Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022
Edição Iniciação Científica

Estabilidade para sistemas impulsivos quase-lineares com impulsos em tempos variáveis

Stability for quasi-linear impulse systems with variable time impulses

Lenara Ferreira dos Santos
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
lenara.ferreira@unesp.br

Marta Cilene Gadotti
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mc.gadotti@unesp.br

Resumo

O presente artigo tem por objetivo abordar as equações diferenciais impulsivas (EDIs) no aspecto de comportamento assintótico, de modo específico, este trabalho apresenta resultados sobre estabilidade em sistemas quase-lineares com impulsos em tempos variáveis. Tais impulsos são de característica variável, pois dependem da solução do sistema em momentos específicos, determinados de acordo com o problema considerado. O estudo das EDIs é recente e composto, predominantemente, por trabalhos na literatura estrangeira, dessa forma, os resultados apontados neste texto trazem uma síntese do tratamento de soluções para estes sistemas impulsivos. A princípio, algumas definições significativas a respeito de estabilidade serão descritas para enfim enunciarmos e demonstrarmos teoremas de estabilidade para o sistema proposto.
Palavras-chave: Estabilidade. Sistemas impulsivos quase-lineares. Impulsos em tempo variável.

Abstract

This article aims to address the impulsive differential equations (EDIs) in the aspect of asymptotic behavior, specifically, this work presents results on stability in quasi-linear systems with impulses in variable times. Such impulses have a variable characteristic, as they depend on the solution of the system at specific moments, determined according to the problem considered. The study of EDIs is recent and consists predominantly of works in foreign literature, thus, the results indicated in this text bring a synthesis of the treatment of solutions for these impulsive systems. At first, some significant definitions regarding stability will be described so that we can finally state and demonstrate stability theorems for the proposed system.
Keywords: Stability. Quasi-Linear impulsive systems. Impulses at variable times.

Artigo recebido em ago. 2022 e aceito em nov. 2022

1 Introdução

No contexto das equações diferenciais, alguns fenômenos não se comportam de modo contínuo, assim, têm como característica a mudança abrupta de estado em determinados momentos de tempo durante seu desenvolvimento [1]. Tais mudanças resultam de perturbações cujo tempo de duração é insignificante se comparado à duração do fenômeno como um todo, e podem ser entendidas como instantâneas, provocando os efeitos denominados impulsos. As definições e resultados apresentados neste trabalho são encontrados em [2], [3] e [4].

Sistemas com impulsos em tempos variáveis são aqueles em que os impulsos ocorrem quando a curva integral cruza determinadas superfícies no espaço de fase estendido, então, definimos uma sequência $\{S_k\}$ de superfícies, tais que $S_k : t = \tau_k(x)$,$x \in \mathbb{R}$,$t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \cdots$, em que

$$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k(x) = \infty.$$

Consideremos o sistema impulsivo quase-linear a seguir:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)\cdot x + g(t,x), & t \neq \tau_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i, \end{cases} \tag{1}$$

sendo $A(t)$ uma matriz limitada com entradas contínuas para $t \geqslant t_0$, para algum $t_0 \geqslant 0$ fixo, B_i matrizes com entradas constantes, as funções $g(t,x)$ e $I_i(x)$ definidas para $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant h$, $h > 0$ e,

$$\|g(t,x)\| \leqslant \alpha(t)\cdot\|x\|, \qquad \|I_i(x)\| \leqslant \beta_i \cdot \|x\|, \tag{2}$$

para todo $t \geqslant t_0, x$, $\|x\| \leqslant h$, $i = 1, 2, \cdots$, $\alpha \in L^1_{loc}$, $\alpha(t) > 0$, $\beta_i > 0$.

Suponhamos que as superfícies $t = \tau_i(x)$ satisfazem as condições de Lipschitz:

$$|\tau_i(x_1) - \tau_i(x_2)| \leqslant L \cdot \|x_1 - x_2\|, \tag{3}$$

para todo $i = 1, 2, \cdots$, $\|x_1\| \leqslant h$, $\|x_2\| \leqslant h$ e também satisfaz a desigualdade:

$$\tau_i(x) \geqslant \tau_i(x + I_i(x)), \tag{4}$$

além disso, as superfícies são separadas umas das outras uniformemente em relação a x, com $\|x\| \leqslant h$, ou seja, para algum $\theta > 0$,

$$\sup_i \left(\min_{\|x\|\leqslant h} \tau_{i+1}(x) - \max_{\|x\|\leqslant h} \tau_i(x) \right) \geqslant \theta. \tag{5}$$

Associado ao sistema (1), consideramos o sistema impulsivo linear homogêneo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)\cdot x, & t \neq \tau_i, \\ \Delta x = B_i \cdot x, & t = \tau_i, \end{cases} \tag{6}$$

em que os tempos τ_i são tais que:

$$|\tau_i(x) - \tau_i(0)| \leqslant \Delta, \tag{7}$$

com $\Delta = \Delta(h)$, $\|x\| = h$ e ainda $\Delta(h) \to 0$ quando $h \to 0$, dessa forma, a solução nula não sofre impulso e a função é contínua.

2 Preliminares

A dificuldade no estudo de estabilidade para estes sistemas é apresentada pela possibilidade de ocorrência do fenômeno de batimentos, ou seja, a solução atinge a mesma superfície várias vezes, em virtude disso, apresentamos uma definição de estabilidade para as soluções com certa restrição se comparada à definição clássica.

Definição 1 ***Solução estável***
A solução $x(t)$ do sistema (1) definida para todo $t \geqslant t_0$ é chamada estável se, para $\varepsilon > 0$ arbitrário e $\eta > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ tal que para qualquer solução $y(t)$ do sistema (1) vale:

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geqslant t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos em que a solução $x(t)$ intersecta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Definição 2 ***Solução assintoticamente estável***
A solução $x(t)$ é chamada assintoticamente estável se é estável conforme a Definição 1 e se existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer outra solução $y(t)$ do sistema, satisfazendo

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta_0,$$

tem-se,

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0,$$

para todo $t \geqslant t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos em que a solução $x(t)$ intersecta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Definição 3 ***Solução exponencialmente estável***
A solução $x(t)$ é dita exponencialmente estável, se existem $\alpha, \delta, \lambda > 0$ tais que:

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - y(t)\| < \alpha \|x(t_0) - y(t)\| e^{-\lambda t},$$

para todo $t \geqslant t_0$, tal que $|t - t_i| > \eta$, sendo t_i os momentos em que a solução $x(t)$ intersecta as superfícies $t = \tau_i(x)$.

Além disso, dois lemas serão importantes para os teoremas apresentados e estão demonstrados em [4].

Lema 4 *Suponha que uma função $u(t)$ contínua por partes e não negativa satisfaz para $t \geqslant t_0$,*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u(t_i). \tag{8}$$

sendo $C \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $v(t)$ é uma função contínua e positiva e t_i são os pontos de descontinuidade de primeira espécie da função $u(t)$. Então, a seguinte estimativa é válida para $u(t)$:

$$u(t) \leqslant C \cdot \prod_{t_0 \leqslant t_i < t} (1 + \beta_i) e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}. \tag{9}$$

Lema 5 *Seja $x(t)$ uma solução qualquer do sistema linear impulsivo homogêneo* (6) *e $t \geqslant t_0$, então é válida a desigualdade:*

$$\prod_{t_0<\tau_i<t} \lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \lambda(\sigma)d\sigma} \cdot \|x_0\| \leqslant \|x(t)\| \leqslant \prod_{t_0<\tau_i<t} \Lambda_i \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(\sigma)d\sigma} \cdot \|x_0\|, \tag{10}$$

sendo $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ o menor e o maior autovalor da matriz $\hat{A}(t) = \dfrac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)$ respectivamente, $A^T(t)$ é a matriz transposta da matriz $A(t)$, λ_i^2 e Λ_i^2 são, respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz $(I_n + B_i^T)(I_n + B_i)$, $i = 1, 2, \cdots$ e $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

3 Resultados

Em geral, o problema de estabilidade de determinada solução do sistema (1) pode ser reformulado em termos da estabilidade da solução trivial de algum outro sistema impulsivo. Mas o procedimento de redução a outro sistema é mais complicado comparando com sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

A partir disso, enunciamos o teorema a seguir para soluções exponencialmente estáveis e, na sequência, teoremas a respeito de solução assintoticamente estável.

Teorema 6 *Considerando que para o sistema* (1) *estão satisfeitas as condições* (2) *e* (5) *e a desigualdade*

$$\tau_i(x) \geqslant \tau_i\left((I_n + B_i)x + I_i(x)\right), \tag{11}$$

mantida para todo x, $\|x\| \leqslant h$, $i = 1, 2, \cdots$.

Se para algum τ_i que satisfaça (7)*, as soluções do sistema* (6) *são estáveis ou exponencialmente estáveis, então a solução trivial do sistema* (1) *será, correspondentemente, estável ou exponencialmente estável se $\alpha(t)$ e β_i satisfazem as condições:*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha(t)\|dt < \infty \quad e \quad \prod_{t_i>t_0}(1+\beta_i) < \infty. \tag{12}$$

Demonstração. Seja $x(t)$ uma solução arbitrária de (1) por x_0, com $\|x_0\| \leqslant h_1 < h$ em $t = t_0$. Lembremos que

$$t = \tau_i(x(t)). \tag{13}$$

Como a desigualdade (11) é considerada válida, então (13) tem única solução para todo i, pelo menos para aqueles valores de t, para os quais a solução $x(t)$ não sai da vizinhança h da solução trivial.

Para estes valores de t, $x(t)$ também satisfaz o sistema (1) e, então, $x(t)$ pode ser escrita pela forma integral:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0<\tau_i<t} X(t, \tau_i)I_i(x(\tau_i)), \tag{14}$$

em que $X(t, t_0)$ é a matriz fundamental do sistema (6) com $X(t_0, t_0) = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Se as soluções de (6) são estáveis, $X(t,t_0)$ é limitada por uma constante $K>0$, e usando (2), segue que:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant \|X(t,t_0)x_0\| + \left\|\int_{t_0}^{t} X(t,\sigma)g(\sigma,x(\sigma))d\sigma\right\| + \left\|\sum_{t_0<\tau_i<t} X(t,\tau_i)I_i(x(\tau_i))\right\| \\ &\leqslant K\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} K\alpha(\sigma)\|x(\sigma)\|d\sigma + \sum_{t_0<\tau_i<t} K\beta_i\|x(\tau_i)\|.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4, obtemos

$$\|x(t)\| \leqslant K\cdot\|x_0\|\cdot\prod_{t_0<\tau_i<t}(1+K\beta_i)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}K\alpha(\sigma)d\sigma}. \tag{15}$$

Uma vez que $\|x\|\leqslant h$, se $h_1<h$ é suficientemente pequeno de modo que

$$K\cdot h_1\cdot\prod_{\tau_i>t_0}(1+K\beta_i)\cdot e^{\int_{t_0}^{\infty}K\alpha(\sigma)d\sigma}\leqslant h,$$

a partir da condição (12) e a desigualdade (15) temos

$$\|x(t)\|\leqslant h.$$

E ainda por (5), concluímos que $x(t)$ é definida para todo $t\geqslant t_0$ e intersecta cada superfície $t=\tau_i(x)$ apenas uma vez. Visto que tomamos arbitrariamente $x(t)$, segue que a solução trivial de (1) é estável.

Se as soluções do sistema (6) são exponencialmente estáveis, então para todo $t\geqslant\sigma$, a matriz $X(t,t_0)$ admite:

$$\|X(t,t_0)\|\leqslant K\cdot e^{-\gamma(t-\sigma)},\quad K\geqslant 1,\quad \gamma>0. \tag{16}$$

A partir de (14) temos:

$$\|x(t)\|\leqslant K\cdot\|x_0\|\cdot e^{-\gamma(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}Ke^{-\gamma(t-\sigma)}\alpha(\sigma)\|x(\sigma)\|d\sigma+\sum_{t_0<\tau_i<t}Ke^{-\gamma(t-\tau_i)}\beta_i\|x(\tau_i)\|.$$

Novamente, pelo Lema 4:

$$\|x(t)\|\leqslant K\cdot e^{-\gamma(t-t_0)}\cdot\|x_0\|\cdot\prod_{t_0<\tau_i<t}(1+K\beta_i)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}K\alpha(\sigma)d\sigma}.$$

Sendo $h_1<h$ suficientemente pequeno tal que:

$$K\cdot e^{-\gamma(t-t_0)}\cdot h_1\prod_{\tau_i>t}(1+K\beta_i)\cdot e^{\int_{t_0}^{\infty}K\alpha(\sigma)d\sigma}\leqslant h.$$

Então:

$$\|x(t)\|\leqslant h\cdot e^{-\gamma(t-t_0)},$$

e a solução trivial de (1) é exponencialmente estável.

■

Teorema 7 *Consideremos o sistema* (1) *em que as desigualdades* (5) *e* (11) *são válidas, e, além disso,*

$$\|g(t,x)\| \leqslant a \cdot \|x\|, \qquad \|I_i(x)\| \leqslant a \cdot \|x\|. \tag{17}$$

Se a matriz $X(t,t_0)$ do sistema (6)*, com $X(t_0,t_0) = I_n$ satisfaz* (16)*, então a solução nula do sistema* (1) *é assintoticamente estável para um valor suficientemente pequeno da constante a.*

O teorema a seguir também apresenta resultados sobre estabilidade assintótica, com o diferencial de trabalhar hipóteses acerca dos autovalores envolvidos para estudo de estabilidade.

Consideremos o caso em que as matrizes $A(t)$ e B_i em (1) são matrizes constantes, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A \cdot x + g(t,x), & t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x = B \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i(x). \end{cases} \tag{18}$$

Teorema 8 *Suponha que as funções $g(t,x)$ e $I_i(x)$ satisfazem as desigualdades*

$$\|g(t,x)\| \leqslant a \cdot \|x\|, \qquad \|I_i(x)\| \leqslant a \cdot \|x\|. \tag{19}$$

e as superfícies $t = \tau_i(x)$ satisfazem a desigualdade (3) *e*

$$\tau_i(x) \geqslant \tau_i((I_n + B)x + I_i(x)),$$

para todo $i = 1, 2, \cdots$, $\|x\| \leqslant h$, o limite

$$\lim_{\delta \to \infty} \frac{i(t, t+\delta)}{\delta} = p \tag{20}$$

existe e é finito, e $\gamma = \max\limits_j Re\lambda_j(A)$, $\alpha^2 = \max\limits_j \lambda_j((I_n + B^T)x + I_i(x))$. Se a desigualdade $\gamma + p \cdot \ln \alpha < 0$ é válida, então a solução nula do sistema (18) *é assintoticamente estável enquanto a constante a em* (19) *é suficientemente pequena.*

Demonstração. Considerando $x(t)$ uma solução qualquer do sistema (6), a partir do Lema 5 e das hipóteses assumidas, temos:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \prod_{t_0 < \tau_i < t} \alpha^2 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \gamma d\sigma} \cdot \|x_0\| \\ &\leqslant \alpha^{2 \cdot i(t,t+\delta)} \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\|. \end{aligned} \tag{21}$$

Podemos encontrar $K \geqslant 1$ e $\mu > 0$ $(0 < \mu < \|\gamma + p \cdot \ln \alpha\|)$, que para todo $t \geqslant t_0$ e $s \geqslant t_0$, $t \geqslant s$, a matriz $X(t,s)$, $X(s,s) = I_n$ do sistema (6), pode ser estimada por:

$$\|X(t,s)\| \leqslant K \cdot e^{-\mu(t-s)}.$$

As soluções do sistema (1) são expressas na forma:

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\sigma)g(\sigma, x(\sigma))d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t,\tau_i)I_i(x(\tau_i)).$$

A partir de (16) e (19), e aplicando o Lema 4, obtemos:

$$e^{\gamma(t-t_0)} \cdot \|x(t)\| \quad \leqslant \quad K \cdot \|x_0\| \prod_{t_0<\tau_i<t} (1+Ka) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} Ka d\sigma}.$$

Sendo $i(t,t+\delta)$ o número de pontos $\tau_i(x)$ no intervalo $[t,t+\delta]$, temos

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \quad &\leqslant \quad K \cdot \|x_0\| \cdot (1+Ka)^{i(t,t+\delta)} \cdot e^{Ka(t-t_0)} \cdot e^{-\mu(t-t_0)} \\ &= \quad K \cdot \|x_0\| \cdot e^{i(t,t+\delta)\cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\delta\to\infty} \dfrac{i(t,t+\delta)}{\delta} = p$ e δ é a variação do intervalo observado $(t-t_0)$, segue que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \quad &\leqslant \quad K \cdot \|x_0\| \cdot e^{\delta \frac{i(t,t+\delta)}{\delta} \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)} \\ &\leqslant \quad K \cdot \|x_0\| \cdot e^{(t-t_0)\cdot p \cdot \ln(1+Ka)} \cdot e^{(Ka-\mu)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \|x(t)\| \leqslant K \cdot \|x_0\| \cdot e^{-(\mu - Ka - p\cdot \ln(1+Ka))(t-t_0)}.$$

Supondo valores de a suficientemente pequenos, de modo que:

$$\mu - Ka - p \cdot \ln(1+Ka) > 0,$$

e ainda, $\|x_0\|$ satisfaz a condição $K \cdot \|x_0\| < h$, então a solução $x(t)$ permanece na vizinhança h da solução nula, para todo $t \geqslant t_0$, assim a solução nula é assintoticamente estável.

■

3.1 Exemplo: Aplicação do Teorema 8

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, & t \neq \tau_i(x) \\ \dot{y} = -a^2 x - \dfrac{bx}{(t+1)^2} - y, & t \neq \tau_i(x) \\ (\Delta x, \Delta y) = B_i \cdot x + I_i(x), & t = \tau_i(x), \end{cases}$$

sendo a e b constantes reais, $\|x\| \leqslant h$, a matriz B_i é a matriz nula e $|I_i(x)| \leqslant |b| \cdot \|x\|$.

De forma matricial escrevemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{b}{(t+1)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Assim, conforme notação do Teorema 8 obtemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que a função $g(t,x,y)$ possui duas componentes que escrevemos $g_1(t,x,y)$ e $g_2(t,x,y)$, tais que:

$$g_1(t,x,y) = 0, \qquad\qquad g_2(t,x,y) = -\frac{bx}{(t+1)^2}.$$

E assim,

$$\|g_1(t,x,y)\| = 0, \qquad\qquad \|g_2(t,x,y)\| = \frac{|b|}{(t+1)^2}\|x\|.$$

Desse modo, observando o limite em ambas componentes, podemos concluir:

$$\lim_{t\to\infty} \|g_1(t,x,y)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} \|g_1(t,x,y)\| = 0.$$

$$\lim_{t\to\infty} \|g_2(t,x,y)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} \|g_2(t,x,y)\| = |b|\ \|x\|.$$

Logo $\|g(t,x,y)\| = \|(g_1(t,x,y),\ \ g_2(t,x,y))\| \leqslant (0,\ \ |b|\|x\|)$, $\|x\| \leqslant h$.

Os autovalores da matriz $A(t)$ podem ser determinados de forma que:

$$\det(\lambda I_n - A) = \det\left(\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -a^2 & -1 \end{vmatrix}\right) = \det\left(\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ a^2 & \lambda+1 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + a^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = -1 \pm |a| i. \end{aligned}$$

Assim, obtemos $\gamma = \max_j Re\lambda_j(A) = -1$, além disso, sendo B_i a matriz nula, segue que $\alpha^2 = \max_j \lambda_j((I_n + B)x + I_i(x)) = 1$.

A partir disso, as hipóteses do Teorema 8 são satisfeitas e

$$\gamma + p \cdot \ln \alpha < 0.$$

Portanto, a solução nula do sistema é assintoticamente estável.

4 Referências Bibliográficas

[1] BALLINGER, G. H. **Qualitative theory of impulsive delay differential equations**. 1999. 145 p. Thesis (PhD in Applied Mathematics) - University of Waterloo, Waterloo, 2000.

[2] BAINOV, D.; SIMEONOV, P. **Impulsive differential equations:** periodic solutions and applications. New York: Wiley & Sons, 1993.

[3] LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. **Theory of impulsive differential equations**. Singapore; Teaneck, NJ: World Scientific, 1989.

[4] SANTOS, L. F. dos. **Um estudo sobre equações diferenciais impulsivas:** existência de solução, estabilidade e aplicações. 2021. 128 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2021.