



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022
Edição Iniciação Científica

Gabriel Xavier de Araújo
Campus Sorocaba
Universidade Federal de São Carlos
gabriel.acp@hotmail.com

Graciele Paraguaia Silveira
Campus Sorocaba
Universidade Federal de São Carlos
graciele@ufscar.br

Modelos matemáticos para dinâmica populacional entre espécies de atum e sardinha sob interferência da eutrofização marinha

Mathematical models for population dynamics between tuna and sardine species under the interference of marine eutrophication

Resumo

A modelagem matemática de fenômenos da natureza é uma alternativa importante e pode auxiliar na tomada de decisões visando a preservação dos ecossistemas. Os objetivos deste trabalho foram estudar as interações entre as populações de atum (predador) e sardinha (presa), via modelo matemático de Lotka-Volterra, buscar dados reais sobre as espécies para a estimativa dos parâmetros, implementar computacionalmente o método de Euler e determinar o impacto da eutrofização marinha sobre essas populações. Simulações numéricas de cenários foram executadas, por meio da linguagem Python. Os resultados mostraram que a eutrofização das águas atinge as populações de atuns e sardinhas (mesmo que estas tenham hábito planctófago), assim como prejudica todo o meio aquático.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Presa-Predador. Eutrofização. Método de Euler.

Abstract

Mathematical modeling of natural phenomena is an important alternative and can help in decision making for the preservation ecosystems. The objectives of this work were to study the interactions between tuna (predator) and sardine (prey) populations, via Lotka-Volterra mathematical model, to search for real data on the species to estimate the parameters, to computationally implement Euler's method and determine the impact of marine eutrophication on these populations. Numerical simulations of scenarios were performed using the Python language. The results showed that water eutrophication affects the tuna and sardines populations (even if they have a planktophagous habit), as well as harming the entire aquatic environment.

Keywords: Mathematical Modeling. Predator-Prey. Eutrophication. Euler Method.



1 Introdução

A Matemática Aplicada é uma área responsável por difundir modelos que, em suma, possibilitam a visualização de prováveis cenários para diversas situações. O conjunto de termos e expressões matemáticas empregados em acontecimentos, muitas vezes presentes no cotidiano, permite um vislumbre do futuro, se obedecer a determinados princípios propostos. A Biomatemática, recentemente incluída como subárea da Matemática Aplicada, na plataforma Carlos Chagas do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), está em constante expansão, sendo alvo de pesquisas para muitos cientistas que buscam compreender, analisar e modelar diferentes problemas biológicos.

A modelagem matemática é uma ferramenta utilizada para descrever fenômenos do mundo real e suas tendências, no decorrer do tempo. Para Bassanezi (2010), trata-se de uma técnica adotada para se obter alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. Nesta perspectiva, as equações diferenciais e os métodos computacionais de implementação se destacam, por viabilizarem estudos e simulações de diferentes fenômenos, inclusive biológicos, podendo auxiliar em processos de tomadas de decisões.

O presente trabalho foi motivado por estudos realizados pelo primeiro autor deste artigo, sob orientação da segunda autora, relacionados à modelagem matemática de problemas via equações diferenciais. Durante um levantamento bibliográfico, foi encontrada a referência Gonzales (2008), cujo assunto abordado envolve a modelagem da dinâmica entre as espécies de atum (predador), cavala (predador) e sardinha (presa). A eutrofização foi mencionada como algo que interfere no ambiente e na vida das espécies, mas esta não foi incorporada ao sistema desenvolvido.

A eutrofização das águas significa seu enriquecimento por nutrientes, principalmente nitrogênio e fósforo, levando ao crescimento excessivo de plantas aquáticas (algas ou fitoplânctons), causando desequilíbrio do ecossistema aquático e progressiva degeneração da qualidade da água (FIGUEIRÊDO *et al*, 2007). O ambiente passa a se tornar inóspito para diversas espécies de animais e plantas, visto que a grande quantidade de fitoplânctons dificulta a entrada de energia luminosa solar dentro do meio aquático, tal como propicia a diminuição do nível de oxigênio disponível, indispensável para a sobrevivência. Outra consequência é a proliferação de cianobactérias em detrimento de outras espécies aquáticas e estas por sua vez, quando submetidas a determinadas condições ambientais, podem produzir toxinas que chegam a ser fatais aos animais e aos seres humanos.

Neste sentido, o propósito principal desta pesquisa foi desenvolver e analisar dois modelos matemáticos do tipo presa-predador, envolvendo o atum (*Thunnus albacares*) e a sardinha (*Sardinella brasiliensis*). O primeiro deles é a versão clássica do modelo de Lotka-Volterra, que representa a dinâmica de interação que ocorre entre as duas espécies. O segundo modelo que será discutido foi elaborado pelos autores deste artigo e incorpora o fenômeno da eutrofização, expondo suas interferências diretas nas populações de peixes e no meio aquático. Para ambos, informações reais sobre as espécies estudadas foram coletadas e auxiliaram no cálculo dos parâmetros usados no processo de modelagem matemática.

De modo mais específico, os objetivos foram estudar o modelo presa-predador de Lotka-Volterra; compreender o comportamento das populações de atuns e sardinhas ao longo do tempo e como essas duas populações interagem entre si, sem e com a eutrofização no meio aquático; levantar dados reais sobre as espécies e estimar os parâmetros da modelagem; realizar simulações numéricas via método de Euler e plotar gráficos capazes de auxiliar no entendimento do fenômeno. A linguagem de programação escolhida foi Python.

Nas próximas seções serão explicitados os detalhes do problema investigado, dos modelos matemáticos elaborados e dos resultados obtidos.

2 Exposição do tema

O *Thunnus albacares*, também conhecido como albacora-laje é uma espécie de atum epipelágica (ver Figura 1), isto é, que vive em uma camada superior do oceano e sua distribuição ocorre em águas tropicais e subtropicais dos oceanos Atlântico, Índico e Pacífico (COLLETE; NAUEN, 1983), sendo ausente no mar Mediterrâneo (GARCIA, 1994). É possível observar sua presença nos limites geográficos 59°N - 48° S. Estes peixes, por sua vez, possuem uma predileção por águas quentes, buscando viver em um intervalo de temperatura de 15°C - 31°C, e em uma profundidade, usualmente, de 1 à 100 metros.

Em geral, o peso médio desta espécie de atum é de aproximadamente 110kg, chegando a uma idade máxima reportada de 9 anos (ALTMAN; DITTMER, 1962). Sua alimentação é composta por pequenos peixes, sendo a sardinha o mais usual.



Figura 1: Atum ou Albacora-laje (*Thunnus albacares*).

Fonte: <http://www.klimanaturali.org/2011/05/albacora-de-laje-thunnus-albacares.html>. Acesso em 16 ago. 2022.

A *Sardinella brasiliensis*, também conhecida como sardinha-verdadeira é uma espécie de sardinha que reside nos oceanos subtropicais (ver Figura 2), sendo possível observar sua distribuição nos limites geográficos 31°N - 36°S. A profundidade habitada por esta espécie é de 5 à 60 metros (GLIOTTI *et al*, 2010), sendo encontrada principalmente na costa brasileira. A sardinha-verdadeira é um peixe que se alimenta de plâncton em sua fase inicial de crescimento, e após este período, alimenta-se de fitoplâncton.



Figura 2: Sardinha-verdadeira (*Sardinella brasiliensis*).

Fonte: <https://caraguablog.blogspot.com/2015/07/termina-hoje-proibicao-da-pesca-de.html>. Acesso em 16 ago. 2022.

Neste estudo, um modelo matemático do tipo presa-predador foi considerado, em que a sardinha-verdadeira é a presa e o albacora-laje o predador. No entanto, existe um fator que interfere diretamente na condição de vida destes animais, que é a eutrofização.

A eutrofização é um processo que pode ser natural, mas em muitos casos é provocado direta ou indiretamente por ação humana, via lançamento de resíduos domésticos nas águas, resíduos industriais e da agricultura. Trata-se do crescimento excessivo de fitoplânctons (algas), o que gera consequências visto que a expansão destas populações faz com que a água se torne turva, com níveis críticos de oxigênio e com ausência de luz solar. A Figura 3 apresenta uma ilustração.



Figura 3: Ilustração com ambiente normal (à esquerda) e ambiente com eutrofização (à direita).

Fonte: Elaborado pelo autor.

No início da eutrofização, ocorre um aumento de plâncton e fitoplâncton, podendo significar um acréscimo interessante para animais heterótrofos, entretanto com o passar do tempo, o nível de oxigênio começa a cair drasticamente. O crescimento de algas também interfere diretamente na passagem de energia luminosa proveniente do sol para dentro da água, causando dificuldades e comprometendo a realização de fotossíntese por parte das plantas mais profundas, que necessitam de luz solar.

Em geral, de acordo com Santos (2017), a eutrofização transcorre da seguinte forma:

- O aumento de nutrientes (orgânicos ou minerais) disponíveis na água, leva à um crescimento acelerado no número de algas na superfície.
- Existem predadores naturais das algas (como a sardinha), mas que são incapazes de conter o avanço dos fitoplânctons.
- Algas mais profundas morrem, devido a falta de luz do sol.
- Surgem as bactérias decompositoras aeróbias, que usam oxigênio para efetuar a decomposição.
- Há redução drástica de oxigênio no meio.
- Como consequência há morte de peixes, outros animais e plantas.
- Surgem então as bactérias anaeróbias, para decompor a fauna e a flora mortas.
- Resíduos tóxicos são liberados na água.

Com base nas informações apresentadas, evidencia-se a importância de pesquisas relacionadas a essa questão, cada vez mais presente nos corpos hídricos das áreas urbana e rural, assim como nos mares e oceanos.

3 Modelagem matemática

3.1 Modelo presa-predador

As equações diferenciais ordinárias que representam o modelo de Lotka-Volterra ou presa-predador são dadas por (BOYCE; DIPRIMA, 2017):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases}, \quad (1)$$

em que x representa a população de presas em um ambiente no qual há condições suficientes para o crescimento das presas, a uma taxa representada por a ; y é a população de predadores que se alimentam de x e por essa razão se beneficiam do encontro entre x e y , representado pela multiplicação xy , limitando o crescimento indefinido de x . O coeficiente a é a taxa de crescimento das presas, na ausência de predadores. Logo, $a > 0$. O parâmetro b ($b > 0$), é a taxa de mortalidade dos predadores, α a taxa de mortes no encontro entre x e y , e por fim, β a taxa com que o alimento influencia no crescimento de y .

O sistema de equações (1) foi desenvolvido em artigos manuscritos por Alfred J. Lotka (1880-1949), um biofísico americano, em 1925 e por Vito Volterra (1860-1940), um importante matemático italiano, em 1926. Na modelagem de problemas biológicos, o modelo presa-predador passa por diferentes adaptações e mudanças para que seja possível transmitir um vislumbre de situações que podem ocorrer.

Durante a análise do modelo, é usual determinar três representações gráficas: a de variação da população de presas em relação ao tempo; a de variação da população de predadores em relação ao tempo e a variação da população de presas em relação à população de predadores. Para compreender o comportamento e as interações entre estas duas populações, supondo à princípio a não interferência de outros fatores, tem-se:

1. Se a população de predadores está crescendo, conseqüentemente a população de presas tenderá a cair. Haverá um momento em que a população de predadores encontrará seu ápice, pois não haverá alimento (presas) suficiente para todos. Isto ocasionará a morte de parte dos predadores.
2. Em decorrência, a população de presas volta a crescer, levando à nova disponibilidade de alimento para os predadores, cuja população volta a aumentar. E o ciclo se repete, ou seja, chegará um ponto em que a população de presas cairá e a de predadores chegará ao seu ápice, resultando no início de uma nova queda no número de predadores.

3.2 Método de Euler

Considere um Problema de Valor Inicial (PVI), ou problema de *Cauchy*, definido por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

em que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função conhecida e $x = x(t)$, $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, é a função a ser encontrada (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Neste trabalho optou-se por resolver numericamente os modelos propostos, via método de Euler, com a seguinte discretização. Considere um PVI como em (2), definido para $t \in [0, t_f] \subset \mathbb{R}$. Seja

$$\Pi : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$$

uma partição regular de $[0, t_f]$ com N subintervalos e espaçamento $h = (t_f - t_0)/N$. Quando for possível, denota-se a solução exata em um ponto $t = t_i$, $i = 0, \dots, N$, por $x_i = x(t_i)$ e por ξ_i a solução aproximada, que é fornecida por algum esquema numérico específico (SILVEIRA; GARCIA, 2020).

No esquema numérico explícito de Euler (de primeira ordem), a solução aproximada ξ_{i+1} é definida por

$$\xi_{i+1} = \xi_i + hf(t_i, \xi_i), \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (3)$$

O intervalo de estabilidade absoluta J de um método numérico pode ser obtido ao aplicá-lo em um PVI (2), cuja função f é definida por $f(t, x) = \lambda x(t)$, com $\lambda < 0$. Se a solução numérica encontrada satisfaz a condição $\lim \xi_n = 0$ para $\lambda h \in J$, então J é o intervalo de estabilidade do método em questão. Para o método de Euler tem-se $J = (-2, 0)$ (BUCHANAN; TURNER, 1992).

Adaptando o Sistema (1) para o método escolhido, obtém-se:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h(ax_i - \alpha x_i y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h(-by_i + \beta x_i y_i) \end{cases}. \quad (4)$$

Como reportado anteriormente, dois modelos matemáticos do tipo presa-predador foram considerados neste trabalho, para estudar as interações entre as espécies de peixes albacora-laje ou atum (predador) e sardinha-verdadeira (presa).

O primeiro deles é a versão clássica do modelo de Lotka-Volterra e será tratado na Seção 4. Já na Seção 5 encontra-se o segundo modelo matemático, proposto pelos autores deste artigo e no qual foi inserido um parâmetro em cada equação para representar a eutrofização, que pode estar em um nível ideal, acima ou abaixo deste, com o objetivo de analisar a evolução temporal das populações frente a esse processo. Para as duas abordagens, uma pesquisa foi feita com o intuito de se obter elementos e características importantes das espécies, essenciais para a definição dos valores dos parâmetros do sistema.

Para fins de simplificação da escrita do texto, daqui em diante, vamos nos referir às duas espécies (de predadores e presas), respectivamente como atum e sardinha.

4 Modelo matemático sem eutrofização

4.1 Estimação dos parâmetros

As primeiras resoluções numéricas do Sistema (1), via formulação (4), foram executadas supondo ausência de eutrofização, portanto, considerando somente o modelo matemático de Lotka-Volterra.

A ideia desde o princípio foi levantar dados reais sobre as espécies, que fundamentassem as escolhas de valores para os parâmetros do sistema de equações, à saber, a , b , α e β . Além das referências bibliográficas que serão indicadas ao longo desta seção e das demais, a base de dados online denominada *Fish Base*¹ foi utilizada. Trata-se de um sistema global de informações sobre a biodiversidade de peixes, disponível na internet e que conta com milhares de colaboradores, que somente podem divulgar dados já publicados e validados, de modo a preservar a veracidade dos mesmos.

Dessa maneira, para o atum uma massa média de 110kg foi tomada e para a sardinha, uma massa média de 50g. De acordo com Roubach *et al* (2002), na alimentação diária um peixe consome, aproximadamente, 3% de sua massa. Portanto, para o atum isto equivale à 3,3kg. Supondo neste caso que a alimentação do atum é, em sua maioria, composta por sardinhas, adotou-se um consumo de 3kg diários, enquanto o restante provém de outras fontes. Logo, são necessárias 60 sardinhas por dia.

Outro elemento importante está relacionado com o tempo de duplicação das espécies. O tempo médio de duplicação da população de atuns está em 2 à 5 anos, com tempo máximo de 8 anos (FROESE *et al*, 2016). Portanto, seja T_d o tempo médio de duplicação da população de atuns; os cálculos foram feitos supondo 4 anos e também 5 anos.

Se um atum se alimenta de 60 sardinhas em um dia, então para 4 anos tem-se 87.600. Ou seja, para $T_d = 4$, um atum irá necessitar de 87.600 sardinhas para gerar um outro indivíduo. Já para $T_d = 5$, obtém-se que um atum precisa se alimentar de 109.500 sardinhas, até que seja capaz de produzir um novo indivíduo.

Assim, o parâmetro β do Sistema (1), foi determinado. Se $T_d = 4$, então

$$\beta = 2,3 \times 10^{-6}. \quad (5)$$

Analogamente, para $T_d = 5$, segue que:

$$\beta = 1,8 \times 10^{-6}. \quad (6)$$

Para encontrar uma estimativa do parâmetro α do Sistema (1), os seguintes dados foram observados: o peso médio de uma sardinha é de 50g e em um cardume existem, pelo menos, 10 toneladas de sardinhas. Logo, são ao menos 200.000 sardinhas.

Por conseguinte, se em um dia um atum se depara com um cardume de sardinhas e o mesmo consome 60 sardinhas, em um ano, tem-se $\alpha = 0,1095$. Entretanto, as simulações revelaram que esse valor para α não é suficiente para sustentar uma população de atuns. A conclusão obtida foi que a população de predadores necessita encontrar mais de um cardume por dia, para que a mesma possa prosperar. Portanto, supondo que um atum possa encontrar, por exemplo 10 cardumes em um dia, o parâmetro resultante fica $\alpha = 0,01095$.

Quanto ao parâmetro b do Sistema (1), tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = -by \Rightarrow y(t) = ce^{bt}. \quad (7)$$

Sabendo que a população de predadores leva em média $T_d = t_2 - t_1$ anos para duplicar, na expressão (7), calculando

$$y(t_2) = 2y(t_1), \quad (8)$$

chega-se à $b = 0,1732$, se $T_d = 4$ anos.

¹<https://www.fishbase.de/home.htm>

De modo análogo, para um tempo de duplicação da população de atuns igual a 5 anos, o valor é $b = 0,1386$.

Por fim, uma aproximação para o valor do coeficiente a do Sistema (1) ocorreu de modo semelhante ao que foi feito para b . De acordo com as referências consultadas, o tempo de duplicação da população de sardinhas é menor do que 15 meses (FROESE *et al*, 2016). Simulações foram realizadas para diferentes tempos de duplicação da referida população e os resultados serão apresentados escolhendo-se $a = 0,8$, supondo portanto o tempo de 10 meses para a ocorrência da duplicação da população de presas.

Isto posto, considerando o tempo de duplicação da população de atuns como 4 anos, o sistema resultante fica:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,8x - 0,01095xy \\ \frac{dy}{dt} = -0,1732y + 0,0000023xy \end{cases} \quad (9)$$

Se adotar 5 anos como o tempo de duplicação da população de predadores, então o sistema será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,8x - 0,01095xy \\ \frac{dy}{dt} = -0,1386y + 0,0000018xy \end{cases} \quad (10)$$

4.2 Simulações e resultados

As simulações computacionais dos sistemas de equações diferenciais, descritos em (9) e (10), foram implementadas via método de Euler, utilizando a linguagem Python com códigos próprios elaborados. O espaçamento admitido foi $h = 0,01$, obtido a partir da quantidade de subintervalos $N = 10.000$ e do tempo total avaliado de 100 anos. As condições iniciais (ou quantidades iniciais de indivíduos) estabelecidas para as duas populações foram $x(0) = 300.000$ sardinhas e $y(0) = 50$ atuns.

A seguir alguns resultados serão apresentados.

1. Simulações do sistema (10), para $T_d = 5$ anos e um tempo total de 100 anos

As Figuras 4 e 5 mostram a evolução temporal das populações de predadores (atuns) e presas (sardinhas), respectivamente. A Figura 6, por sua vez, ilustra a trajetória no plano de fase entre estas duas populações de peixes.

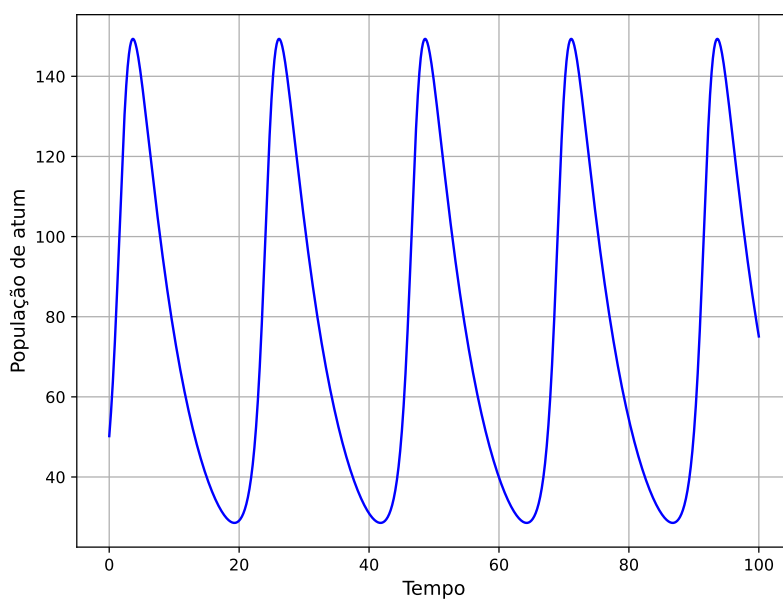


Figura 4: Evolução temporal da população de atuns.

Fonte: Elaborado pelo autor.

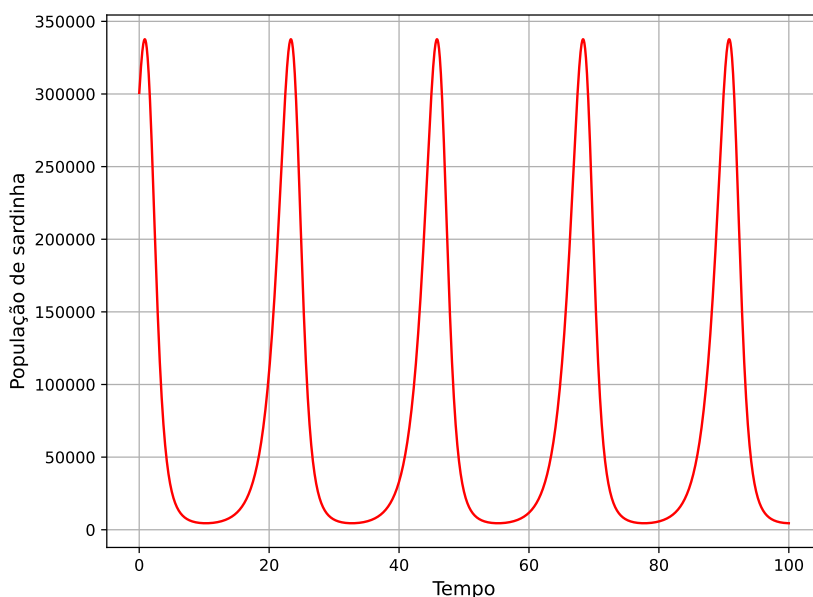


Figura 5: Evolução temporal da população de sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

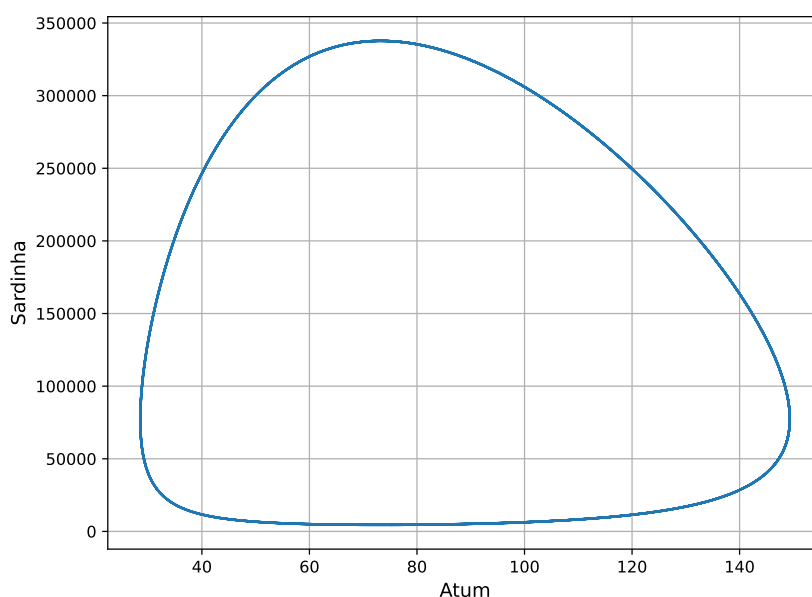


Figura 6: Plano de fase para as populações de atuns e sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se nas Figuras 4 e 5 a presença de funções periódicas, o que demonstra o caráter cíclico das populações de predadores e presas. Para o atum, existe um ápice acima de 140 indivíduos e uma população mínima abaixo de 40 indivíduos. Já para as sardinhas, ocorre uma população máxima acima de 300.000 indivíduos (que foi a população inicial considerada) e pontos mínimos extremamente pequenos, situando-se próximos a zero.

A representação gráfica do plano de fase das soluções do sistema está na Figura 6 e confirma o ciclo de interações que acontece entre as duas espécies estudadas.

2. Simulações do sistema (9), para $T_d = 4$ anos e um tempo total de 100 anos

Neste cenário, mantendo as condições iniciais definidas para os predadores e as presas, é possível observar na Figura 7 picos superiores para a população de atuns, que alcançaram a marca de 160 indivíduos, enquanto seu vale permaneceu próximo ao resultado encontrado na primeira situação simulada (ver Figura 4).

Para a população de sardinhas, a Figura 8 mostra uma queda em seu ápice, quando comparado ao resultado atingido na simulação anterior, porém seu ponto de mínimo é extremamente semelhante (ambos próximos à zero). No plano de fase (conferir Figura 9) as populações mantiveram o comportamento cíclico, o que significa que, caso não ocorram interferências externas, ao longo do tempo tal padrão permanecerá.

Outro fato constatado é que ao diminuir T_d de 5 para 4 anos, a periodicidade dos ciclos foi reduzida. Na Figura 4 tem-se um período superior à 20 anos, enquanto que na Figura 7 esse tempo decresceu para 20 anos.

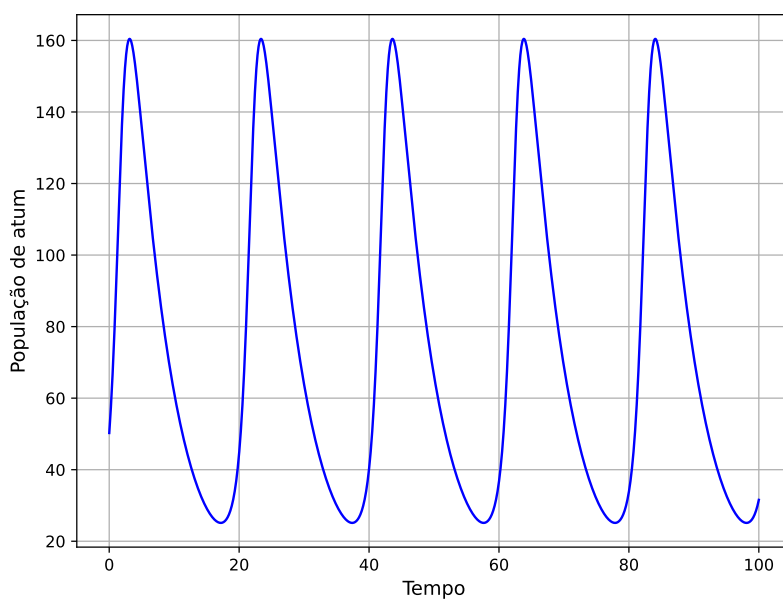


Figura 7: Evolução temporal da população de atuns.

Fonte: Elaborado pelo autor.

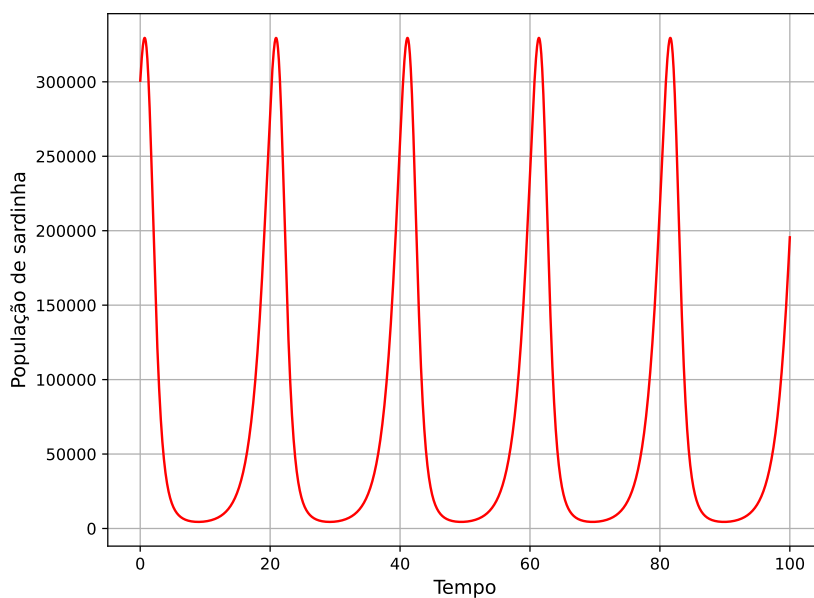


Figura 8: Evolução temporal da população de sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

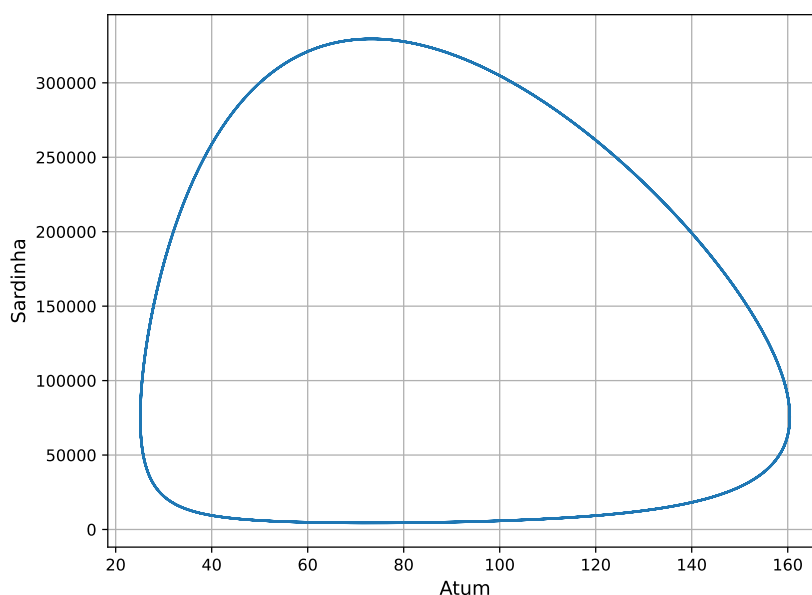


Figura 9: Plano de fase para as populações de atuns e sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo geral, foi possível verificar que o modelo do tipo presa-predador de Lotka-Volterra consegue representar, de modo satisfatório, as interações entre as duas espécies pesquisadas, de atum e sardinha, levando-se em conta dados reais destes peixes. Entretanto, esta é uma abordagem que a princípio não considera fatores externos que podem ser decisivos na manutenção ou não das populações.

5 Modelo matemático envolvendo eutrofização

Como visto anteriormente, a eutrofização consiste no crescimento desenfreado de fitoplânctons (algas), na superfície de corpos d'água, como rios, lagos e reservatórios, mas também nos mares e oceanos. Em muitos casos, decorre de atividades humanas que despejam resíduos nas águas e como consequência, impacta todo o ecossistema aquático.

Neste estudo, um segundo modelo matemático do tipo presa-predador foi elaborado pelos autores, onde um parâmetro foi incluído em cada equação do sistema para representar a eutrofização.

5.1 Equações e parâmetros

Um fator eutrofizante f_1 , por suposição, irá alterar o parâmetro a , através da expressão $(a - f_1)$ e um fator eutrofizante f_2 , vai modificar o parâmetro b , via expressão $(-b \cdot f_2)$.

Desse modo, o sistema de equações diferenciais torna-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - f_1)x - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = (-b f_2)y + \beta xy \end{cases} \quad (11)$$

Para o parâmetro a , relacionado à população de sardinhas, foi incluído um fator f_1 obedecendo as seguintes hipóteses, considerando ξ a densidade de fitoplânctons:

- Se ξ estiver muito abaixo do ideal, a população de sardinhas (presas) sofrerá impacto, uma vez que os fitoplânctons são alimento para esta população. Indivíduos vão perder a vida em virtude da menor oferta de alimento.
- Se ξ estiver abaixo do ideal, ocorre uma diminuição na nutrição das sardinhas, o que implica que a população crescerá menos.
- Caso ξ esteja um pouco acima do ideal, a população de sardinhas crescerá em menor velocidade, devido ao processo de eutrofização e interferência do fitoplâncton no meio ambiente aquático.
- Caso ξ esteja muito acima do ideal, a quantidade de O_2 reduzirá drasticamente, o que resultará em níveis altos de morte para a população de sardinhas.

Supondo, para efeito dos cálculos, $\xi = 1$ a densidade ideal de fitoplânctons para a população de sardinhas, $\xi = 0$ a ausência total de fitoplânctons e $\xi = 2$ sendo uma grande quantidade de fitoplânctons, tem-se:

$$f_1 = \begin{cases} -\xi + 1, & \text{se } \xi < 1 \\ \xi - 1, & \text{se } 1 < \xi \leq 2 \end{cases} \quad (12)$$

O gráfico do fator f_1 encontra-se na Figura 10.

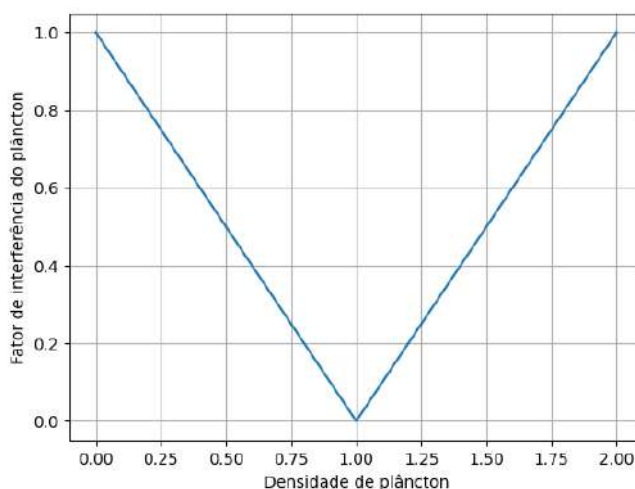


Figura 10: Gráfico do fator f_1 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a equação que representa a população de atuns, um fator f_2 foi introduzido, de acordo com as seguintes hipóteses:

- Se ξ estiver abaixo do ideal, a população de atuns não sofrerá influência direta do fitoplâncton, pois a mesma não se alimenta de algas e permanecerá sendo impactada pela ausência de presas para se alimentar.
- Se ξ estiver acima do ideal, a população de atuns sofrerá interferência uma vez que o processo de eutrofização irá comprometer o meio aquático, e conseqüentemente, a sobrevivência da população de atuns.

Portanto, a função definida para o fator f_2 é dada por:

$$f_2 = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi < 1 \\ \xi, & \text{se } 1 < \xi \leq 2 \end{cases} \quad (13)$$

A Figura 11 mostra a representação gráfica do fator f_2 .

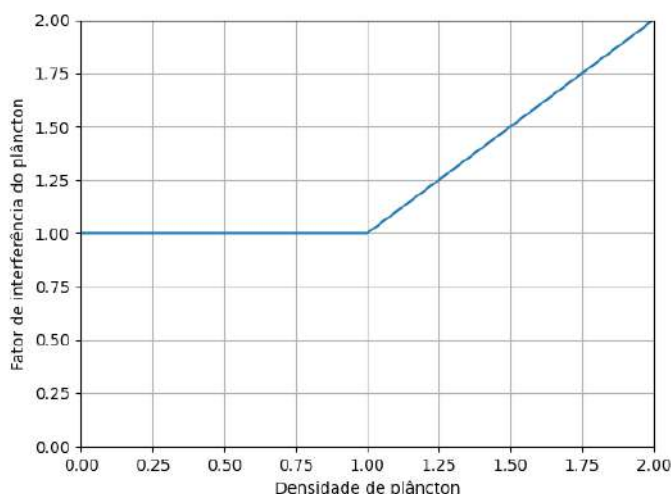


Figura 11: Gráfico do fator f_2 .

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Simulações e resultados

Nesta seção as simulações computacionais efetuadas serão apresentadas, para diferentes situações de eutrofização, com um tempo de duplicação da população de predadores (atuns) tomado como 5 anos e tempo total de teste igual a 100 anos. De modo análogo, o método de Euler foi implementado em linguagem Python, adotando-se $h = 0,01$ e $N = 10.000$. As condições iniciais foram mantidas, isto é, $x(0) = 300.000$ e $y(0) = 50$.

De posse dos valores dos parâmetros calculados na seção anterior, o modelo presa-predador considerado é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (0,8 - f_1)x - 0,01095xy \\ \frac{dy}{dt} = (-0,1386 \cdot f_2)y + 0,0000018xy \end{cases} \quad (14)$$

Ao longo deste estudo foram executados vários testes, pressupondo diferentes possibilidades e circunstâncias compreendendo o processo de eutrofização. Na sequência tem-se destacados os resultados de quatro simulações realizadas, onde alteram-se os fatores eutrofizantes para cada situação e cada população de indivíduos. Os demais testes e resultados são também comentados ao longo do texto que se segue.

1. Densidade de fitoplâncton um pouco abaixo do ideal, ξ igual a 0,9

Com base nas hipóteses estabelecidas e nas funções definidas na Subseção 5.1, segue que neste cenário os fatores de eutrofização são $f_1 = 0,1$ e $f_2 = 1$.

As Figuras 12, 13 e 14 exibem a evolução temporal alcançada para as populações de atum, sardinha e o plano de fase, respectivamente.

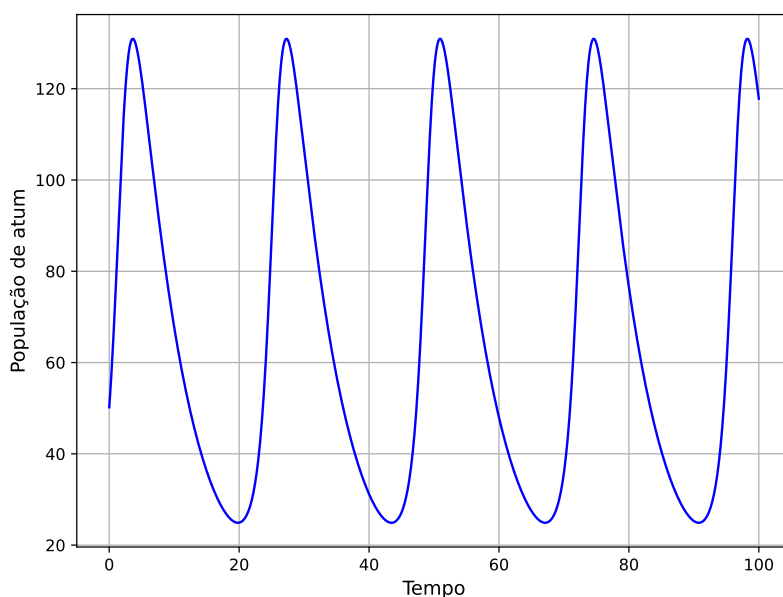


Figura 12: Evolução temporal da população de atuns.

Fonte: Elaborado pelo autor.

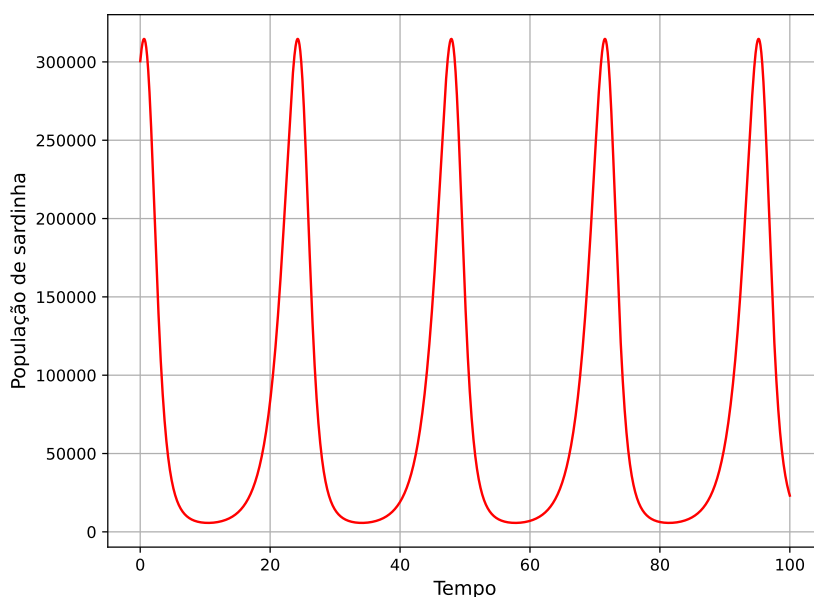


Figura 13: Evolução temporal da população de sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

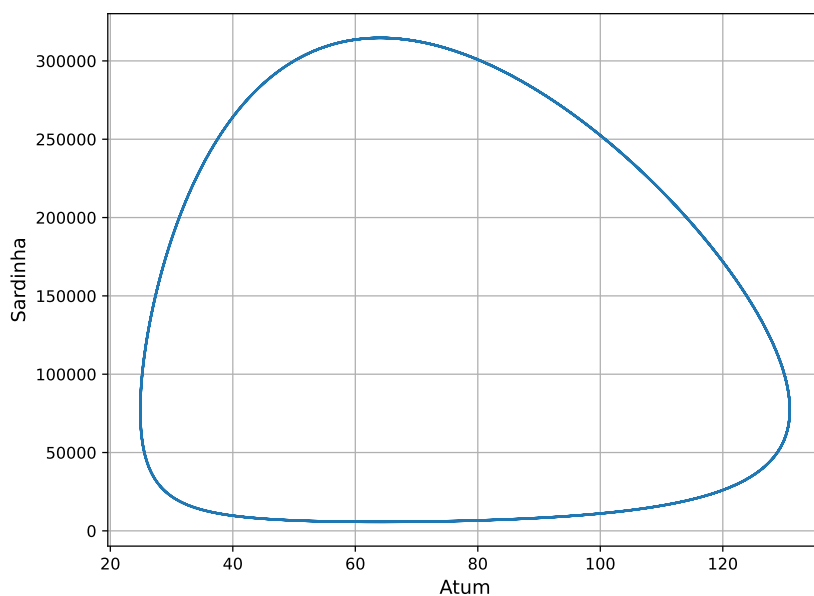


Figura 14: Plano de fase para as populações de atuns e sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com os resultados obtidos, observa-se uma influência direta da eutrofização nas populações de presa e predador. Para o albacora-laje (atum), é visualizado na Figura 12 um decréscimo no ápice da

população, semelhantemente ao ocorrido para a sardinha-verdadeira (sardinha), verificado na Figura 13. Com isto, já é possível ver que uma pequena alteração no fator eutrofizante afeta diretamente as duas espécies. A Figura 14 apresenta o retrato de fase para o atum e a sardinha, que se mantém cíclico.

Para a densidade de fitoplâncton um pouco acima do ideal, os resultados foram semelhantes, mantendo valores equivalentes para os picos e vales.

2. Densidade de fitoplâncton abaixo do ideal, ξ igual a 0,5

Para esta situação, os fatores de eutrofização são $f_1 = 0,5$ e $f_2 = 1$. Os resultados das simulações estão nas Figuras 15, 16 e 17.

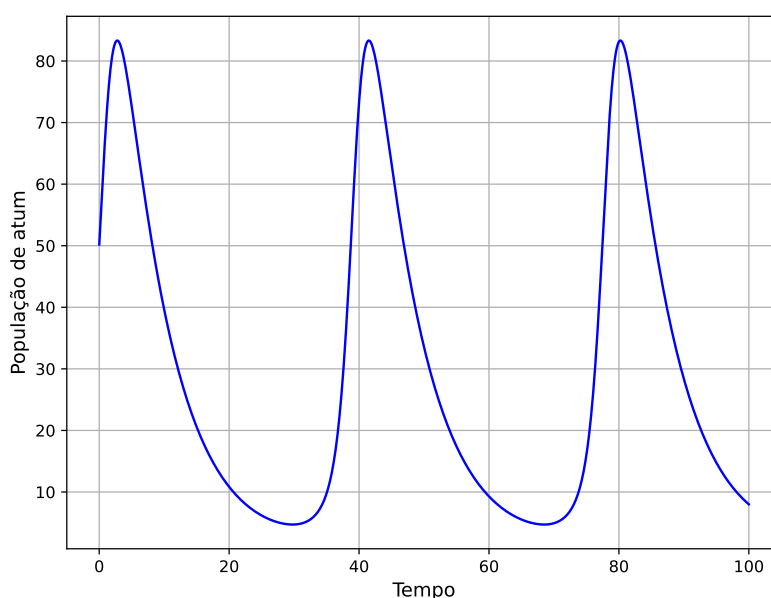


Figura 15: Evolução temporal da população de atuns.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso, houve um maior impacto do fator eutrofizante diretamente no crescimento da população de predadores (atuns). É possível observar na Figura 15 uma grande queda no ápice da população de atuns, atingindo um valor próximo à 80 indivíduos.

Para a população de presas (sardinhas) visualiza-se na Figura 16 um ápice próximo a 350.000 indivíduos, mas que ocorreu posteriormente a uma queda inicial considerável. A densidade de fitoplâncton abaixo do ideal provoca falta de alimento para a população de sardinhas, entretanto, como o meio ambiente aquático ainda não está comprometido pelo excesso de algas, há possibilidade de recuperação na natalidade da população de sardinhas por meio da obtenção de outras fontes alimentares e de nutrição.

A Figura 17 apresenta o plano de fase envolvendo as duas populações, retratando ainda um comportamento cíclico.

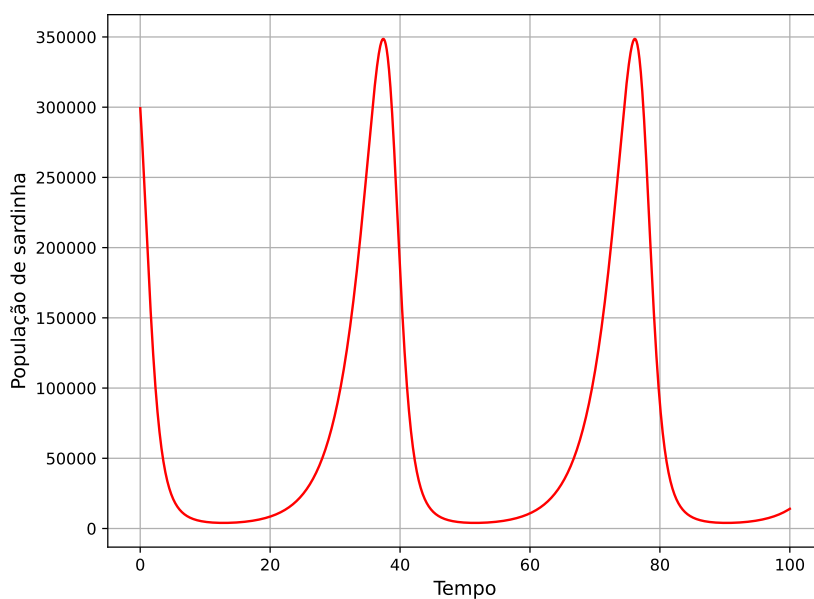


Figura 16: Evolução temporal da população de sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

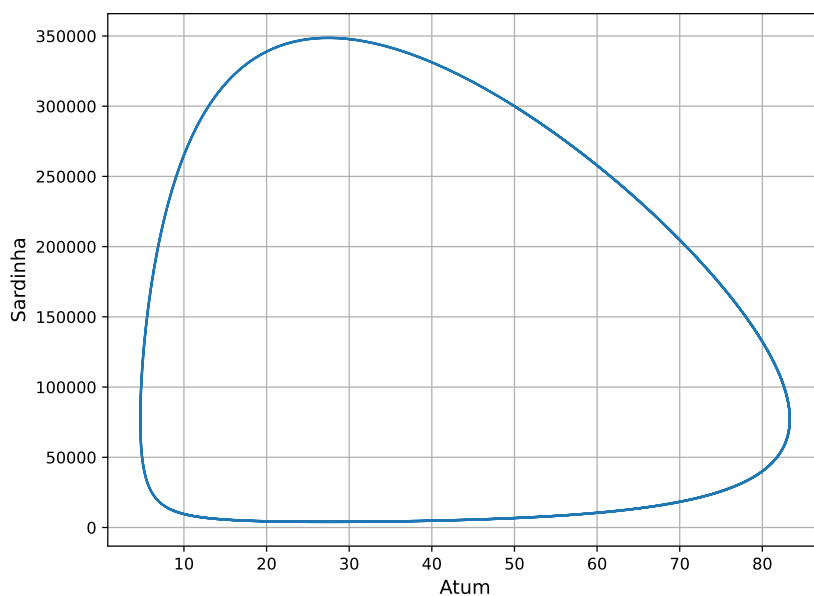


Figura 17: Plano de fase para as populações de atuns e sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Densidade de fitoplâncton acima do ideal, ξ igual a 1,5

Os fatores de eutrofização são $f_1 = 0,5$ e $f_2 = 1,5$.

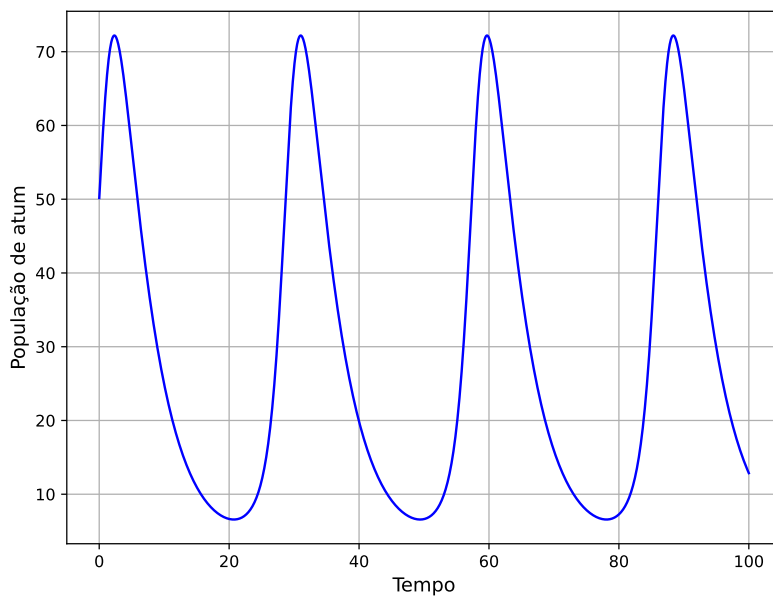


Figura 18: Evolução temporal da população de atuns.

Fonte: Elaborado pelo autor.

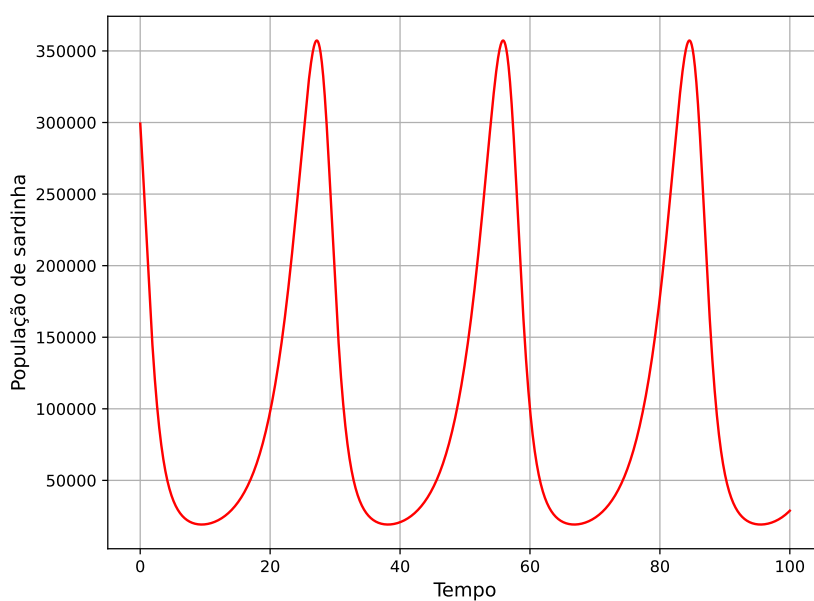


Figura 19: Evolução temporal da população de sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

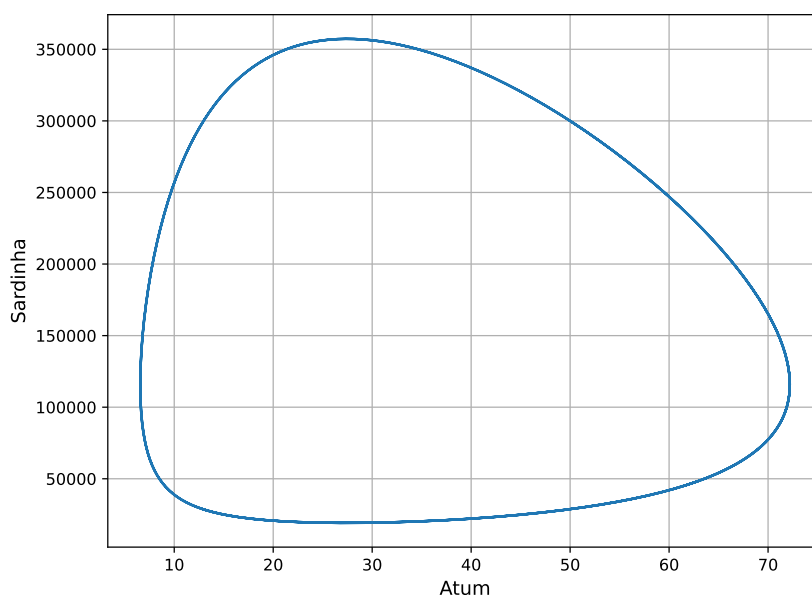


Figura 20: Plano de fase para as populações de atuns e sardinhas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 18 retrata uma queda ainda mais acentuada no ápice da população de atuns (predadores). Com o aumento da densidade de algas ou fitoplânctons, o fator eutrofizante intensifica-se, ocasionando um decréscimo de indivíduos pertencentes à população de atuns.

Para as sardinhas, pode-se observar na Figura 19 um acréscimo no número de indivíduos, ultrapassando a marca de 350.000 seres. Este acréscimo, vale ressaltar, se dá devido a diminuição de predadores e aumento de alimento para as sardinhas (presas).

O plano de fase, exibido no gráfico da Figura 20, mostra que ainda há manutenção do comportamento cíclico característico das interações entre estas espécies de peixes.

4. Densidade de fitoplâncton muito abaixo do ideal, ξ igual a 0,2

Diante destas condições, os fatores de eutrofização calculados e que foram utilizados no sistema de equações diferenciais são dados por $f_1 = 0,8$ e $f_2 = 1$.

Neste caso, com o passar do tempo se sucede a extinção das populações de predadores (atuns) e presas (sardinhas), conforme fica evidenciado nas Figuras 21 e 22, respectivamente. Como a densidade de fitoplânctons atinge nível demasiadamente abaixo do ideal, não há alimentação suficiente para a população de sardinhas e como decorrência, intercorre o declínio de ambas as populações, até que se atinja o fim.

Tal fenômeno também pode ser visualizado no plano de fase exposto na Figura 23. Nota-se a ausência de um comportamento cíclico, até então alcançado nos contextos anteriores, o que torna a existência do sistema insustentável ou inviável.

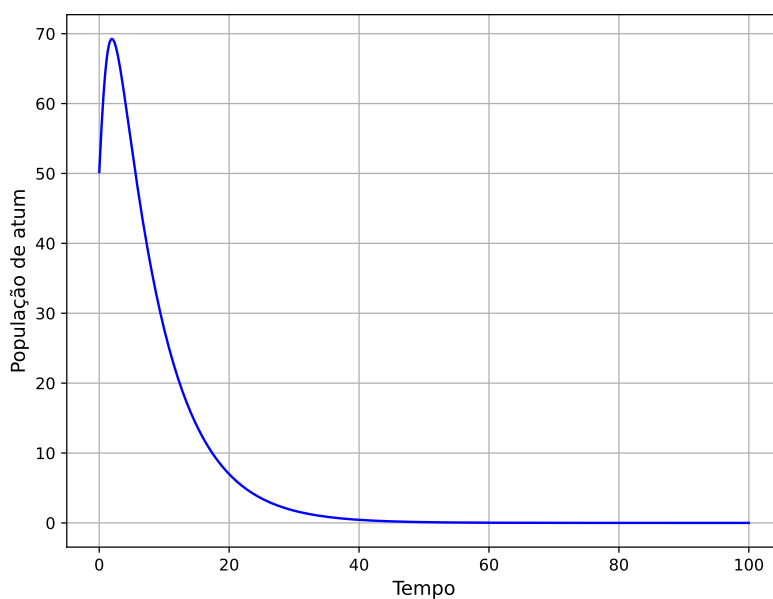


Figura 21: Simulação do comportamento de albacora-laje.

Fonte: Elaborado pelo autor.

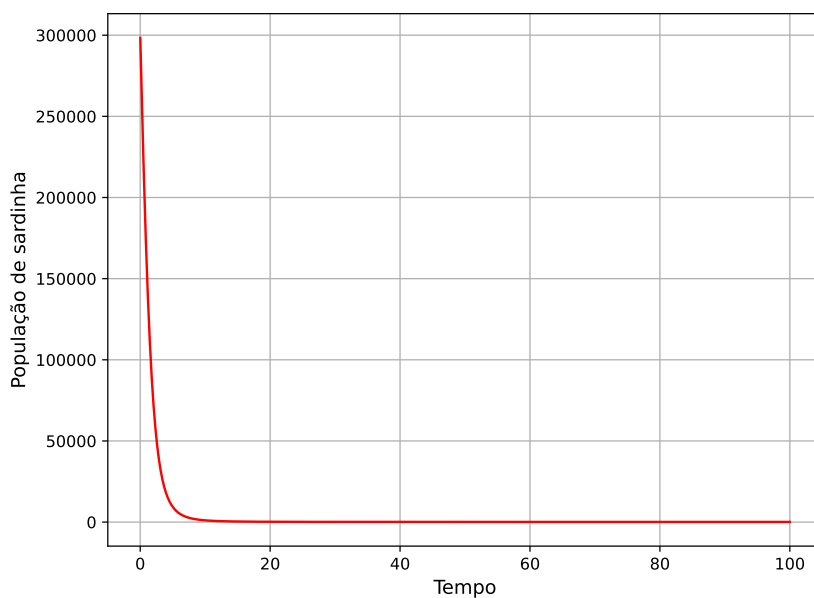


Figura 22: Simulação do comportamento de sardinha-verdadeira.

Fonte: Elaborado pelo autor.

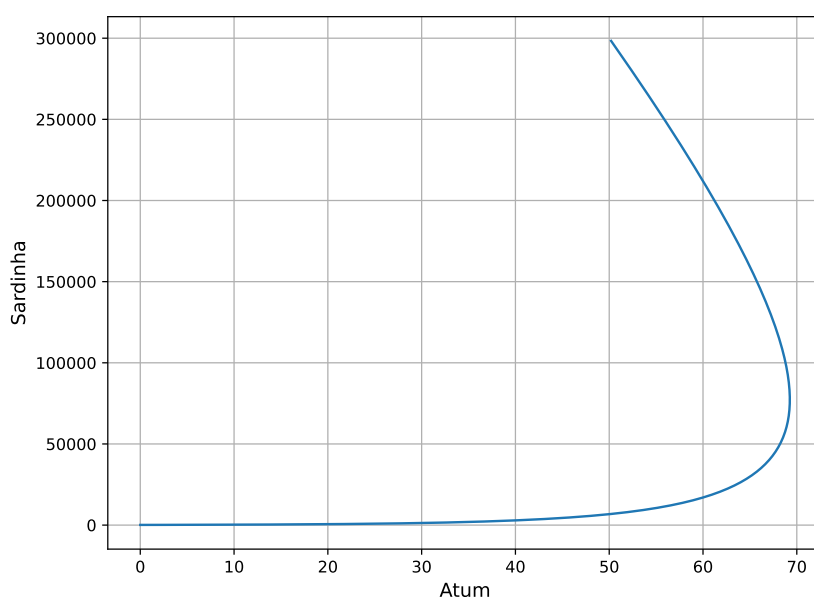


Figura 23: Retrato de fase para populações de albacora-laje e sardinha-verdadeira.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o cenário em que a densidade de fitoplâncton está muito acima do ideal, assim como no caso precedente, o sistema torna-se insustentável. O processo de eutrofização acentuado provoca a extinção da população de atuns. As sardinhas também sofrerão de maneira intensa com a eutrofização e sua população atingirá níveis extremamente baixos. Não há comportamento cíclico.

Se a densidade de fitoplâncton é considerada extremamente abaixo do ideal, como esperado não há um sistema sustentável tampouco comportamento cíclico entre as populações.

Finalizando a sequência de testes, com um cenário cuja densidade de fitoplâncton seja extremamente acima do ideal, novamente comprova-se que o sistema é insustentável, com as populações de presas e predadores sendo extintas. Pelo fato de supor um fator eutrofizante extremamente alto, a queda numérica é mais intensa em ambos os casos. Além disso, o plano de fase não é capaz de completar um ciclo.

6 Considerações finais

A modelagem matemática de problemas biológicos, inclusive de fenômenos ligados à natureza, constitui-se numa alternativa importante para se analisar cenários e aferir conclusões, podendo auxiliar no processo de tomada de decisão por parte de órgãos e governos.

Os propósitos iniciais deste trabalho foram estudar o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, implementar computacionalmente um método numérico para a resolução (método de Euler) e aplicar em um problema real, envolvendo o predador atum e a presa sardinha. Pesquisas foram realizadas com o intuito de se obter as principais características destas duas espécies, a fim de estimar os parâmetros presentes no sistema de equações diferenciais. Ao aprofundar na busca por informações, a eutrofização surgiu como um problema grave que afeta os peixes assim como toda a fauna e a flora que habitam o meio aquático.



Altos níveis de fitoplâncton, mesmo que indique um aumento na oferta de alimento para a população de sardinhas, a consequência é a queda na oxigenação da água e o ambiente vai se tornando inóspito para todos os seres vivos.

O processo de eutrofização, de forma natural, ocorre ao longo de grandes períodos de tempo, para a evolução dos ecossistemas. Entretanto, tem se difundido cada vez por conta de intervenções humanas. O despejo de materiais orgânicos e minerais nas águas favorece o início da eutrofização, podendo causar a intoxicação e morte dos animais, das plantas e tornar a água imprópria para o uso humano.

Neste sentido, um novo objetivo deste estudo passou a ser o desenvolvimento de um modelo matemático que inclui a eutrofização. As simulações de cenários mostraram que o equilíbrio é essencial. Densidade de fitoplâncton abaixo do ideal começar a atingir as populações que se alimentam das algas, como é o caso da sardinha. Mas se a densidade ultrapassa e fica acima do ideal, então as espécies que se alimentam dessas algas não são capazes de controlar o crescimento acelerado das plantas aquáticas, o que compromete todo o corpo aquático.

Portanto, conclui-se que há uma grande necessidade de se combater práticas que possam ocasionar a eutrofização, tais como a pesca ilegal de peixes diretamente ligados a planctófagos ou o despejo de materiais não tratados, ricos em nutrientes orgânicos e/ou minerais próximos a lagos, rios e mares. Em trabalhos futuros, almeja-se inserir outros fatores no sistema de equações para torná-lo mais abrangente, bem como aprimorar a pesquisa sobre eutrofização.

7 Referências Bibliográficas

- ALTMAN, P. L.; DITTMER, D. S. (ed.). **Growth, including reproduction and morphological development**. Washington: Federation of American Societies for Experimental Biology, [1962].
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- BUCHANAN, J. L.; TURNER, P. R. **Numerical methods and analysis**. Singapore: McGraw Hill, 1992.
- COLLETE, B. B.; NAUEN, C. E. **Scombrids of the world**. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 1983. (FAO species catalogue; v. 2).
- FIGUEIRÊDO, M. C. B. *et al.* Avaliação da vulnerabilidade ambiental de reservatórios à eutrofização. **Engenharia Sanitária e Ambiental**, v. 12, n. 4, p. 399-409, 2007.
- FROESE, R. *et al.* Estimating fisheries reference points from catch and resilience. **Fish and Fisheries**, v. 18, n. 3, p. 506-526, 2016.
- GARCIA, S. M. **World review of highly migratory species and straddling stocks**. Rome: FAO, 1994.
- GIGLIOTTI, E. S. *et al.* Spatial analysis of egg distribution and geographic changes in the spawning habitat of the Brazilian sardine *Sardinella Brasiliensis*. **Journal of Fish Biology**, v. 77,



p. 2248-2267, 2010. Disponível em:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1095-8649.2010.02802.x>. Acesso em: 14 nov. 2022.

GONZALEZ, A. P. N. **Aplicações do modelo presa-predador ao estudo da influência da dinâmica populacional de espécies de sardinha, cavala e atum e sobre o processo de eutrofização marinha**. 2008. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Ambiental) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2008.

ROUBACH, R. *et al.* **Nutrição e manejo alimentar na piscicultura**. Manaus: Embrapa, 2002.

Disponível em:

<https://www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/674011/nutricao-e-manejo-alimentar-na-piscicultura>. Acesso em: 20 jul. 2022.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.

SANTOS, D. **Eutrofização**. [S. l.: s. n.], 2017. Disponível em:

<https://djalmasantos.wordpress.com/2017/08/23/eutrofizacao/>. Acesso em: 16 ago. 2022.

SILVEIRA, G. P.; GARCIA, R. O. Análise das soluções numéricas do modelo do tipo presa-predador de Holling-Tanner. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 84-96, 2020. Edição Ermac. Disponível em:

<https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd>. Acesso em: 16 ago. 2022.