Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022
Iniciação Científica

Do triângulo às fórmulas de prostaférese

From triangle to prosthaphaeresis formulas

Edmundo Capelas de Oliveira
Imecc/Matemática Aplicada
Unicamp - Universidade Estadual de Campinas
capelas@unicamp.br

Chico Nery
Colégio San Conrado - Campinas
chiconery@sanconrado.com.br

Resumo

Quase todo professor já se deparou com a pergunta: para que serve? Esta pergunta ocorre nas séries iniciais onde vários conceitos são apresentados pela primeira vez. Também no Ensino Médio, na trigonometria, onde emergem, em geral, expressões que não contam com um embasamento teórico como as fórmulas de prostaférese, maneiras de fatorar somas ou diferenças de razões trigonométricas. Aqui discorremos sobre a trigonometria, apenas no triângulo retângulo, apresentado no Ensino Fundamental, a partir de conceitos básicos, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos inscrito e central. A metodologia faz uso de conceitos básicos a fim de obter resultados que, em geral, são apresentados apenas no Ensino Médio. Os resultados obtidos passam pela demonstração do teorema dos senos, arcos dobro e as fórmulas de prostaférese, que têm uma direta aplicação na resolução de uma ampla classe de equações trigonométricas.
Palavras-chave: Triângulo. Teorema dos senos. Prostaférese.

Abstract

Almost every teacher has faced the question: what is it for? This question occurs in the initial series where several concepts are presented for the first time. Also in High School, in trigonometry, where expressions that do not have a theoretical basis such as prostapheresis formulas emerge, ways to factor sums or differences of trigonometric ratios. Here we discuss trigonometry, only in the acute triangle, presented in Elementary School, from basic concepts, sum of the interior angles of a triangle, inscribed and central angles. The methodology makes use of basic concepts in order to obtain results that, in general, are presented only in High School. The results obtained include the demonstration of the sine theorem, double arcs and prostapheresis formulas, which have a direct application in solving a wide class of trigonometric equations.
Keywords: Triangle. Sine theorem. Prosthapheresis.

Artigo recebido em jun. 2022 e aceito em out. 2022

1 Introdução

A trigonometria é o tópico da matemática que estuda, do ponto de vista algébrico, as relações existentes entre lados e ângulos de triângulos. A palavra "trigonometria" advinda do grego, corresponde às palavras *trígono* (triângulo) e *metrísei* (medida), ainda que possam ter sido os babilônicos e não os gregos, os primeiros a utilizá-la. A trigonometria provavelmente é fruto da necessidade de astrônomos em precisar seus cálculos, bem como na utilização de técnicas de navegação. A introdução da trigonometria na ciência é devida ao astrônomo grego Hiparco [190 a.C. – Hiparco de Niceia – 120 a.C.], o qual é lembrado como o pai da trigonometria (EVES, 2011; LINTON, 2004).

Na maioria das escolas, ao final do Ensino Fundamental II, veem definidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, a partir do triângulo retângulo, enquanto a trigonometria mais geral é apresentada no segundo ano do Ensino Médio. Na trigonometria apresentada por meio do ciclo trigonométrico, após a introdução das funções seno, cosseno e tangente, são apresentadas as funções cossecante, secante e cotangente. Estas três funções estão relacionadas com as três primeiras de tal modo que os produtos entre essas funções, respectivamente, são unitários. Cuidado, não confundir com as respectivas funções trigonométricas inversas. (BRASIL ESCOLA, 2022).

De posse desses conceitos, em geral, são apresentados, ainda que nem sempre nessa ordem, os conceitos de seno e cosseno do arco dobro e triplo, fórmulas de bisecção, ou o arco metade, equações e inequações trigonométricas, funções inversas, fórmulas de prostaférese, gráficos das funções, concluindo com possíveis aplicações que se estendem da teoria musical até a tomografia computadorizada, além das funções periódicas na descrição de ondas, sejam elas sonoras ou luminosas. Ressalte-se que esta é uma árdua tarefa tanto para o professor quanto para os estudantes, pois costuma tomar de dois a três meses de aula (OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2017).

O propósito desta nota é mostrar um atalho, sem fazer uso de artifícios, que nos leva até as fórmulas de prostaférese partindo de proposições básicas, apresentadas no Ensino Fundamental II. Assim, discorremos sobre a trigonometria, apenas no triângulo retângulo, apresentado no Ensino Fundamental II, a partir de conceitos básicos, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulo isósceles e ângulos inscrito e central. A abordagem faz uso de conceitos básicos a fim de obter resultados que, em geral, são apresentados apenas no Ensino Médio. Os resultados obtidos passam pela demonstração do teorema dos senos, arcos dobro e triplo, fórmulas de bissecção e concluindo com as fórmulas de prostaférese, também conhecidas como fórmulas de fatoração trigonométrica, em analogia ao caso algébrico, que têm uma direta aplicação na resolução de uma ampla classe de equações trigonométricas (OLIVEIRA; VAZ JR, 2019).

2 Preliminares

Nesta seção, apresentamos os resultados básicos com os quais vamos adentrar na trigonometria visando as fórmulas de prostaférese. Para tal, dividimos a seção em duas subseções, a primeira envolvendo ângulos e a segunda envolvendo o triângulo acutângulo e várias de suas propriedades.

2.1 Ângulos interno e central

A partir das proposições, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e o triângulo isósceles tem ângulos da base iguais, mostramos, por meio de um teorema, que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

Proposição 1 *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$.

Proposição 2 *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

Como uma simples aplicação desses resultados, vamos provar o teorema do ângulo inscrito.

Teorema 3 *Numa circunferência, se um ângulo central e um ângulo inscrito determinam o mesmo arco, a medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito.*

Prova. Consideremos uma circunferência de centro O e sejam β e α, as medidas do ângulo central $A\widehat{O}C$ e do ângulo inscrito $A\widehat{B}C$, respectivamente. Vamos dividir em três casos. Primeiro, um dos lados do ângulo passa pelo centro da circunferência, conforme Figura 1.

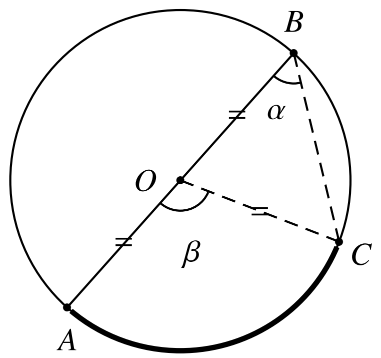

Figura 1: Um lado do ângulo é diâmetro.

O triângulo $B\widehat{O}C$ é isósceles pois $\overline{BO} = \overline{OC}$ raios da circunferência, então $O\widehat{C}B = O\widehat{B}C = \alpha$, conforme **Proposição 2**, de onde segue

$$B\widehat{O}C = 180° - 2\alpha \qquad \longrightarrow \qquad A\widehat{O}C = 180° - B\widehat{O}C = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$$

ou ainda $\beta = 2\alpha$, que é o resultado desejado.

Segundo caso, o centro da circunferência é interno ao ângulo inscrito. Considere a Figura 2 onde prolongamos $\overline{BO}$ até atingir a circunferência no ponto D.

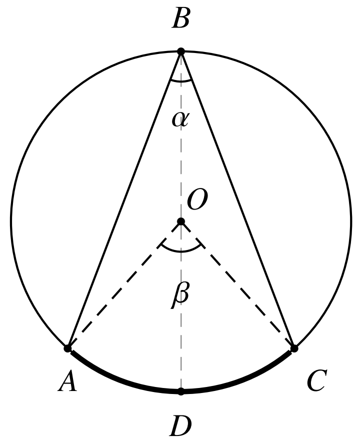

Figura 2: Centro da circunferência é interno ao ângulo inscrito.

Por meio do primeiro caso, já sabemos que

$$A\widehat{O}D = 2 \cdot A\widehat{B}D \qquad \text{e} \qquad D\widehat{O}C = 2 \cdot D\widehat{B}C.$$

Então, adicionando as duas expressões precedentes, obtemos

$$A\widehat{O}D + D\widehat{O}C = 2\left(A\widehat{B}D + D\widehat{B}C\right)$$

de onde segue $\beta = 2\alpha$, que é o resultado desejado.

Por fim, o centro da circunferência é externo ao ângulo inscrito. Consideremos a Figura 3 onde prolongamos o segmento $\overline{BO}$ até atingir a circunferência no ponto D.

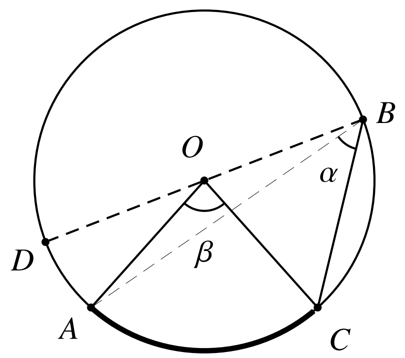

Figura 3: Centro da circunferência é externo ao ângulo inscrito.

Mais uma vez, a partir do primeiro caso, já sabemos que

$$D\widehat{O}C = 2 \cdot D\widehat{B}C \qquad \text{e} \qquad D\widehat{O}A = 2 \cdot D\widehat{B}A.$$

Então, subtraindo as duas expressões precedentes, obtemos a relação

$$D\widehat{O}C - D\widehat{O}A = 2\left(D\widehat{B}C - D\widehat{B}A\right)$$

de onde segue $\beta = 2\alpha$. Assim, o ângulo central $A\widehat{O}C$ é o dobro do ângulo inscrito $A\widehat{B}C$. $\square$

Em resumo, quando um ângulo central e um ângulo inscrito, conforme Figura 4, determinam um mesmo arco numa circunferência ocorre a seguinte relação entre suas medidas

$$m(AC) = m(A\widehat{O}C) = 2 \cdot m(A\widehat{B}C).$$

É importante notar que a medida angular do arco AC é, por definição, a mesma do ângulo central $A\widehat{O}C$ que o determina.

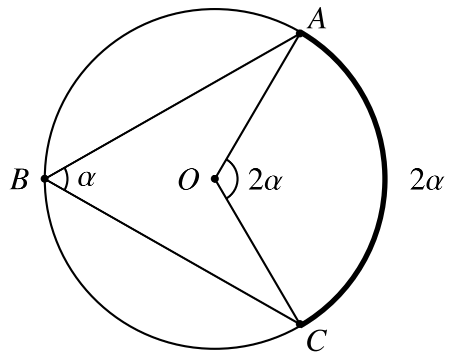

Figura 4: Ângulos central e inscrito numa circunferência.

A fim de mostrar esse resultado, basta utilizar os conceitos de ângulos alternos internos e que o ângulo raso é $180°$, **Proposição 1**. Prova esta deixada a cargo do leitor.

2.2 Triângulo e suas propriedades

A partir de um estudo sistemático do triângulo, apresentando definições básicas e propriedades, vamos discutir aplicações que, em geral, são estudadas apenas na trigonometria, no Ensino Médio.

Para tal, denotamos $a = \overline{CB}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, as medidas dos lados de um triângulo acutângulo, apenas para simplificar, pois os resultados continuam válidos para os triângulos retângulos e obtusângulos, de vértices A, B e C, respectivamente, com ângulos internos α, β e γ, conforme Figura 5.

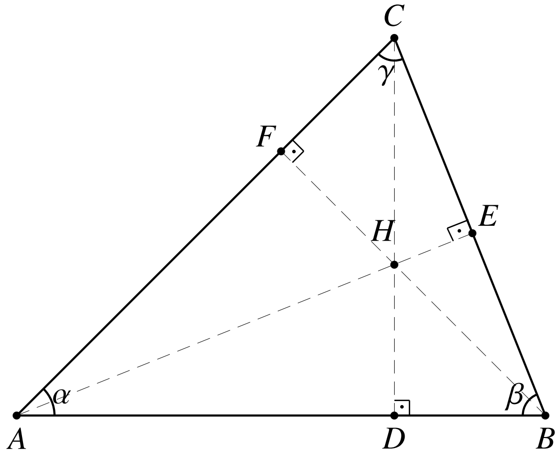

Figura 5: Triângulo acutângulo de lados a, b e c.

Ainda mais, os pontos D, E e F são os pés das perpendiculares, respectivamente, $h = \overline{CD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ e denotamos por H o ortocentro, ponto de encontro das alturas, bem como, $m = \overline{AD}$ e $n = \overline{DB}$.

Após a nomenclatura introduzida, começamos com o conhecido teorema (lei) dos senos. Em geral, este tema é abordado somente no Ensino Médio, mas destacamos que é interessante mostrar esse resultado, pelo menos para estudantes que se destacam e/ou participantes de olimpíadas.

2.2.1 Teorema dos senos

Nesta seção enunciamos e demonstramos o teorema dos senos, utilizando conceitos apresentados no Ensino Fundamental II, seno e cosseno como razões trigonométricas.

Teorema 4 *Sejam a, b, c e α, β, γ, respectivamente, as medidas dos lados e os ângulos do triângulo de vértices A, B e C. Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

o chamado teorema (lei) dos senos.

Prova. Começamos por lembrar da definição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, respectivamente, cateto oposto dividido pela hipotenusa; cateto adjacente dividido pela hipotenusa e cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. Assim, dos triângulos retângulos ADC e BDC, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \cos\alpha = \frac{m}{b}, \qquad \tan\alpha = \frac{h}{m}$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{n}{a}, \qquad \tan\beta = \frac{h}{n}.$$

Eliminando h podemos escrever

$$b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta \qquad \text{e} \qquad m\tan\alpha = n\tan\beta$$

bem como, sabendo que $m + n = c$, a seguinte relação

$$b\cos\alpha + a\cos\beta = c.$$

Assim, da relação envolvendo os senos obtemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Com um procedimento inteiramente análogo, agora, considerando o vértice B, podemos mostrar que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma},$$

bem como, considerando o vértice A, a igualdade

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Dessas três últimas igualdades, obtidas a partir da definição da razão trigonométrica seno, podemos escrever

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

É importante notar que a dupla igualdade nos leva ao que é conhecido pelo nome de lei (teorema) dos senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

onde $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, centrada no ponto O, o circuncentro, ponto de encontro das mediatrizes dos lados, conforme Figura 6.

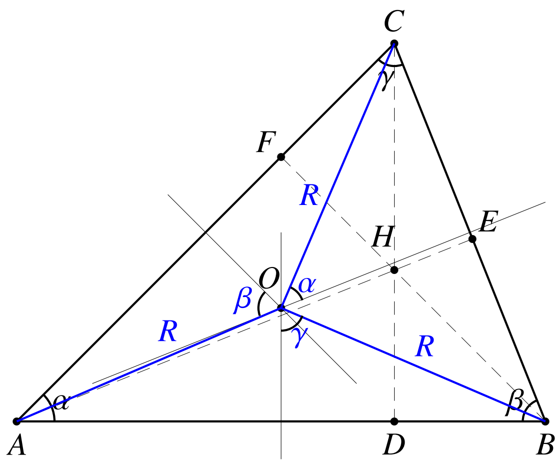

Figura 6: Triângulo ABC destacando os pontos H e O.

A fim de justificar a última igualdade, consideremos o triângulo retângulo de vértices O, C e o ponto médio do lado $\overline{BC} = a$. Da definição de razão trigonométrica seno e pelo Teorema 3 podemos escrever

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$$

e, analogamente, no triângulo retângulo de vértices O, A e o ponto médio do lado $\overline{AC} = b$, temos

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b/2}{R} = \frac{b}{2R} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$$

e, por fim, no triângulo retângulo de vértices O, B e o ponto médio do lado $\overline{AB} = c$, temos

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c/2}{R} = \frac{c}{2R} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

que é o resultado desejado. □

2.2.2 Seno da soma de dois arcos

Passemos, agora, a discutir o que se entende por seno (cosseno) da soma (diferença) de dois arcos. Existem outras maneiras de apresentarmos o resultado, em particular, utilizando o conceito de área, mas, aqui, optamos por fazê-lo através dos conhecimentos até então apresentados. Com isso, basta apenas mostrar que o seno de um ângulo agudo (note que estamos priorizando o triângulo acutângulo) é igual ao seno de seu suplemento, o que vamos fazer por meio da proposição a seguir.

Proposição 5 *Sejam θ um ângulo agudo e τ o seu suplemento, então* $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\tau$.

Prova. Consideremos a Figura 7, onde denotamos por θ o ângulo e por $\tau = 180° - \theta$ o respectivo suplemento.

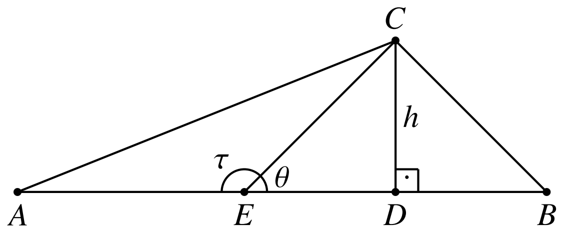

Figura 7: Triângulo ABC e os ângulos θ e τ.

Sejam ABC os vértices do triângulo, $h = \overline{CD}$ a respectiva altura e D o pé da perpendicular. Introduzindo a notação $\overline{AE} = u$, $\overline{EB} = v$ e $t = \overline{EC}$, escrevemos a área do triângulo ABC como a soma das áreas dos triângulos AEC e EBC,

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AEC} + \mathcal{A}_{EBC}$$

ou ainda na forma, utilizando a expressão para a área do triângulo

$$\frac{u+v}{2} \cdot h = \frac{ut}{2} \operatorname{sen}(180° - \theta) + \frac{vt}{2} \operatorname{sen}\theta.$$

Pela definição da razão trigonométrica seno, temos $t\,\mathrm{sen}\,\theta = h$ que, substituído na igualdade anterior, fornece

$$\frac{u+v}{2} \cdot t\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{ut}{2}\,\mathrm{sen}(180^\circ - \theta) + \frac{vt}{2} sen\theta.$$

Ainda mais, simplificando, podemos escrever

$$\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(180^\circ - \theta)$$

que é o resultado desejado, a saber: o seno do ângulo θ é igual ao seno de seu suplemento $180^\circ - \theta$, isto é, $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\tau$, que é o resultado desejado. □

Voltemos ao nosso triângulo ABC, conforme Figura 6, no qual expressamos os lados a, b e c em função do respectivo ângulo e o raio da circunferência circunscrita, substituindo na expressão

$$b\cos\alpha + a\cos\beta = c$$

podemos escrever

$$2R\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha + 2R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta = 2R\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

ou ainda, simplificando, na forma

$$\mathrm{sen}\,\gamma = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha.$$

Por outro lado, sabendo que a soma dos ângulos internos num triângulo é um ângulo raso, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \longrightarrow \qquad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

que, substituído na igualdade anterior, fornece

$$\mathrm{sen}(180^\circ - \alpha - \beta) = \mathrm{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha \tag{1}$$

relação esta que expressa o seno do suplemento da soma dos ângulos $\alpha + \beta$ em função dos senos e cossenos dos ângulos α e β.

A fim de simplificar essa expressão, utilizamos a **Proposição 5**, logo voltando com esse resultado na Eq.(1), obtemos a expressão do seno da soma de dois ângulos em termos dos senos e cossenos desses ângulos,

$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha. \tag{2}$$

No caso geral, esta expressão pode ser estendida para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Convém ressaltar que, como já mencionado, ainda que existam outras maneiras, optamos por utilizar apenas conceitos básicos associados aos triângulos e aos ângulos inscritos numa circunferência. Ainda mais, a partir desta expressão podemos obter outras tantas, sejam elas envolvendo a diferença de dois ângulos ou casos particulares, por exemplo, num triângulo retângulo, sendo $\alpha + \beta = 90^\circ$, o seno de um dos ângulos, α, é igual ao cosseno do outro ângulo, β, isto é, $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\beta$. E, por fim, no caso em que $\alpha = \beta$, obtemos a expressão para o seno do arco dobro, $\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$, isto é, o seno do arco dobro, 2α, expresso em termos do seno e do cosseno do arco α.

Concluímos a seção mencionando que, a partir dessas expressões para o seno e o cosseno da soma de ângulos, é imediato obter as expressões do arco triplo, dentre outros múltiplos inteiros do ângulo, bem como obter as chamadas fórmulas de bissecção, ou fórmulas do arco metade. Deixamos a cargo do leitor interessado a manipulação das expressões a fim de obter tais fórmulas, em particular,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

ou seja, o cosseno do arco metade, $\frac{\alpha}{2}$, expresso em função do cosseno do arco α. Discorra sobre os sinais mais ou menos à frente dessa expressão.

3 Fórmulas de prostaférese

As fórmulas de prostaférese são expressões que transformam somas e subtrações de senos e cossenos em produtos. Numa simples analogia, podemos dizer que são expressões similares aos casos de fatoração, ou ainda, uma fatoração envolvendo as funções trigonométricas. As fórmulas de prostaférese têm uma particular aplicação na resolução de uma ampla classe de equações e inequações trigonométricas.

É importante destacar que vamos obter apenas uma das chamadas fórmulas de prostaférese, especificamente, aquela que segue diretamente dos resultados até aqui apresentados. Assim, vamos obter uma fórmula que transforma a soma de dois senos num produto de um seno e um cosseno. Para tal, começamos por lembrar que a função seno é uma função ímpar, e o cosseno é uma função par, ou seja,

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

Assim, usando a paridade das funções trigonométricas e a expressão que fornece o seno da soma de dois ângulos, podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

Adicionando a expressão precedente com a expressão dada na Eq.(2) e simplificando, obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta.$$

Introduzindo a notação $\alpha + \beta = A$ e $\alpha - \beta = B$ e substituindo na expressão anterior, temos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

expressão esta que transforma a soma de dois senos em função de um produto de um cosseno e um seno, uma fórmula de prostaférese. Ainda mais, utilizando a paridade é imediato obter

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Expressões similares podem ser obtidas para a soma e a diferença de dois cossenos, as quais deixamos a cargo do leitor interessado. Em particular, obtenha a expressão

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

e discuta o caso $B = 0$ a fim de recuperar a expressão para o cosseno do arco metade.

4 Conclusões

Nesta breve nota, mostramos que é possível discutir quase toda a trigonometria (deixamos de lado, em particular, as equações e inequações trigonométricas) a partir de dois conceitos básicos apresentados no Ensino Fundamental II. Ressaltamos a importância de tal estudo pois, como já mencionado, existem estudantes que costumam adquirir conceitos matemáticos de maneira independente, de onde emergem vários questionamentos, especificamente o "para que serve"? A estes estudantes e, também, aqueles que se direcionam para as olimpíadas de matemática, quase toda a trigonometria a partir de dois conceitos básicos.

OLIVEIRA, E. C.; NERY, C. Do triângulo às fórmulas de prostaférese. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 01–10, dez. 2022. Edição Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdv22n3ci2022001010 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd

5 Bibliografia

BRASIL ESCOLA. Canal do educador. Goiânia: Rede Omnia, 2022. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/. Acesso em: 18 jun. 2022.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

LINTON, C. M. **From Eudoxus to Einstein: a history of mathematical astronomy.** Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

OLIVEIRA, G. V. de; OLIVEIRA, E. C. de. Sobre a área de polígonos convexos. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 108-115, dez. 2017. DOI: 10.21167/cqdvol11201723169664gvoeco108115. Disponível em: http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/. Acesso em: 18 jun. 2022.

OLIVEIRA, E. C., VAZ JR, J. **Pré-Cálculo: uma ponte entre a matemática do ensino médio e o cálculo diferencial e integral.** [*S. l.: s.n.*], 2019. Disponível em: https://pre-calculo.org/. Acesso em: 17 jun. 2022.