidades, que uma função pertencente ao espaço gerado por tal conjunto possui. Portanto, a menos de menção, não estamos interessados em espaços de Chebyshev, mas sim em sua base.

Como mencionado, em espaços de Chebyshev, temos a unicidade de soluções do problema de interpolação de Lagrange.

Teorema 2 (NURNBERGER, 1989) *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a,b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T se, e somente se, para toda função $f \in C[a,b]$ e todas as escolhas de pontos $t_0, t_1, \dots, t_n$ distintos em $[a,b]$, o problema de interpolação de Lagrange tem solução única no espaço gerado pelas funções $\{g_i\}_0^n$.*

O resultado a seguir, fornece uma interessante caracterização dos sistemas de Chebyshev. Muitas vezes, tal resultado é usado como definição para *sistema T*.

Teorema 3 (KARLIN; STUDDEN, [1966]) *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a,b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T se, e somente se, toda combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, isto é, com $\sum_0^n a_i^2 \neq 0$, tem no máximo n zeros distintos em $[a,b]$.*

2.2 Sistemas estendidos de Chebyshev

Dada uma função diferenciável, a interpolação de Hermite é conhecida por interpolar, também, algumas de suas derivadas. E isto está relacionado a uma escolha de pontos que permite repetições, ao contrário da interpolação de Lagrange.

Assim como a interpolação de Lagrange é única e sempre possível em espaços gerados por sistemas de Chebyshev, era desejado, no desenvolvimento da teoria, que para a interpolação de Hermite isto também ocorresse. Mas, para isto, é necessário definir um espaço diferente a partir de um outro conjunto de funções, o qual chamaremos de sistema estendido de Chebyshev. Além disto, uma vez que a interpolação de Lagrange é um caso particular de Hermite quando não existem repetições de pontos, esta nova classe de sistemas representa uma extensão da apresentada anteriormente.

[1] Também chamado de *espaço de Haar* no início do desenvolvimento da teoria.

Definição 3 *Sejam $G \subset C^n[a,b]$, f uma função de classe C^n definida no intervalo $[a,b]$ e pontos $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq b$. Para $j = 0, 1, \ldots, n$, tomemos $d_j = max\{q : t_j = \cdots = t_{j-q}\}$, para $0 \leq q \leq j$. O problema de interpolação de Hermite consiste em determinar uma função $g \in G$ tal que $g^{(d_j)}(t_j) = f^{(d_j)}(t_j)$, isto é, quando as funções g e f e suas derivadas de ordem d_j são iguais nos pontos t_j.*

Uma outra maneira equivalente de expressar essa definição é a seguinte. Dados os pontos $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq b$, existem pontos $s_0 < s_1 < \cdots < s_p$, tais que $\{s_0, s_1, \ldots, s_p\} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, s_r aparece m_r vezes em $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $r = 0, 1, \ldots, p$, e $\sum_{r=0}^{p} m_r = n + 1$. Daí, o problema de Hermite se resume a determinar uma função $g \in G$ tal que $g^{(q)}(s_r) = f^{(q)}(s_r)$, para $q = 0, 1, \ldots, m_r - 1$, e $r = 0, 1, \ldots, p$.

Se $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ for uma base de G, então dado um elemento $g \in G$, escrevemos $g(t_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, g_i(t_j)$. Usando a notação acima, podemos reescrever como $g(s_r) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, g_i(s_r)$, para todo valor $s_r \in \{s_0, s_1, \ldots, s_p\}$. Daí, o problema de interpolação de Hermite é equivalente a obter os coeficientes a_i's tal que $\sum_{i=0}^{n} a_i\, g_i^{(q)}(s_r) = f^{(q)}(s_r)$. Ou seja, encontrar a solução do seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} g_0(s_0) & g_1(s_0) & \cdots & g_n(s_0) \\ g_0^{(1)}(s_0) & g_1^{(1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(1)}(s_0) \\ g_0^{(2)}(s_0) & g_1^{(2)}(s_0) & \cdots & g_n^{(2)}(s_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_0-1)}(s_0) & g_1^{(m_0-1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(m_0-1)}(s_0) \\ g_0(s_1) & g_1(s_1) & \cdots & g_n(s_1) \\ g_0^{(1)}(s_1) & g_1^{(1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(1)}(s_1) \\ g_0^{(2)}(s_1) & g_1^{(2)}(s_1) & \cdots & g_n^{(2)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_1-1)}(s_1) & g_1^{(m_1-1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(m_p-1)}(s_p) & g_1^{(m_p-1)}(s_p) & \cdots & g_n^{(m_p-1)}(s_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_0) \\ f^{(1)}(s_0) \\ f^{(2)}(s_0) \\ \vdots \\ f^{(m_0-1)}(s_0) \\ f(s_1) \\ f^{(1)}(s_1) \\ f^{(2)}(s_1) \\ \vdots \\ f^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots \\ f^{(m_p-1)}(s_p) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

o qual possui solução única se, e somente se,

$$D^*\begin{pmatrix} g_0, g_1, \ldots, g_n \\ t_0, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} g_0(s_0) & g_1(s_0) & \cdots & g_n(s_0) \\ g_0^{(1)}(s_0) & g_1^{(1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(1)}(s_0) \\ g_0^{(2)}(s_0) & g_1^{(2)}(s_0) & \cdots & g_n^{(2)}(s_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_0-1)}(s_0) & g_1^{(m_0-1)}(s_0) & \cdots & g_n^{(m_0-1)}(s_0) \\ g_0(s_1) & g_1(s_1) & \cdots & g_n(s_1) \\ g_0^{(1)}(s_1) & g_1^{(1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(1)}(s_1) \\ g_0^{(2)}(s_1) & g_1^{(2)}(s_1) & \cdots & g_n^{(2)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(m_1-1)}(s_1) & g_1^{(m_1-1)}(s_1) & \cdots & g_n^{(m_1-1)}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0^{(m_p-1)}(s_p) & g_1^{(m_p-1)}(s_p) & \cdots & g_n^{(m_p-1)}(s_p) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7)$$

No caso em que os $n+1$ pontos tomados são iguais, isto é, $t = t_0 = t_1 = \cdots = t_n$, o determinante em (7) nada mais é que o Wronskiano das funções $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$, o qual denotamos por (1).

Definição 4 *Um espaço $G \subset C^n[a,b]$, de dimensão $n+1$, é chamado espaço estendido de Chebyshev se existe uma base $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ de G com $W(g_0, \ldots, g_n)(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$. Chama-se sistema estendido de Chebyshev ou, apenas, sistema ET, uma base de tal espaço.*

Assim como para espaços de Chebyshev e sistemas T, também podemos caracterizar os espaços estendidos de Chebyshev e sistemas ET a partir da unicidade de interpolação e zeros de uma dada combinação linear.

Definição 5 *Seja $f \in C^k[a,b]$. Dizemos que $t \in [a,b]$ é um zero de multiplicidade k se $f^{(q)}(t) = 0$, para $q = 0, 1, \ldots, k-1$.*

Teorema 4 (NURNBERGER, 1989) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^n[a,b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET se, e só se, para qualquer função $f \in C^n[a,b]$ e qualquer t em $[a,b]$, a solução do problema de interpolação de Hermite é única no espaço gerado pelas funções $\{g_i\}_0^n$.*

Teorema 5 (KARLIN; STUDDEN, [1966]) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^n[a,b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ET se, e somente se, toda combinação linear não trivial $g = \sum_{i=0}^n a_i\, g_i$ tem no máximo n zeros, contando suas multiplicidades.*

2.3 Sistemas completo e completo estendido de Chebyshev

Definição 6 *Um espaço $G \subset C^n[a,b]$, de dimensão $n+1$, é dito espaço completo de Chebyshev se existe uma base $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ de G tal que para todo $k = 0, 1, \ldots, n$, $span(g_0, g_1, \ldots, g_k)$ (isto é, o espaço gerado pelas funções $\{g_j\}_0^k$) é um espaço de Chebyshev. Além disso, se $span(g_0, g_1, \ldots, g_k)$ for um espaço estendido de Chebyshev, então G é chamado espaço completo estendido de Chebyshev. Tal base é chamada de sistema completo de Chebyshev ou, apenas, sistema CT no primeiro caso e por sistema completo estendido de Chebyshev, ou sistema ECT, no segundo.*

Uma vez que estamos interessados nas bases de tais espaços de Chebyshev, dizemos, simplesmente, que um conjunto $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$, de funções suficientemente diferenciáveis, é um sistema CT se $\{g_0, g_1, \ldots, g_k\}$ for um sistema T, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Da mesma forma, tal conjunto é um sistema ECT se $\{g_0, g_1, \ldots, g_k\}$ for sistema ET, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

Assim como foi visto para sistemas T e ET, também é possível caracterizar sistemas CT e ECT a partir do número máximo de zeros, simples ou não, que combinações lineares não triviais de funções diferenciáveis podem ter.

Teorema 6 (KARLIN; STUDDEN, [1966]) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C[a,b]$. Então $\{g_i\}_0^n$ é um sistema CT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$, qualquer combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^{k} a_i g_i$, possui no máximo k zeros simples.*

Teorema 7 (KARLIN; STUDDEN, [1966]) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^n[a,b]$. Então $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$, qualquer combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^{k} a_i g_i$, possui no máximo k zeros, contando suas multiplicidades.*

As demonstrações dos teoremas acima seguem diretamente da definição de sistemas CT e ECT, junto aos Teoremas 3 e 5.

O resultado a seguir fornece uma caracterização de sistemas ECT a partir de Wronskianos. Esta caracterização, muitas vezes, é usada como definição para tais sistemas por seu uso recorrente em aplicações.

Teorema 8 (KARLIN; STUDDEN, [1966], NÜRNBERGER, 1989) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^n[a,b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$, e todo $t \in [a,b]$, temos $W_k(t) = W(g_0, g_1, \ldots, g_k)(t) \neq 0$.*

Em alguns casos, quando queremos já partir com um sistema ECT, podemos usar o próximo resultado, que mostra como construir um conjunto de funções, que é um sistema ECT, a partir de funções não nulas e diferenciáveis.

Teorema 9 (KARLIN; STUDDEN, [1966], NÜRNBERGER, 1989) *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^n[a,b]$ funções que satisfazem a condição $g_j^{(q)}(a) = 0$, para $q = 0, 1, \ldots, j-1$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. O conjunto $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, existirem funções auxiliares $w_i \in C^{n-i}[a,b]$, que nunca* *se anulam em $[a, b]$, de modo que podemos escrever as funções como*

$$\begin{aligned}
g_0(t) &= w_0(t),\\
g_1(t) &= w_0(t)\int_a^t w_1(y_1)\,dy_1,\\
g_2(t) &= w_0(t)\int_a^t w_1(y_1)\int_a^{y_1} w_2(y_2)\,dy_2dy_1,\\
&\vdots\\
g_n(t) &= w_0(t)\int_a^t w_1(y_1)\int_a^{y_1} w_2(y_2)\cdots\int_a^{y_{n-1}} w_n(y_n)\,dy_ndy_{n-1}\ldots dy_2dy_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Observação 1 *Caso a hipótese $g_j^{(q)}(a) = 0$ do teorema acima não seja satisfeita, ainda é possível construir, a partir de combinações lineares de $\{g_i\}_0^n$, um outro conjunto de funções $\{h_i\}_0^n$, de modo que $h_0 = g_0$, $h_1 = g_1 - \frac{g_1(a)}{g_0(a)}h_0$ e $h_j = g_j - \sum_{q=0}^{j-1} d_{qj}(a)h_q$, para $j = 2, 3, \ldots, n$ com $d_{qj}(a)$ coeficientes reais que são dados por combinações das funções g_i's e suas derivadas, o qual satisfaz as hipóteses necessárias e, ainda, preserva os Wronskianos.*

Até este momento, apresentamos os resultados que caracterizam sistemas T, ET, CT e ECT pelo número máximo de zeros que uma combinação linear não trivial de suas funções pode ter. Na realidade, ainda podemos dizer que sempre existe um elemento do espaço gerado pelas funções do sistema tendo, exatamente, esse número máximo de zeros isolados. Quando isto acontece, dizemos que a cota, isto é, o número máximo de zeros, é realizável. A proposição adiante, encontrada em Llibre e Świrszcz (2011) valida tal afirmação, uma vez que se $\{g_i\}_0^n$ é um sistema T, ET, CT ou ECT, então suas funções são linearmente independentes.

Proposição 1 *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C[a, b]$. Se tais funções são linearmente independentes, então existem pontos distintos $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \in [a, b]$ e constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todas nulas, tais que*

$$g(t_j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k g_k(t_j) = 0,$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

3 Teoria atual de sistemas estendidos de Chebyshev com acurácia e demonstração do Teorema 1

Como visto, sistemas de Chebyshev são completamente caracterizados a partir de determinantes não nulos. Para sistemas ET e ECT, os respectivos determinantes são definidos pelo Wronskiano. Vimos, ainda, que isto proporciona outra caracterização via número de zeros, simples ou não, que uma combinação linear não trivial das funções do sistema pode ter. Além disso, é sempre possível obter um elemento do espaço gerado que tem, precisamente, tal quantidade de zeros isolados, como mostra a Proposição 1.

Agora, considerando $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ um conjunto ordenado qualquer de funções suficientemente diferenciáveis, demonstramos nosso resultado que proporciona uma melhor cota superior para o número de zeros de elementos do espaço gerado pelas $n+1$ funções, quando alguns dos Wronskianos $W_k(t) = W(g_0, \ldots, g_k)(t)$, $k = 0, \ldots, n$, se anulam. Tratamos, ainda, da realização de todas as possíveis configurações de zeros de um sistema deste tipo.

Definição 7 *Sejam $g_0, g_1, \ldots, g_n \in C^r[a, b], r \geq n$. Diremos que o conjunto ordenado $\{g_i\}_0^n$ é um sistema estendido de Chebyshev com acurácia k se toda combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, possui no máximo $n + k$ zeros, contando suas multiplicidades, sendo $k \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que a condição acontece.*

Vamos, agora, demonstrar o Teorema 1. Mas, primeiramente, faremos algumas considerações. Este resultado é baseado nos trabalhos de Nadler e Yakovenko (1998), Novaes e Torregrosa (2017) e Novikov e Yakovenko (1996), em que os autores fornecem cotas distintas para o número de zeros de $g = \sum_0^n a_i g_i$. Em Novikov e Yakovenko (1996), uma cota é obtida assumindo a diferenciabilidade das funções g_i's e depois, em Nadler e Yakovenko (1998), outra cota é obtida, mas assumindo a analiticidade. O artigo de Novaes e Torregrosa (2017) traz uma combinação destes outros dois trabalhos mencionados e consegue exibir uma cota superior melhor que a dos artigos citados. Contudo, procedendo de maneira mais conveniente, é possível melhorar as estimativas mostradas nos últimos dois trabalhos mencionados, de 1998 e 2017. Desta maneira, foi possível estabelecer uma melhora na estimativa da cota superior destes trabalhos, a qual acreditamos ser a mais eficaz encontrada na literatura, até o presente momento.

Observamos, inicialmente, que todo elemento $g \in span(g_0, \ldots, g_n)$ satisfaz a seguinte fórmula, conhecida por Fórmula de Frobenius, encontrada em Pólya (1922),

$$\frac{W_{n-1}^2}{W_n W_{n-2}} \partial_t \frac{W_{n-2}^2}{W_{n-1} W_{n-3}} \partial_t \ldots \partial_t \frac{W_1^2}{W_2 W_0} \partial_t \frac{W_0^2}{W_1} \partial_t \frac{1}{W_0}\, g = k, \tag{9}$$

com k uma constante. Introduzindo o operador $\Delta_i = W_i^2 \partial_t (W_i)^{-1}$, isto é, $\Delta_i(\varphi) = W_i^2 \partial_t(\varphi / W_i)$, podemos reescrever a equação (9) como

$$\Delta_{n-1} \frac{1}{W_{n-3}} \Delta_{n-2} \frac{1}{W_{n-4}} \Delta_{n-3} \ldots \Delta_2 \frac{1}{W_0} \Delta_1 \Delta_0\, g = k W_n W_{n-2}. \tag{10}$$

Vamos assumir que $k \neq 0$, pois caso contrário a ordem da equação diferencial pode ser reduzida. Agora, construímos uma sequência de funções, tomando $F_0 = g$, $F_1 = \Delta_0 F_0$, $F_2 = \Delta_1 F_1$ e $F_j = \Delta_{j-1}(W_{j-3})^{-1} F_{j-1}$, para $j = 3, 4, \ldots, n$. Logo, a equação (10) é escrita como

$$F_n = k W_n W_{n-2}. \tag{11}$$

Note que, as funções F_0, F_1 e F_2 podem admitir apenas zeros nos seus intervalos de definição, enquanto as funções F_j, para $j \geq 3$, podem possuir tanto zeros quanto pólos. Aqui, para funções reais, pólos são assíntotas verticais. Sendo v_i o número de zeros de cada Wronskiano W_i, então o número máximo de pólos que F_j, $j \geq 3$, pode ter é $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-3}$

O artigo de Novikov e Yakovenko (1996) traz, como os autores se referem, uma modificação do Teorema de Rolle, dando uma estimativa para o número de zeros de uma função, a partir de sua aplicação em um operador diferencial, contando os zeros do Wronskiano associado e a quantidade de pólos. Mais precisamente, sendo $h \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave, exceto em uma quantidade finita p de pólos, então

$$N(h) \leq N(\Delta_i h) + v_i + p + 1, \tag{12}$$

em que $N(\cdot)$ indica a soma do número de zeros e pólos da função.

Aplicando a desigualdade (12) às funções F_i e observando que $N(F_k) \leq N\left((W_{k-2})^{-1}F_k\right)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, obtemos as seguintes estimativas de $N(\cdot)$ para as funções F_i,

$$\begin{aligned}
&N(F_0) \leq N(\Delta_0 F_0) + \nu_0 + 1,\\
&N(F_1) \leq N(\Delta_1 F_1) + \nu_1 + 1,\\
&N(F_2) \leq N(\Delta_2 (W_0)^{-1} F_2) + \nu_0 + \nu_2 + 1,\\
&N(F_3) \leq N(\Delta_3 (W_1)^{-1} F_3) + \nu_0 + \nu_1 + \nu_3 + 1,\\
&\quad\vdots\\
&N(F_{n-1}) \leq N(\Delta_{n-1} (W_{n-3})^{-1} F_{n-1}) + \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{n-3} + \nu_{n-1} + 1.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\Delta_0 F_0 = F_1$, $\Delta_1 F_1 = F_2$ e $\Delta_{j-1}(W_{j-3})^{-1}F_{j-1} = F_j$, para $j \geq 3$, então

$$\begin{aligned}
&N(F_1) \geq N(F_0) - \nu_0 - 1,\\
&N(F_2) \geq N(F_1) - \nu_1 - 1,\\
&N(F_3) \geq N(F_2) - \nu_2 - \nu_0 - 1,\\
&N(F_j) \geq N(F_{j-1}) - \nu_{j-1} - (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{j-3}) - 1, \quad \text{para } j \geq 4.
\end{aligned} \tag{13}$$

Sendo $F_n = kW_nW_{n-2}$, segue que $N(F_n) \leq \nu_n + \nu_{n-2}$. Como $F_0 = g \in span(g_0, \ldots, g_n)$, somando todas essas desigualdades, concluímos que

$$N(g) \leq n + \nu_n + \nu_{n-1} + 2\nu_{n-2} + 2\nu_{n-3} + 3\nu_{n-4} + \cdots + (n-2)\nu_1 + (n-1)\nu_0. \tag{14}$$

Em Nadler e Yakovenko (1998), assumindo a analiticidade das funções g_i, os autores obtiveram uma outra cota para o número de zeros. No trabalho, foi feito uso das chamadas desigualdades de *Rolle-Vorhoeve* (RV). Elas estabelecem que, dadas funções $f, h\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analíticas, exceto num número finito p de pólos, temos

$$\begin{aligned}
&N(f) \leq N(\partial_t f) + 1,\\
&|N(f) - N(h)| \leq N(fh) \leq N(f) + N(h),\\
&N(1/f) = N(f).
\end{aligned}$$

Aqui, procedemos de maneira diferente dos trabalhos mencionados para obter uma nova estimativa para o número de zeros. Sendo $N(F_0) \leq N(\frac{1}{W_0}F_0)$, pela primeira desigualdade de RV, temos

$$N(F_0) \leq N(\frac{1}{W_0}F_0) \leq N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_0}F_0\right)\right) + 1.$$

Daí, subtraindo $N(W_0^2)$ em ambos os lados, segue que

$$N(F_0) - N(W_0^2) \leq N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_0}F_0\right)\right) - N(W_0^2) + 1.$$

Pela segunda desigualdade de RV, e observando que $W_0^2\partial_t\left(\frac{1}{W_0}F_0\right) = F_1$, obtemos

$$N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_0}F_0\right)\right) - N(W_0^2) \leq N\left(W_0^2\partial_t\left(\frac{1}{W_0}F_0\right)\right) = N(F_1).$$

Desta forma, temos que

$$N(F_0) - N(W_0^2) \leq N(F_1) + 1,$$

ou seja,

$$N(F_1) \geq N(F_0) - 2v_0 - 1,$$

uma vez que $N(W_0^2) \leq N(W_0) + N(W_0)$. Da mesma forma, observando que $N(F_1) \leq N(\frac{1}{W_1}F_1)$ e $W_1^2\partial_t\left(\frac{1}{W_1}F_1\right) = F_2$, e subtraindo $N(W_1^2)$ em ambos os lados como acima, obtemos

$$N(F_2) \geq N(F_1) - 2v_1 - 1.$$

Agora, para $j \geq 3$, sendo $N(F_{j-1}) \leq N(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1})$, temos, pela primeira desigualdade de RV, que

$$N(F_{j-1}) \leq N(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}) \leq N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}\right)\right) + 1.$$

Subtraindo $N(W_{j-1}^2)$ em ambos os lados, segue que

$$N(F_{j-1}) - N(W_{j-1}^2) \leq N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}\right)\right) - N(W_{j-1}^2) + 1.$$

Usando a segunda desigualdade de RV, como $W_{j-1}^2\partial_t\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}\right) = F_j$, obtemos

$$N\left(\partial_t\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}\right)\right) - N(W_{j-1}^2) \leq N\left(W_{j-1}^2\partial_t\left(\frac{1}{W_{j-3}W_{j-1}}F_{j-1}\right)\right) = N(F_j).$$

Logo,

$$N(F_{j-1}) - N(W_{j-1}^2) \leq N(F_j) + 1,$$

e, portanto,

$$N(F_j) \geq N(F_{j-1}) - 2v_{j-1} - 1,$$

já que $N(W_{j-1}^2) \leq N(W_{j-1}) + N(W_{j-1})$.

Desta maneira, obtemos as seguintes novas estimativas,

$$\begin{aligned} N(F_1) &\geq N(F_0) - 2v_0 - 1, \\ N(F_2) &\geq N(F_1) - 2v_1 - 1, \\ N(F_j) &\geq N(F_{j-1}) - 2v_{j-1} - 1, \quad \text{para } j \geq 3. \end{aligned} \tag{15}$$

Assim, somando todas as estimativas acima, como $F_0 = g$ e $N(F_n) \leq v_n + v_{n-2}$, podemos concluir que

$$N(g) \leq n + 3v_{n-2} + 2(v_n + v_{n-1} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0). \tag{16}$$

Finalmente, temos as ferramentas e resultados necessários para provar o Teorema 1.

Demonstração Teorema 1. Sendo $\{g_i\}_0^n$ um conjunto de funções analíticas, então todas as construções feitas acima são válidas. Consideremos os dois grupos de estimativas, dados por (13) e (15). Tomando, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, a melhor estimativa de $N(F_k)$, isto é, a maior cota inferior entre os dois grupos, obtemos um novo conjunto de estimativas para $N(F_i)$, dado por

$$\begin{aligned} N(F_1) &\geq N(F_0) - v_0 - 1, \\ N(F_2) &\geq N(F_1) - v_1 - 1, \\ N(F_j) &\geq N(F_{j-1}) - v_{j-1} - \mu_{j-1} - 1, \quad \text{para } j = 3, 4, \ldots, n, \end{aligned} \tag{17}$$

em que $\mu_r = min\{v_r, v_0+v_1+\cdots+v_{r-2}\}$, para $r = 2, 3, \ldots, n-1$. Por fim, somando as desigualdades em (17), e como $N(F_n) \leq v_n+v_{n-2}$, obtemos a seguinte cota superior para o número de zeros isolados de uma combinação linear não trivial, $g = F_0$, das funções $\{g_i\}_0^n$,

$$N(g) \leq n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + v_{n-3} + \cdots + v_1 + v_0 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1}. \tag{18}$$

□

O teorema a seguir traz um exemplo realizável em que a cota estabelecida no Teorema 1 é atingida.

Teorema 10 (NOVAES; TORREGROSA, 2017) *Dados n, k e ℓ inteiros não negativos, existem um conjunto ordenado de polinômios $\{u_0, \ldots, u_n\}$, tal que todos os Wronskianos não se anulam, exceto W_{n-1} e W_n, os quais têm k e ℓ zeros simples, respectivamente, e um elemento em $span(u_0, \ldots, u_n)$ tendo, exatamente, $n + k + \ell$ zeros simples.*

Definição 8 *Chama-se configuração de $m \leq n$ zeros, de uma função u, um ponto $(p_1, p_2, \ldots, p_m, z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}_+^m$ tal que $\sum_{i=1}^m z_i = n$, em que cada p_i é um zero de u de multiplicidade z_i, $i = 1, , \ldots, m$.*

Teorema 11 (NOVAES; TORREGROSA, 2017) *Seja $\{g_0, \ldots, g_n\}$ um conjunto ordenado de funções de classe C^∞, definidas em (a, b), tal que existe $\xi \in (a, b)$ com $W_{n-1}(\xi) \neq 0$.*

1. *Se $W_n(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $span(g_0, \ldots, g_n)$ com essa configuração.*

2. *Se $W_n(\xi) = 0$ e $W_n'(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n + 1$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $span(g_0, \ldots, g_n)$ com essa configuração.*

4 Exemplos e aplicações da teoria de Chebyshev

Exemplo 1 *Seja $\mathbb{P}_n = \{p \in C[a, b] : p(t) = \sum_{i=0}^n a_i\, t^i,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ o espaço de polinômios de grau n definidos em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e gerado pela base $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Note que, para qualquer escolha de pontos $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$, temos*

$$D\begin{pmatrix} 1, t, t^2, \ldots, t^n \\ t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{vmatrix},$$

que nada mais é que o determinante de uma matriz de Vandermonde. Logo,

$$D\begin{pmatrix} 1, t, t^2, \ldots, t^n \\ t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n}^{n} (t_j - t_i) > 0.$$

Portanto, $\mathbb{P}_n$ é um espaço de Chebyshev de dimensão $n + 1$ e sua base é um sistema de Chebyshev, ou seja, um sistema T.

Como aplicação do Teorema 3, podemos provar o Teorema Fundamental da Álgebra. De fato, conforme vimos no Exemplo 1, o espaço $\mathbb{P}_n$ é um espaço de Chebyshev tal que sua base $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ é um sistema T. Logo, um polinômio $u(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ tem no máximo n zeros reais. Além, pela Proposição 1, é possível encontrar um polinômio de grau n com, exatamente, n raízes reais.

Exemplo 2 *O conjunto* $\{1, \cos(t), \sin(t)\}$ *é um sistema ECT no intervalo* $(0, \pi)$. *De fato, calculando os Wronskianos, temos*

$$\begin{aligned} W_0(t) &= 1, \\ W_1(t) &= -\sin(t), \\ W_2(t) &= 1. \end{aligned}$$

Como $\sin(t) \neq 0$ *no intervalo* $(0, \pi)$, *então os Wronskianos não se anulam e, portanto, o conjunto* $\{1, \cos(t), \sin(t)\}$ *é um sistema ECT. Assim, dada uma função* $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *não todos nulos, o número máximo de zeros dessa função, no intervalo* $(0, \pi)$ *é* 2. *Ainda, é possível encontrar coeficientes* a, b *e* c *de modo que* f *tenha, exatamente,* $0, 1$ *e* 2 *zeros.*

Exemplo 3 *O mesmo conjunto* $\{1, \cos(t), \sin(t)\}$ *é um sistema ET com acurácia 1 no intervalo* $[-\pi, \pi]$. *Segue dos Wronskianos calculados no exemplo anterior que* $W_1(t) = -\sin(t)$ *se anula em* $t = 0$, *o qual é um zero simples. Logo, o número máximo de zeros de uma combinação linear não trivial* $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + c$ *é igual a 3. Portanto, o conjunto é um sistema ET com acurácia 1.*

Exemplo 4 *Em Gusson (2022), é mostrado que o conjunto* $\{g_1, g_2, g_3\}$, *em que*

$$\begin{aligned} g_1(y) &= 1, \\ g_2(y) &= \frac{d^2 + y^2}{y}\left(3\pi + 2\arctan\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)\right), \\ g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2}{y}\ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + ab}c - ay}\right), \end{aligned}$$

com $a, c, d > 0$ *e* $\bar{a}^2 + ab > 0$, *é um sistema ECT para pontos positivos próximos de 0 e é um sistema ET com acurácia 1 no intervalo* $(0, \alpha)$, *com* $\alpha = \dfrac{c\sqrt{\bar{a}^2 + ab}}{ad}$.

5 Conclusões

Neste artigo, reunimos resultados sobre a teoria clássica e atual de Chebyshev. Tais resultados contribuem para diversas teorias e ramos da matemática que necessitam e utilizam resultados sobre o controle do números de zeros de certas funções, uma vez que mostram, principalmente, como caracterizar diferentes classes de sistemas de Chebyshev, os quais possuem resultados sobre zeros de combinações lineares de funções, a partir de determinantes e Wronskianos não nulos.

Além disso, apresentamos um resultado incremental sobre o número de zeros de uma combinação linear de funções quando alguns dos Wronskianos associados ao conjunto de funções possuem zeros simples.

Como perspectiva futura, podemos buscar um resultado de extensão do Teorema 1 que inclua, também, a possibilidade de algum dos Wronskianos possuir zeros com múltiplos, isto é, zeros com multiplicidade maior que um. Ainda, uma vez que existem alguns trabalhos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, encontrados na literatura, que utilizam esses resultados da Teoria de Chebyshev para encontrar estimativas para o número de ciclos limites em um sistema diferencial, podemos procurar melhoras para tais estimativas, fazendo uso do Teorema 1 aqui apresentado.

6 Bibliografia

GUSSON, V. H. L. **Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de campos de vetores lineares por partes**. 2022. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2022.

KARLIN, S.; STUDDEN, W. J. **Tchebycheff systems:** with applications in analysis and statistics. New York: Interscience Publishers, [1966]. (Pure and applied mathematics, v. 15)

LLIBRE, J.; ŚWIRSZCZ, G. On the limit cycles of polynomial vector fields. **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems:** Series A: mathematical analysis, v. 18, n. 2, p. 203–214, 2011.

MAÑOSAS, F.; VILLADELPRAT, J. Bounding the number of zeros of certain Abelian integrals. **Journal of Differential Equations**, v. 251, n. 6, p. 1656–1669, 2011.

NADLER, D.; YAKOVENKO, S. Oscillation and boundary curvature of holomorphic curves in C^n. **Mathematical Research Letters**, v. 5, n. 2, p. 137–148, 1998.

NOVAES, D. D.; TORREGROSA, J. On extended Chebyshev systems with positive accuracy. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 448, n. 1, p. 171–186, 2017.

NOVIKOV, D.; S. YAKOVENKO, S. Integral curvatures, oscillation and rotation of spatial curves around affine subspaces. **Journal of Dynamical and Control Systems**, v. 2, n. 2, p. 157–191, 1996.

NÜRNBERGER, G. **Approximation by spline functions**. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

PÓLYA, G. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equations. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 24, n. 4, p. 312-324, 1922.