Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 3, dez. 2022

Alexandre Turcato Jorge
E. E. Messias Pedreiro
alexturcato@hotmail.com

Ligia Laís Fêmina
Faculdade de Matemática - FAMAT
Universidade Federal de Uberlândia
ligia@ufu.br

A mania de Pitágoras continua ...

The Pythagoras' mania to be continued ...

Resumo

O presente artigo trata de uma pesquisa bibliográfica sobre diversas demonstrações do teorema de Pitágoras, divididas em dois grupos: algébricas e geométricas. As primeiras são baseadas em semelhança de triângulos e as últimas são baseadas em comparações de áreas de diversas figuras planas.
Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Semelhança de triângulos. Áreas.

Abstract

This article deals with a bibliographical research on several proofs of the Pythagorean theorem, divided into two groups: algebraic and geometric. The former are based on triangles similarity and the latter are based on comparisons of areas of several flat figures.
Keywords: Pythagoras theorem. Triangles similarity. Areas.

Artigo recebido em jul. 2022 e aceito em dez. 2022

1 Introdução

O teorema de Pitágoras, apesar de ter um enunciado sucinto, remete a uma infinidade de aplicações. Conhecido desde épocas remotas, coube a Pitágoras e seus discípulos, eternizar este importante teorema. Mesmo tendo a sua paternidade questionada, por haver indícios do teorema em regiões como Oriente Médio e até a China antiga, com datas que antecedem a Escola Pitagórica em centenas de anos, o teorema leva seu nome e seu legado.

O Teorema de Pitágoras está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, como especificado nas seguintes habilidades:

EF09MA13 Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

EF09MA14 Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Portanto, essa temática é pertinente em dissertações do PROFMAT, e esse artigo foi parte do estudo para o obtenção do título de mestre do professor Alexandre Turcato Jorge. Vale ressaltar que apesar desse assunto não ser inédito e já ter sido estudado e refletidos em outros trabalhos, continua sendo um assunto a ser muito explorado. O teorema está no livro dos Recordes, segundo Matthews (1994) como aquele que mais possui demonstrações na Matemática . Já, no livro The Pythagorean proposition (LOOMIS, 1940), foram catalogadas 370 demonstrações. A ideia de explorar essas demonstrações surgiu após a leitura do artigo de Rosa (1983), cujo título é Mania de Pitágoras, em sua homenagem o título desse artigo.

2 Demonstração algébrica

Em The American Mathematical Monthly (1894-1901), tem-se 28 provas do Teorema de Pitágoras, catalogadas por J. D. Runkle. No volume II, uma das demonstrações é a que detalha-se nessa seção.

Dado um triângulo ABH retângulo em H, marca-se o ponto E de tal forma que $AE = 1$, traça-se EF perpendicular a AH, constrói-se também a altura HC do triângulo ABH.

A construção está ilustrada na Figura 1.

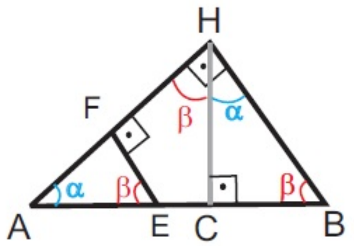

Figura 1: Demonstração Algébrica - Passo 1

Designando os ângulos $H\widehat{A}B = \alpha$ e $A\widehat{B}H = \beta$, sabendo que $\alpha + \beta = 90°$, determina-se os ângulos $B\widehat{H}C = \alpha$, $A\widehat{E}F = \beta$ e $C\widehat{H}A = \beta$. Dessa forma, encontra-se quatro triângulos retângulos semelhantes pelo caso AA.

Denota-se $AH = b$, $BH = a$, $AB = h$, $AE = 1$, $CB = v$, $AC = h - v$, $HC = w$, $AF = x$ e $FE = y$.

Os triângulos semelhantes podem ser visualizados na Figura 2.

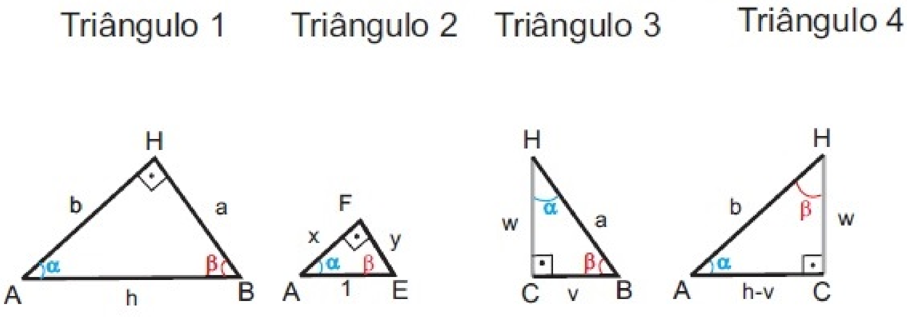

Figura 2: Demonstração Algébrica - Passo 2

Utilizando as relações de semelhanças dos triângulos 2 e 4:

$$\frac{w}{y} = \frac{h-v}{x} \Longrightarrow w = \frac{y(h-v)}{x}. \tag{1}$$

Pelas relações de semelhanças dos triângulos 2 e 3:

$$\frac{v}{y} = \frac{w}{x} \Longrightarrow v = \frac{wy}{x}. \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2):

$$v = \frac{wy}{x} \Longrightarrow v = \left(\frac{y(h-v)}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow v = \frac{y^2(h-v)}{x^2}. \tag{3}$$

Note que $AB = AC + BC \Longrightarrow h = (h-v) + v$.

Substituindo (3) na igualdade acima, tem-se:

$$h = (h-v) + \left(\frac{y^2(h-v)}{x^2}\right) \Longrightarrow h = (h-v)\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \Longrightarrow h = (h-v)\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right). \tag{4}$$

Agora, pelas relações de semelhanças dos triângulos 1 e 2, encontra-se:

$$\frac{h}{1} = \frac{b}{x} \Longrightarrow h = \frac{b}{x}. \tag{5}$$

Pelas relações de semelhanças dos triângulos 2 e 4:

$$\frac{b}{1} = \frac{h-v}{x} \Longrightarrow b = \frac{h-v}{x}. \tag{6}$$

Substituindo (6) em (5):

$$h = \frac{b}{x} \Longrightarrow h = \frac{\frac{h-v}{x}}{x} \Longrightarrow h = \frac{h-v}{x^2}. \tag{7}$$

Igualando as equações (4) e (7):

$$(h-v)\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \frac{h-v}{x^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1. \tag{8}$$

De (5), obtém-se $b = hx$, e das relações de semelhanças dos triângulos 1 e 2.

$$\frac{a}{y} = \frac{h}{1} \Longrightarrow a = yh. \tag{9}$$

Finalmente, utilizando a equação (8) e elevando ao quadrado os catetos a e b, obtém-se

$$a^2 + b^2 = (yh)^2 + (xh)^2 = (x^2h^2) + (y^2h^2) = (x^2 + y^2)h^2 = 1 \cdot h^2 = h^2.$$

Logo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Uma observação importante se faz necessária, utiliza-se $AE = 1$ para facilitar os cálculos conforme Loomis (1940), mas a demonstração é válida para qualquer triângulo retângulo, inclusive aqueles com hipotenusa menor que uma unidade. Para isso, basta construir o segmento AE de comprimento k, onde k é menor que o comprimento de AC, e o resultado se prova de maneira análoga.

3 Demonstração geométrica

Em Loomis (1940), esta demonstração é referenciada como a prova XXXIV de Versluys (1914), página 57, onde é creditada ao trabalho de Hauff, 1803.

Seja ABH um triângulo retângulo em H.

Constrói-se sobre cada um dos lados do triângulo ABH os quadrados $AHFG$, $BDEH$ e $ACKB$.

Traça-se HL perpendicular a CK, CM paralelo ao cateto AH, MK paralelo ao cateto HB, GO e ND são paralelos à hipotenusa AB. Seja S o ponto de interseção de AB com HL, como visualizado na Figura 3.

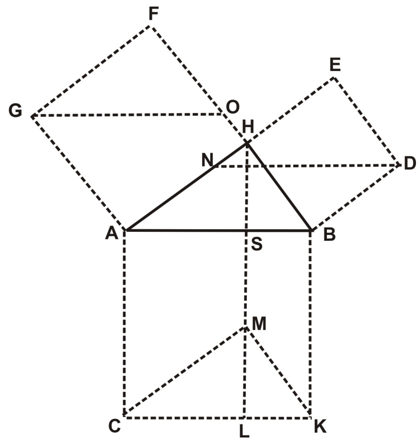

Figura 3: Demonstração Geométrica - Passo 1

Note que o quadrado $ACKB$ pode ser decomposto na soma dos retângulos $ACLS$ e $BSLK$. Para facilitar a notação, denota-se

$$\text{Área}(ACKB) = \text{Área}(ACLS) + \text{Área}(BSLK). \tag{10}$$

A área do retângulo $BSLK$ é igual a área do paralelogramo $BHMK$, como ilustrado na Figura 4.

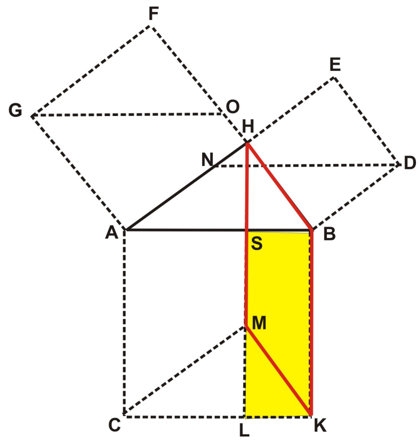

Figura 4: Demonstração Geométrica - Passo 2

De fato, BK e BS podem ser vistos como base e altura do paralelogramo $BHMK$ e do retângulo $BSLK$. Logo,

$$\text{Área}(BSLK) = \text{Área}(BHMK). \tag{11}$$

Analogamente, a área do retângulo $ACLS$ é igual a área do paralelogramo $ACMH$, uma vez que AC e AS podem ser vistos como base e altura do paralelogramo $ACMH$ e do retângulo $ACLS$, como pode-se ver na Figura 5.

$$\text{Área}(ACLS) = \text{Área}(ACMH). \tag{12}$$

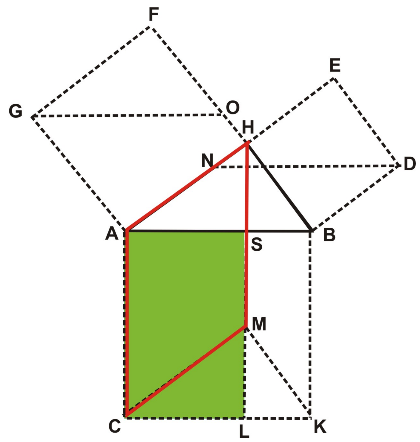

Figura 5: Demonstração Geométrica - Passo 3

Agora, prova-se que os paralelogramos BHMK e ABDN são congruentes (visualizados na Figura 6), e, portanto,

$$\text{Área}(BHMK) = \text{Área}(ABDN). \tag{13}$$

De fato, BK é igual a BA, pois são lados do quadrado $ACKB$. Também, BH é igual a BD, por serem lados do quadrado $BDEH$. Resta verificar que o ângulo $A\widehat{B}D$ é congruente ao ângulo $K\widehat{B}H$.

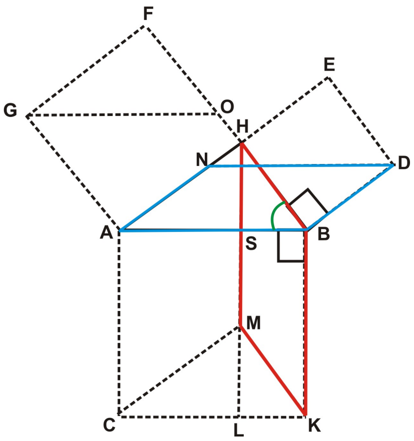

Figura 6: Demonstração Geométrica - Passo 4

$$A\widehat{B}D = A\widehat{B}H + H\widehat{B}D = A\widehat{B}H + 90^\circ \tag{14}$$

Por outro lado,

$$K\widehat{B}H = A\widehat{B}H + A\widehat{B}K = A\widehat{B}H + 90^\circ. \tag{15}$$

Logo, $A\widehat{B}D$ é congruente ao ângulo $K\widehat{B}H$.

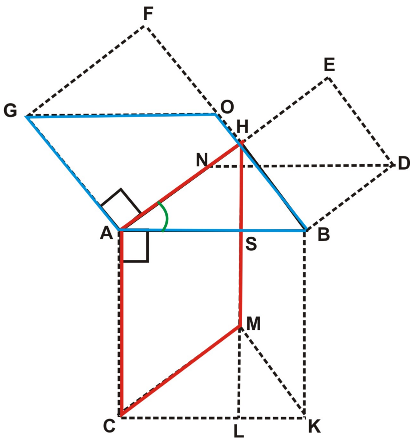

Figura 7: Demonstração Geométrica - Passo 5

Pelos mesmos argumentos mostra-se que o paralelogramo $ACMH$ é congruente ao paralelogramo $ABOG$, como vemos na Figura 7, ou seja,

$$\text{Área}(ACMH) = \text{Área}(ABOG) \tag{16}$$

A área do paralelogramo $ABDN$ é igual a área do quadrado $BDEH$, conforme a Figura 8.

De fato, podemos calcular a área do paralelogramo $ABDN$, utilizando AN como base e ED como altura. Logo,

$$\text{Área}(ABDN) = AN.ED = DB.ED = \text{Área}(BDEH). \tag{17}$$

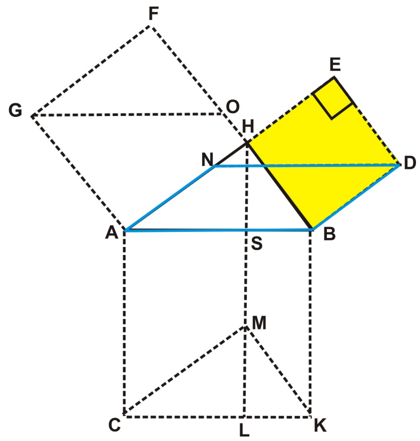

Figura 8: Demonstração Geométrica - Passo 6

Analogamente, verifica-se que a área do paralelogramo $ABOG$ é igual a área do quadrado $AHFG$, conforme Figura 9

$$\text{Área}(ABOG) = GA.FG = \text{Área}(AHFG). \tag{18}$$

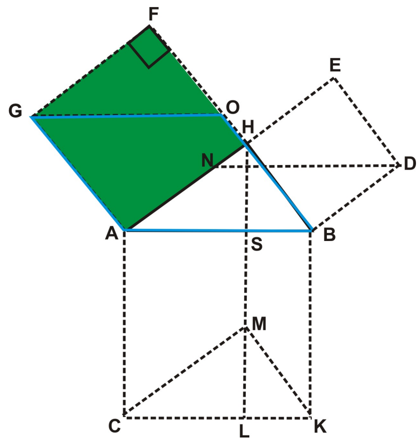

Figura 9: Demonstração Geométrica - Passo 7

Por (10), temos

$$\text{Área}(ACKB) = \text{Área}(ACLS) + \text{Área}(BSLK).$$

Utilizando (11) e (12) na igualdade acima, obtemos

$$\text{Área}(ACKB) = \text{Área}(ACMH) + \text{Área}(BHMK).$$

Com (13) e (16), obtém-se

$$\text{Área}(ACKB) = \text{Área}(ABOG) + \text{Área}(ABDN).$$

Finalmente, por (17) e (18), encontra-se

$$\text{Área}(ACKB) = \text{Área}(AHFG) + \text{Área}(BDEH).$$

Dessa forma, denotando $AB = a$, $AH = b$ e $BH = c$ e calculando as áreas dos respectivos quadrados acima, obtém-se

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

isto é, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Considerações finais

Existem uma gama de demonstrações extremamente enriquecedoras do teorema de Pitágoras, que não são tradicionalmente desonvolvidas em sala de aula. Foram apresentadas nesse artigo duas demonstrações acessíveis, que podem ser trabalhadas com alunos do Ensino Básico.

4 Bibliografia

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1940.

MATTHEWS, P. **The new guinness book of records 1995.** London: Guinness World Records, 1994.

ROSA, E. Mania de Pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, n. 2, p.14-17, 1983.

THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, **Taylor** & **Francis**, 1894-1901, v. 1-7, ISSN 0002-9890.

VERSLUYS, J. **Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras.** Amsterdam: A. Verluys, 1914.