

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022
Edição Iniciação Científica

Álvaro Leitão Pellegrino

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho
al.pellegrino@unesp.br

Renata Zotin Gomes de Oliveira

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho
renata.zotin@unesp.br

Comparação entre alguns modelos discretos de dinâmica populacional

Comparison between some discrete models of population
dynamics

Resumo

A escolha de um modelo para o estudo do comportamento de uma determinada população depende de características intrínsecas da mesma. Neste trabalho apresentamos alguns modelos discretos de dinâmica populacional cujas taxas de crescimento dependem da própria população e possuem aspecto semelhantes, ou seja, são decrescentes à medida que a população aumenta. A existência de ponto de equilíbrio bem como sua estabilidade dependem dos parâmetros envolvidos e assim, uma análise da estabilidade é realizada.

Palavras-chave: Ponto de equilíbrio. Estabilidade. Modelos discretos

Abstract

The choice of a model for the study of the behavior of a certain population depends on its intrinsic characteristics. In this work we present some discrete population models whose growth rates vary according to the population itself and have a similar appearance, that is, they decrease as the population increases. The existence of an equilibrium point as well as its stability depend on the parameters involved and thus, a stability analysis is performed.

Keywords: Equilibrium point. Stability. Discrete models



1 Introdução

O estudo de modelos de dinâmica populacional e a interação entre espécies é bastante conhecido na literatura. Enquanto um modelo contínuo nos leva a equações diferenciais, um modelo discreto pode ser mais adequado para espécies cujas gerações não se sobrepõem e se propagam em intervalos bem definidos.

Além do estudo do comportamento das interações entre populações, as equações de diferenças têm sido utilizadas na modelagem dos mais diversos fenômenos, como sistemas de controle fisiológicos, doenças cardíacas e neurológicas [1], [2], dentre outros.

O estudo do comportamento de modelos para uma única população é baseado essencialmente no fato que a taxa de crescimento da população em estudo depende de alguma forma, da própria população, nos levando à equações não lineares, para as quais dificilmente teremos solução analítica. Assim, técnicas matemáticas são necessárias para a análise do comportamento desses modelos.

Apresentamos nesse trabalho alguns modelos onde as hipóteses sobre a taxa de crescimento são similares mas o que os diferem são as escolhas das funções que representam as taxas de crescimento da população em estudo. Uma comparação entre os mesmos é realizada. As figuras presentes no texto foram criadas pelos autores utilizando os softwares Geogebra e Gnuplot.

Inicialmente, apresentaremos os resultados principais que serão necessários para a descrição e análise dos modelos que serão apresentados.

2 Preliminares

As equações de diferença são usadas, geralmente, para descrever a evolução de um dado fenômeno ao longo do tempo, em períodos discretos. Seja x o tamanho de uma certa população, que cresce ou decresce em um tempo discreto e n um instante arbitrário. Se o tamanho da n -ésima geração depende de uma função referente ao tamanho da geração anterior, podemos expressar por

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tal função representa a mudança que ocorre com essa população entre uma geração e a seguinte. Se x_0 é o ponto inicial de observação desse fenômeno, a sua evolução se dará pela sequência:

$$\begin{aligned} & x_0, x_1, x_2, x_3 \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \\ & x_0, f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n), \dots \\ & x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots \end{aligned}$$

Por conveniência, adota-se a notação

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \text{ etc.}$$

Chama-se $f^n(x_0)$ de n -ésima iteração de x_0 em f e o conjunto de todas as iterações onde $f^0(x_0) = x_0$ é chamado de órbita de x_0 , denotada por $O(x_0)$. A sequência de evolução do fenômeno é dada por

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots, f^n(x_0), f^{n+1}(x_0), \dots$$

É fundamental no estudo de equações de diferenças (e também de equações diferenciais) a noção de ponto de equilíbrio, uma vez que, na maioria das vezes, não é possível obter solução analítica.

Definição 1 Dizemos que um ponto x^* , pertencente ao domínio de f é chamado de ponto de equilíbrio da equação de diferença $x_{n+1} = f(x_n)$ se ele for um ponto fixo de f , ou seja, se $f(x^*) = x^*$.

Em outros termos, se $x_0 = x^*$ então x^* é uma solução constante de $x_{n+1} = f(x_n)$ pois $x_1 = f(x^*) = x^*$, $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$ e assim por diante.

Graficamente, o ponto de equilíbrio da equação de diferenças é a coordenada x do ponto onde o gráfico de f intersecta a reta $y = x$. Para obtermos os pontos de equilíbrio resolvemos a equação $f(x^*) = x^*$.

Exemplo 2 Para a equação $x_{n+1} = x_n^3$ temos que $f(x) = x^3$. Resolvendo a equação $x^3 = x$ encontramos três pontos de equilíbrio: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, que podem ser observados na Figura 1.

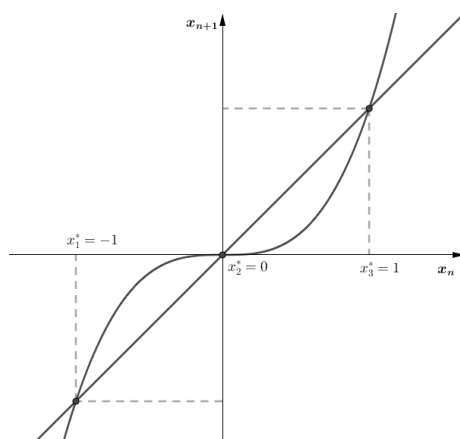


Figura 1: Pontos de equilíbrio de $x_{n+1} = x_n^3$.

Exemplo 3 Para a equação de diferenças $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, temos $f(x) = x^2 - x + 1$. Resolvendo a equação $x^2 - x + 1 = x$ encontramos um único ponto de equilíbrio, $x^* = 1$, que pode ser observado na Figura 2.

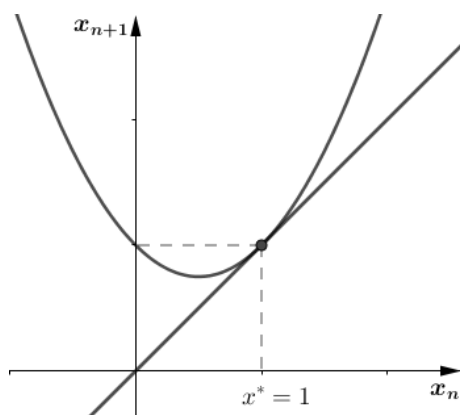


Figura 2: Ponto de equilíbrio de $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$.

Um dos principais objetivos no estudo de sistemas dinâmicos é analisar o comportamento de suas soluções próximo a um ponto de equilíbrio, tendo em vista que na maioria das vezes uma solução analítica não é possível. Como os modelos trabalhados no texto são exemplos de sistemas dinâmicos, apresentamos algumas definições básicas da teoria de estabilidade. Nas Figuras 3 e 4 que serão apresentadas os pontos estarão unidos por segmentos de reta para facilitar a visualização do comportamento das soluções, embora a solução seja discreta.

Definição 4 (a) O ponto de equilíbrio x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$ é dito estável se, dado um $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica em $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ para todo $n > 0$. Se x^* não é estável, então ele é chamado de instável (Figuras 3a e 3b).

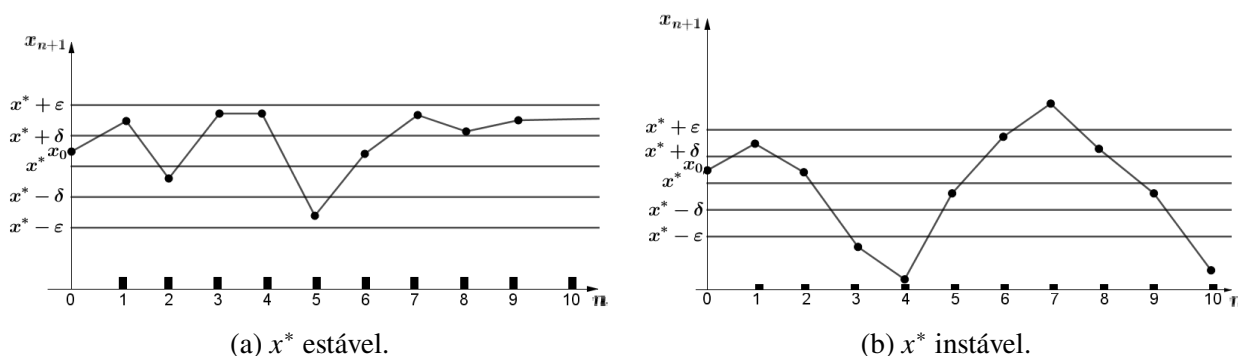


Figura 3: Estabilidade de x^* .

(b) Diz-se que o ponto x^* está atraindo ou é atrator se existe $\eta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \eta$ temos $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Se isso ocorre para qualquer η , x^* é denominado atrator global.

(c) O ponto x^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se ele for estável e atrator. E, se isso ocorre para qualquer η , x^* é denominado globalmente assintoticamente estável, conforme ilustram as Figuras 4a e 4b, respectivamente.

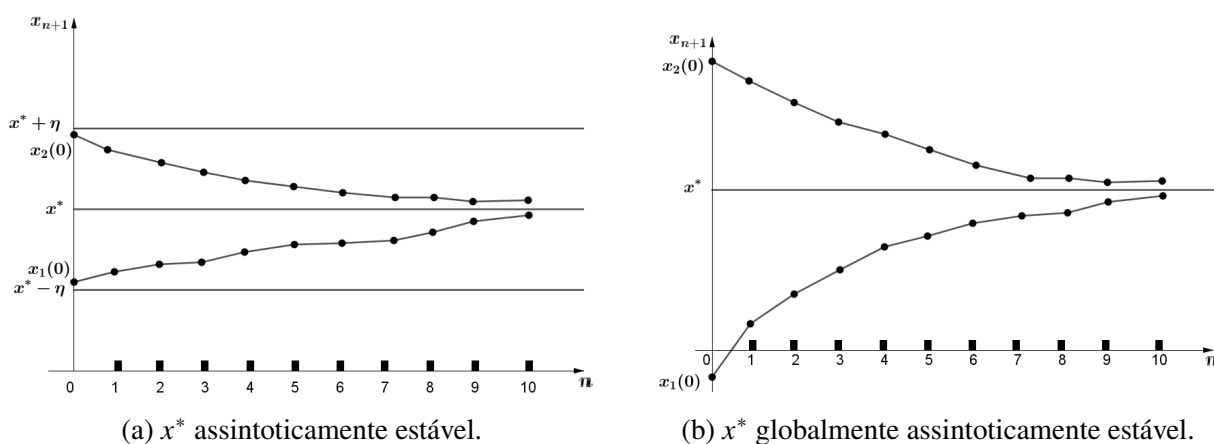


Figura 4: Estabilidade assintótica de x^* .

A seguir apresentamos alguns critérios (ver por exemplo [3]) que nos permitem concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio x^* da equação $x_{n+1} = f(x_n)$.

Teorema 5 Seja x^* um ponto de equilíbrio de $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f é uma função de classe C^1 em x^* . Então:

(i) Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* é assintoticamente estável;

(ii) Se $|f'(x^*)| > 1$, x^* é instável.

No entanto, se $|f'(x^*)| = 1$ o teorema anterior não nos permite concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio, sendo necessário informações das derivadas de ordem superior.

Teorema 6 Seja x^* um ponto de equilíbrio de $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f é uma função de classe C^2 em x^* . Se $f'(x^*) = 1$, temos o seguinte critério:

(i) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* é instável.

(ii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$, então x^* é instável.

(iii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável.

Teorema 7 Seja x^* um ponto de equilíbrio de $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f é uma função de classe C^2 em x^* . Se $f'(x^*) = -1$, calcule $S(x) = -2f'''(x) - 3[f''(x)]^2$ e:

(i) Se $S(x^*) > 0$, então x^* é instável.

(ii) Se $S(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável.

As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [3].

3 Modelos discretos em dinâmica populacional

Utilizados com o intuito de realizar previsões, os modelos discretos de dinâmica populacional são uma das ferramentas fundamentais nos planejamentos de desenvolvimento sustentável. Em geral esses modelos surgem na Biologia, uma vez que as populações se reproduzem em intervalos de tempo bem determinados.

Segundo [4], os modelos discretos de dinâmica populacional geralmente são formulados por equações de diferenças na forma

$$P_{n+1} = f(P_n) = P_n F(P_n), \quad (1)$$

onde, a função $f(P_n)$ quase sempre é não linear. Se o modelo pode ser descrito por $P_{n+1} = P_n F(P_n)$ temos que $P^* = 0$ é sempre um ponto de equilíbrio.

Segundo [5], "a habilidade em modelar um crescimento populacional específico está em determinar a forma apropriada de $f(P_n)$ para refletir observações ou fatos conhecidos sobre a espécie em questão. Devido ao processo de auto-regulação, espera-se que a função $f(P_n)$ atinja um valor máximo em P_M e decresça para $P_n > P_M$, (Figura 5)."

Dessa forma, apresentamos a seguir alguns modelos discretos de dinâmica populacional clássicos, comparando as funções $f(P_n)$ que os determinam e observaremos, através da análise dos pontos de equilíbrio, o comportamento das soluções.

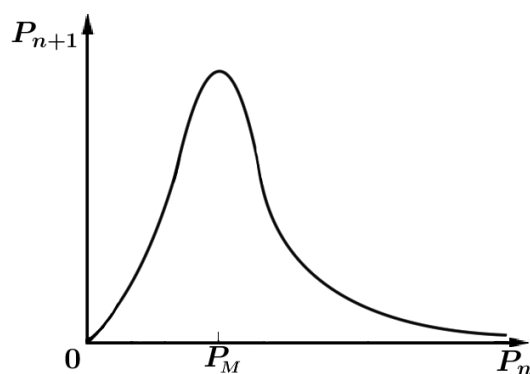


Figura 5: Aspecto da função $f(P_n)$.

O modelo discreto mais simples, que relaciona a população no instante $n + 1$ com a população no instante n é obtido supondo que a população no instante $n + 1$ é proporcional à população no instante n , ou seja, quando a função $F(P_n) = r > 0$. Assim, temos o modelo conhecido como modelo de Malthus discreto, ou seja,

$$P_{n+1} = rP_n, \quad (2)$$

cuja solução é dada por $P(n) = r^n P_0$. A população irá crescer de modo exponencial, se $r > 1$ ou irá à extinção se $r < 1$. Este modelo não tem se revelado útil para populações analisadas por um longo período de tempo e assim, diversas modificações na taxa de crescimento foram propostas na construção de outros modelos.

3.1 Modelo de Verhulst

Na tentativa de incorporar fatores inibidores na população, uma modificação do modelo de Malthus considera a taxa de crescimento não mais constante, mas dependente da própria população, de modo que, à medida que a população aumenta, a taxa de crescimento diminui. A função $F(P_n)$ considerada é $F(P_n) = r(1 - P_n/K)$, onde $r > 0$ e $K > 0$ é chamada capacidade suporte do meio. Este modelo é considerado como análogo ao modelo logístico contínuo. No entanto, o comportamento dos modelos contínuo e discreto são bem diferentes quando comparados em relação aos parâmetros, além de P_{n+1} se tornar negativo caso $P_n > K$.

Este modelo é representado pela equação de diferença não linear de primeira ordem

$$P_{n+1} = P_n r (1 - P_n / K), \quad (3)$$

cujos pontos de equilíbrio P^* são tais que

$$P^* = P^* r (1 - P^* / K).$$

Note que $P^* = 0$ é uma solução possível. Caso $P^* \neq 0$, teremos que $r(1 - P^*/K) = 1$, ou seja,

$$P^* = \frac{K(r-1)}{r},$$

que só existe, do ponto de vista biológico, se $r > 1$.

Da equação (3) temos que $f(x) = rx(1 - x/K)$ e portanto, $f'(x) = r - 2rx/K$. Assim, $f'(0) = r$ e, se $r > 1$, podemos concluir que o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é instável e se $0 < r < 1$ ele é

assintoticamente estável. Para o caso $r = 1$, como $f''(x) = -2r/K$, usando o Teorema 6 temos que $P^* = 0$ é instável pois $f''(0) \neq 0$.

Para o ponto de equilíbrio $P^* = \frac{K(r-1)}{r}$ temos $f' \left(\frac{K(r-1)}{r} \right) = 2 - r$. Assim, se $|2 - r| < 1$, ou seja, se $1 < r < 3$, esse ponto de equilíbrio é assintoticamente estável e se $r > 3$, ele é instável (Figuras 6 e 7).

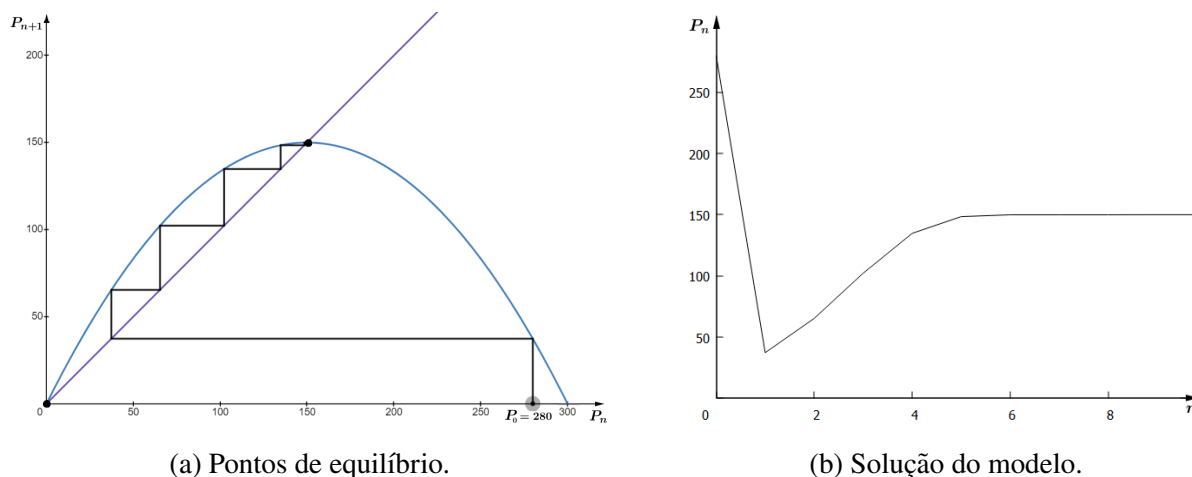


Figura 6: Comportamento do modelo de Verhulst para $r = 2$ e $K = 300$, com $P_0 = 280$.

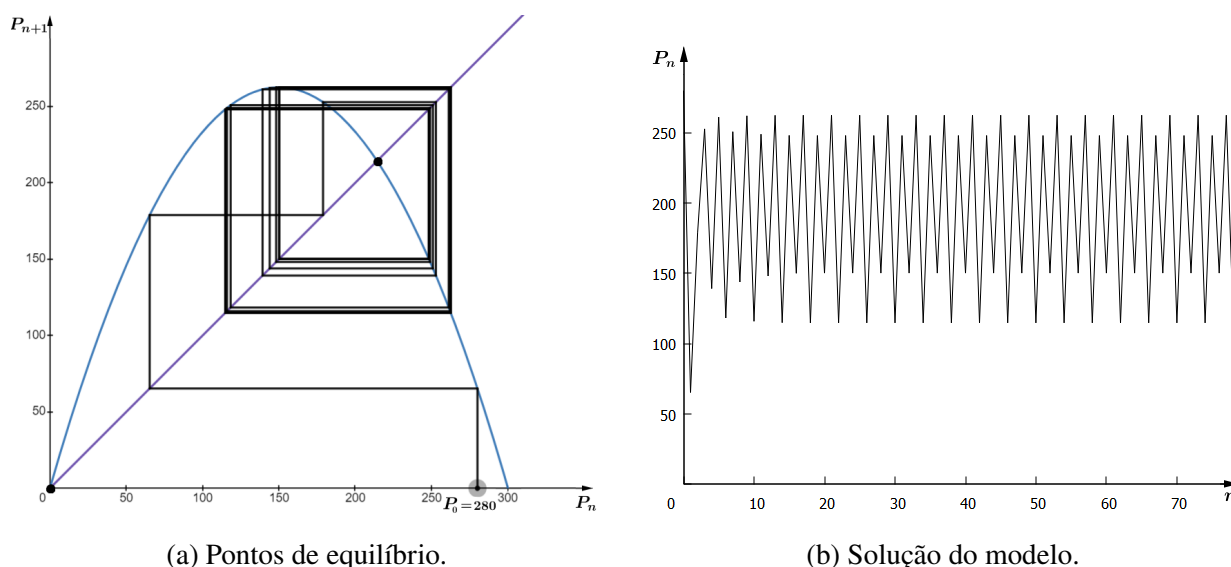


Figura 7: Comportamento do modelo de Verhulst para $r = 3, 5$ e $K = 300$, com $P_0 = 280$.

Para o caso $r = 3$ é preciso analisarmos utilizando o Teorema 7 pois $f' \left(\frac{K(r-1)}{r} \right) = 2 - 3 = -1$. Assim, $f''(x) = -2r/K$ e $f'''(x) = 0$. Como $S^* = S(P^*) = -2f'''(P^*) - 3[f''(P^*)]^2$, temos

$$S^* = -3[-2r/K]^2 < 0. \quad (4)$$

Portanto, se $r = 3$, o ponto de equilíbrio $P^* = \frac{K(r-1)}{r}$ é assintoticamente estável. Concluimos que, se $r > 1$ o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é sempre instável e o ponto de equilíbrio $P^* = \frac{K(r-1)}{r}$ existe e é assintoticamente estável para $1 < r \leq 3$ e instável se $r > 3$.

Os valores de $r = 1$ e $r = 3$ são chamados de valores de bifurcação. Para valores de $r > 1$ passamos a ter dois pontos de equilíbrio com mudança do tipo de estabilidade de $P^* = 0$. E, para valores de $r > 3$, o ponto de equilíbrio $P^* = \frac{K(r-1)}{r}$ continua existindo, mas passa a ser instável.

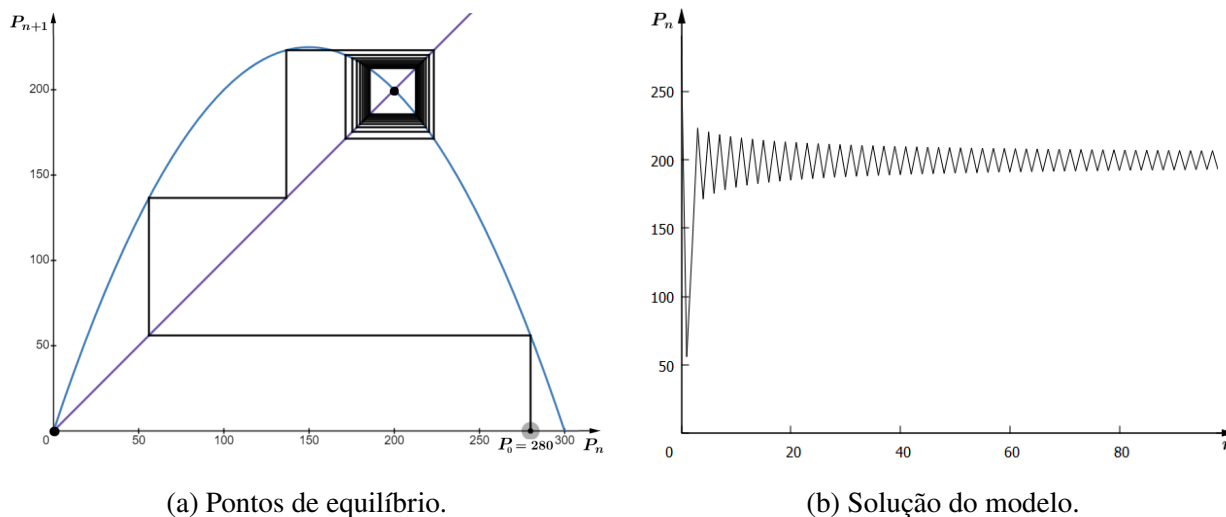


Figura 8: Modelo de Verhulst para $r = 3$ e $K = 300$, com $P_0 = 280$.

Na Figura 8 podemos observar o comportamento do modelo de Verhulst para o valor de bifurcação $r = 3$, para o qual o ponto de equilíbrio $P^* = \frac{K(r-1)}{r}$ é assintoticamente estável. No entanto, a convergência para o ponto P^* só é possível perceber se realizarmos milhares de iterações (superior a 6000), diferentemente do que ocorre para os outros casos.

Para um estudo mais detalhado do modelo de Verhulst, no caso $r > 3$, onde comportamentos como caos e existência de soluções periódicas podem surgir, consulte [5].

3.2 Modelo de May (1975)

Em 1975, May apresentou um modelo mais realista daquele apresentado na seção anterior, pois considera que se a população P_n for muito grande, a taxa de crescimento também sofre redução, mas P_{n+1} permanece sempre positiva. O formato para $f(P_n)$ é semelhante ao gráfico apresentado na Figura 5 e o modelo é dado pela equação

$$P_{n+1} = P_n e^{r(1-\frac{P_n}{K})}, \tag{5}$$

onde r e K são constantes positivas, sendo K a capacidade suporte. A expressão $F(P_n) = e^{r(1-\frac{P_n}{K})}$ indica que a taxa de reprodução é dependente da densidade populacional. Note que, tratando $F(P_n)$ como uma função de P_n , a população só irá continuar a crescer se $P_n < K$.

Analisando os pontos de equilíbrio, temos

$$P^* = P^* e^{r(1-\frac{P^*}{K})}.$$

Note que $P^* = 0$ é uma solução possível. E, caso $P^* \neq 0$, teremos que $e^{r(1-\frac{P^*}{K})} = 1$, ou seja, $P^* = K$ pois $r > 0$.

Da equação (5) temos $f(x) = x e^{r(1-\frac{x}{K})}$ e portanto,

$$f'(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})} - \frac{rx}{K} e^{r(1-\frac{x}{K})} = e^{r(1-\frac{x}{K})} \left(1 - \frac{rx}{K}\right). \tag{6}$$

Assim, $f'(0) = e^r$. Como r é uma constante positiva, podemos concluir que $e^r > 1$. Portanto, $|f'(0)| > 1$, ou seja, o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é instável.

Para o ponto de equilíbrio $P^* = K$ temos $f'(K) = e^{r(1-\frac{K}{K})} (1 - \frac{rK}{K}) = e^0(1 - r) = 1 - r$. Se $|1 - r| > 1$, ou seja, se $r > 2$, o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é instável e se $0 < r < 2$, o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é assintoticamente estável.

Para o caso onde $r = 2$ é preciso utilizar derivadas de ordem superior pois $f'(K) = 1 - r = 1 - 2 = -1$.

Calculando as derivadas de segunda e terceira ordem, temos:

$$f''(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})} \left(\frac{r^2x - 2rK}{K^2} \right) \quad (7)$$

$$f'''(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})} \left(\frac{3r^2K - r^3x}{K^3} \right) \quad (8)$$

Consequentemente, para $r = 2$ temos:

$$f''(K) = e^{r(1-\frac{K}{K})} \left(\frac{r^2K - 2rK}{K^2} \right) = \frac{r(r-2)}{K} = \frac{2(2-2)}{K} = 0$$

$$f'''(K) = e^{r(1-\frac{K}{K})} \left(\frac{3r^2K - r^3K}{K^3} \right) = \frac{r^2(3-r)}{K^2} = \frac{4(3-2)}{K^2} = \frac{4}{K^2}$$

$$S(P^*) = -2f'''(P^*) - 3(f''(P^*))^2$$

$$S(K) = -2f'''(K) - 3(f''(K))^2 = -2\frac{4}{K^2} - 30 = -\frac{8}{K^2}$$

Como $S(K) < 0$, podemos afirmar que, quando $r = 2$, o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é assintoticamente estável.

Portanto, concluímos que o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é sempre instável e o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é assintoticamente estável se $0 < r \leq 2$ e instável se $r > 2$. Temos assim que $r = 2$ é um valor de bifurcação. As Figuras 9, 10 e 11 ilustram o comportamento do modelo para alguns valores de r .

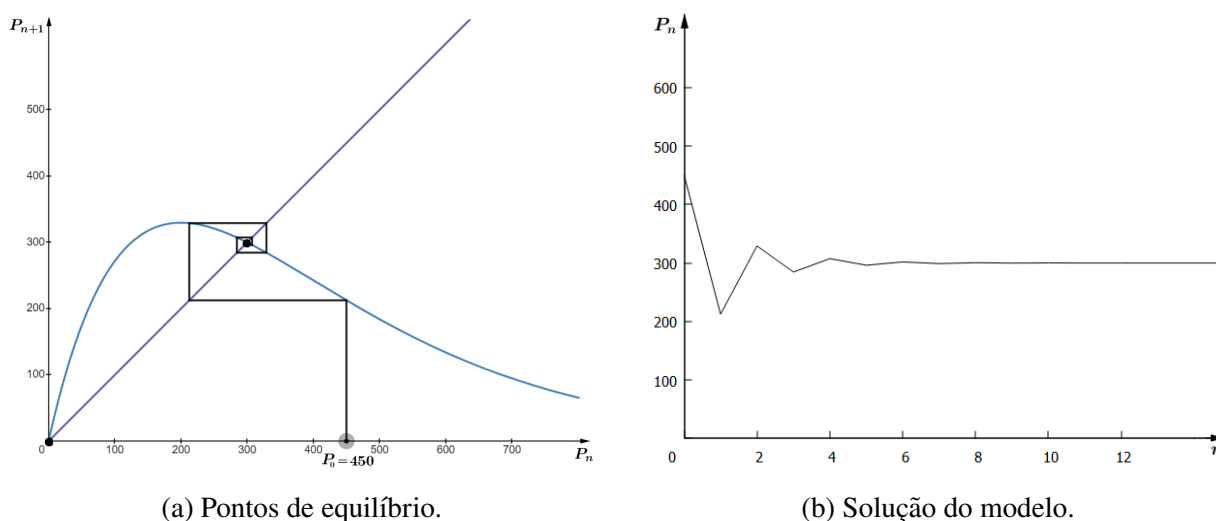


Figura 9: Comportamento do modelo de May (1975) para $r = 1,5$ e $K = 300$, com $P_0 = 450$.

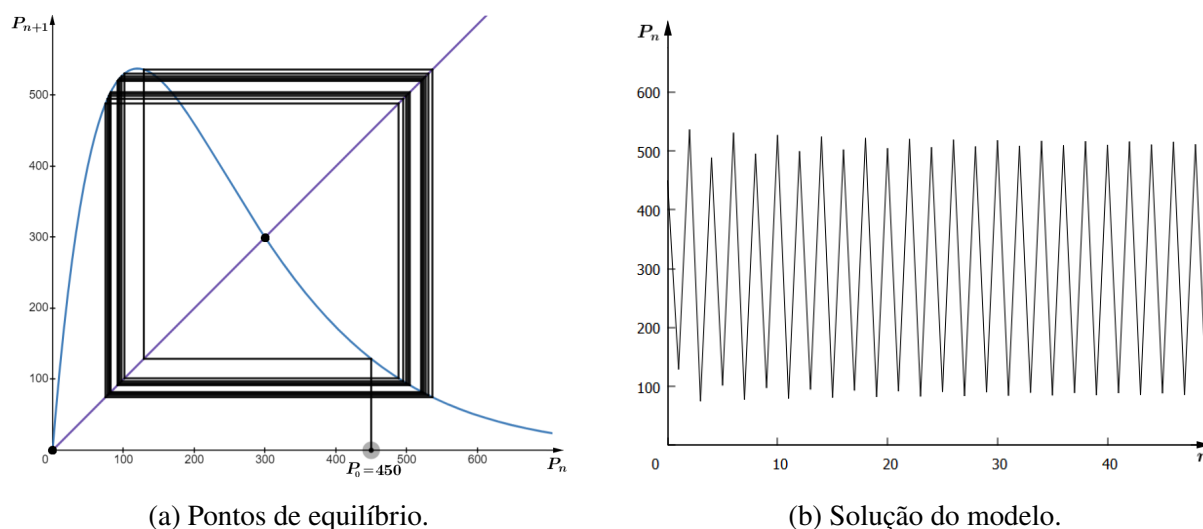


Figura 10: Comportamento do modelo de May (1975) para $r = 2,5$ e $K = 300$, com $P_0 = 450$.

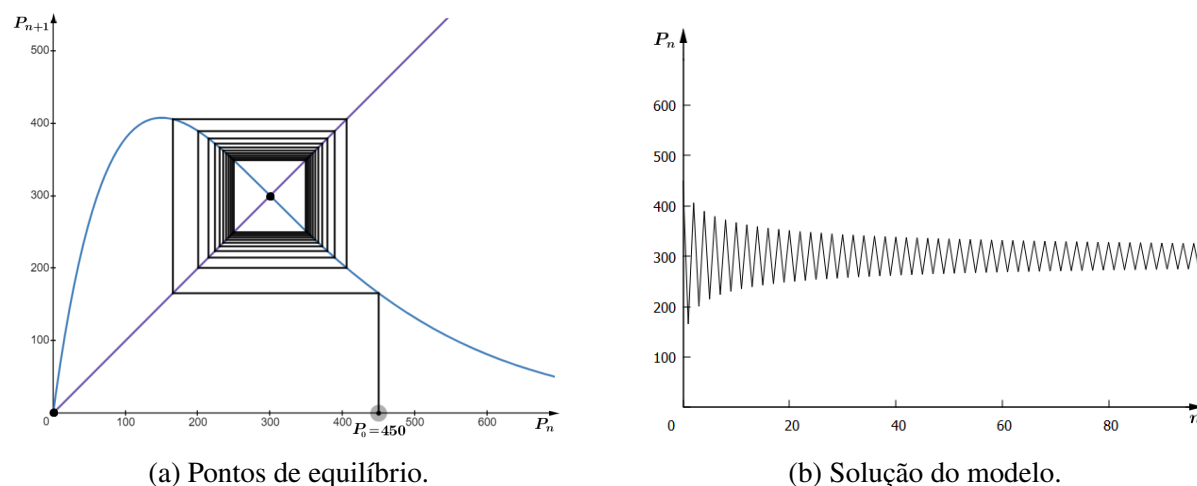


Figura 11: Comportamento do modelo de May (1975) para $r = 2$ e $K = 300$, com $P_0 = 450$.

Na Figura 11 observamos oscilação da população quando $r = 2$, sendo que já mostramos que o ponto de equilíbrio $P^* = K$ é assintoticamente estável. No entanto, esse comportamento é semelhante ao modelo de Verhulst e também são necessárias milhares de iterações para perceber a convergência assintótica ao ponto de equilíbrio.

3.3 Modelo de Hassel (1975)

Um modelo de dinâmica populacional proposto por Hassel em 1975 (veja [6]) é dado pela equação

$$P_{n+1} = \lambda P_n (1 + a P_n)^{-b}, \quad (9)$$

onde λ , a e b são constantes positivas. Note que, reorganizando a equação, temos que a taxa de crescimento populacional é $F(P_n) = \frac{\lambda}{(1+aP_n)^b}$.

Analisando os pontos de equilíbrio, temos a equação

$$P^* = \frac{\lambda}{(1+aP^*)^b} P^*.$$

Note que $P^* = 0$ é uma solução possível e portanto, um ponto de equilíbrio. Caso $P^* \neq 0$, teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{(1+aP^*)^b} &= 1 \\ \lambda &= (1+aP^*)^b \\ \ln \lambda &= \ln(1+aP^*)^b \\ \ln \lambda &= b \ln(1+aP^*) \\ e^{\frac{\ln \lambda}{b}} &= 1+aP^* \\ aP^* &= e^{\frac{\ln \lambda}{b}} - 1 \\ P^* &= (e^{\frac{\ln \lambda}{b}} - 1) \frac{1}{a} = (\lambda^{\frac{1}{b}} - 1)/a. \end{aligned}$$

Observe que P^* só existe do ponto de vista biológico se $\lambda > 1$.

Como $f(x) = \lambda x(1+ax)^{-b}$, temos

$$f'(x) = \lambda[(1+ax)^{-b} - abx(1+ax)^{-b-1}]. \quad (10)$$

Logo, $f'(0) = \lambda[(1+0)^{-b} - 0 \cdot (1+0)^{-b-1}] = \lambda$. Assim, se $\lambda < 1$, então o equilíbrio nulo é assintoticamente estável (Figura 12) e se $\lambda > 1$ é instável (Figuras 13 e 14). Analisando o ponto de equilíbrio não nulo temos

$$f'(\lambda^{\frac{1}{b}} - 1)/a = 1 - b \left(1 - \frac{1}{\lambda^{1/b}}\right).$$

Após alguns cálculos, obtemos que $P^* = (\lambda^{\frac{1}{b}} - 1)/a$ é assintoticamente estável se e somente se,

$$0 < b(1 - \lambda^{-1/b}) < 2. \quad (11)$$

Portanto, concluímos que o ponto de equilíbrio $P^* = 0$ é instável se $\lambda > 1$ e assintoticamente estável se $0 < \lambda < 1$. Já o ponto de equilíbrio $P^* = (\lambda^{1/b} - 1)/a$, que só existe se $\lambda > 1$ será assintoticamente estável se satisfizer a relação dada por 11.

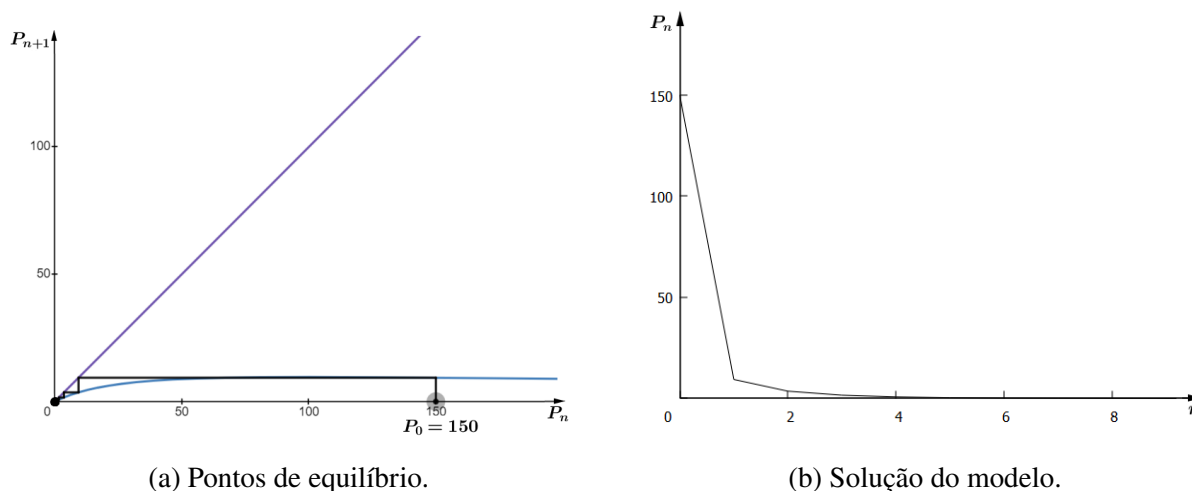


Figura 12: Comportamento do modelo de Hassel (1975) para $\lambda = 0,5$; $a = 0,02$ e $b = 1,5$.

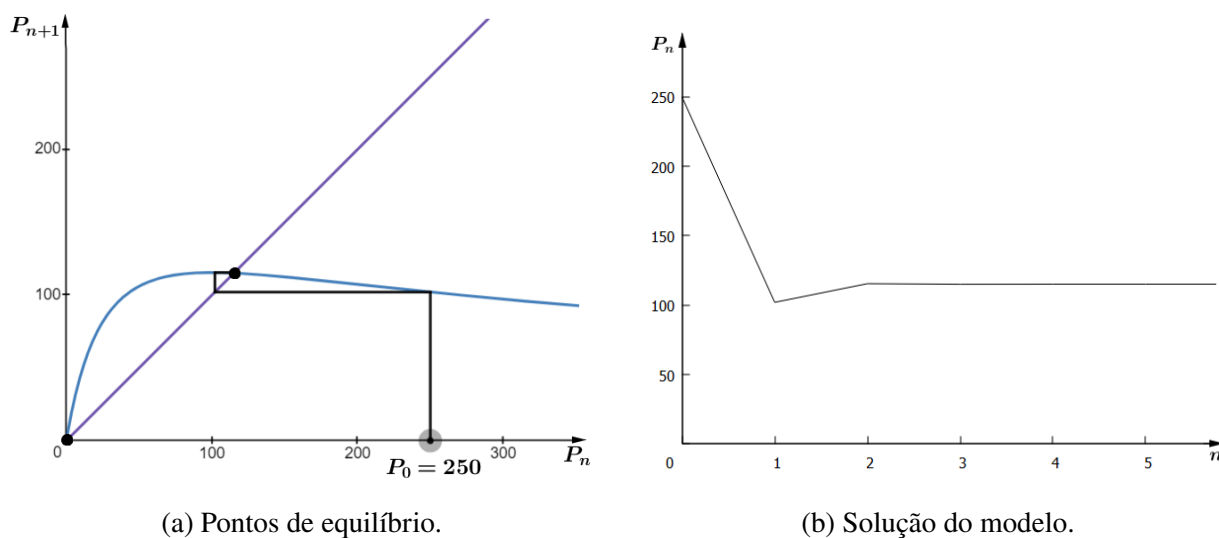


Figura 13: Comportamento do modelo de Hassel (1975) para $\lambda = 6$; $a = 0,02$ e $b = 1,5$.

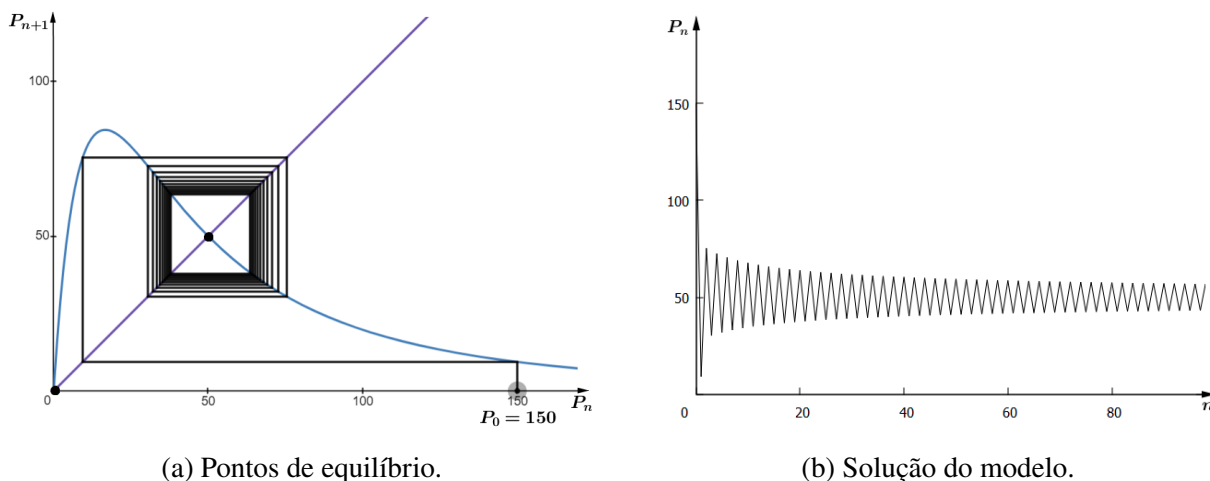


Figura 14: Comportamento do modelo de Hassel (1975) para $\lambda = 16$; $a = 0,02$ e $b = 4$.

Hassel ressalta que, experimentos em laboratório podem fornecer condições para que uma população fique isolada de outras espécies e assim, modelos de uma única população são mais adequados para a interpretação desses dados [6].

4 Comparação das taxas de crescimento

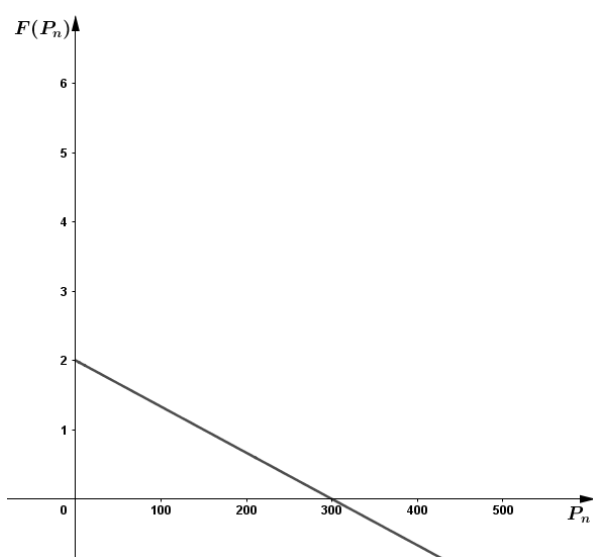
Cada um dos modelos apresentados anteriormente estão descritos na forma

$$P_{n+1} = F(P_n)P_n,$$

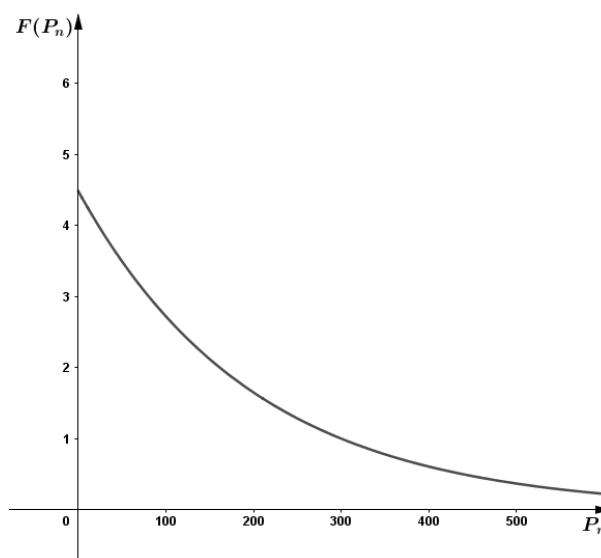
ou seja, utilizam a taxa de crescimento $F(P_n)$ dependente da própria população e decrescente à medida que a população aumenta. No entanto, cada uma dessas funções tem formatos distintos, com características específicas e que dependem de certas constantes, podendo descrever diferentes tipos de população.

As distinções na forma como cada um taxa modela o crescimento da população podem ser observadas mais facilmente de forma gráfica. Vejamos alguns exemplos das funções $F(P_n)$ para

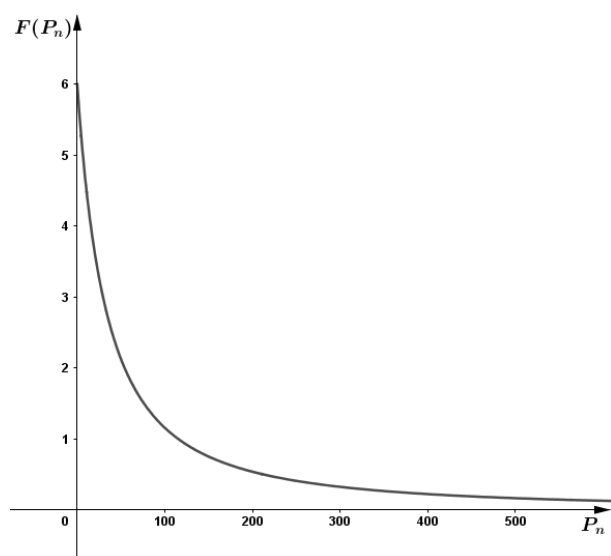
cada um dos modelos estudados, ilustrados na Figura 15 e, na Figura 15d, apresentamos uma comparação entre as taxas dos três modelos.



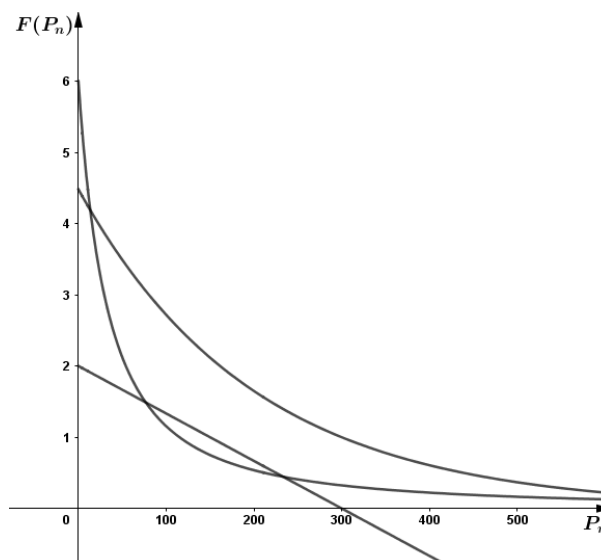
(a) $F(P_n)$ para o modelo de Verhulst, com $r = 2$ e $K = 300$.



(b) $F(P_n)$ para o modelo de May, com $r = 1,5$ e $K = 300$.



(c) $F(P_n)$ para o modelo de Hassel, com $\lambda = 6$, $a = 0,02$ e $b = 1,5$.



(d) Comparação entre as taxas apresentadas nas Figuras 15a, 15b e 15c.

Figura 15: Taxas de crescimento dos modelos de Verhulst, May e Hassel.

De um modo geral, os modelos são parecidos em termos de número de pontos de equilíbrio e estabilidade dependente dos parâmetros, mas cada um incorpora características peculiares na forma de considerar os fatores inibidores no crescimento populacional.

É possível encontrar na literatura diversos outros modelos onde a função $F(P_n)$ tem características peculiares, como o modelo de Ricker, Maynard, Marotta, dentre outros [6].



Referências

- [1] IKEDA, N.; YOSHIKAWA, S.; SATO, T. Difference equation model of ventricular parasystole as an interaction between cardiac pacemakers based on the phase response curve. **Journal of Theoretical Biology**, v. 103, n. 3, p. 439-465, 1983.
- [2] KEENER, J. P. Chaotic cardiac dynamics. *In*: HOPPENSTAEDT, F. C. (ed.). **Mathematical aspects of physiology**, 1981. p. 299-325.
- [3] ELAYDI, S. **An introduction to difference equations**. 3rd ed. New York: Springer, 2005.
- [4] BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- [5] MURRAY, J. D. **Mathematical biology**. 2nd ed. corrected. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [6] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. New York: Random House, 1988.
- [7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.