



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Vitor Henrique Lopes Gusson

Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas
UNESP - Univesidade Estadual Pau-
lista "Júlio de Mesquita Filho"
vitor.gusson@unesp.br

Claudio Gomes Pessoa

Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas
UNESP - Univesidade Estadual Pau-
lista "Júlio de Mesquita Filho"
c.pessoa@unesp.br

Aplicação da Teoria de Chebyshev no estudo da ciclicidade de uma classe de sistemas lineares por partes

Application of Chebyshev Theory in the ciclicity of a class of piecewise linear systems.

Resumo

Temos como objetivo apresentar uma aplicação da chamada Teoria de Chebyshev na Teoria Qualitativa das EDOs. Vamos estudar a ciclicidade de uma classe particular de sistemas lineares por partes separados por uma reta. A classe de sistemas aqui considerada é uma classe mais abrangente quando comparada com um artigo encontrado na literatura. Para isto, realizamos uma perturbação linear na classe de sistemas lineares e, a partir da função deslocamento construída com semi-aplicações de Poincaré, utilizamos a teoria de sistemas de Chebyshev para obter o número de ciclos limites. Por fim, aplicando os sistemas de Chebyshev com acurácia em um dos resultados de ciclicidade, mostramos como eles podem ser úteis para melhorar cotas do número máximo de ciclos limites. Este trabalho faz parte da dissertação de mestrado do primeiro autor, orientado pelo segundo autor.

Palavras-chave: Teoria de Chebyshev. Teoria Qualitativa das EDOs. Ciclos Limites. Ciclicidade. Campos de Vetores por Partes.

Abstract

We aim to present an application of the called Chebyshev Theory in the Qualitative Theory of ODEs. We study the ciclicity of a particular class of piecewise linear systems separated by a straight line. The class of systems considered here is a broader class when compared to an article found in the literature. For this, we perform a linear perturbation in the class of piecewise linear systems and, with the displacement map constructed from the half-return Poincaré maps, we use the Chebyshev theory systems to obtain the number of limit cycles. Finally, applying the Chebyshev systems with accuracy to one of the results about ciclicity, we show how its can be useful for to improve the quotas for the maximum number of limit cycles. This work is part of the master dissertation of the first author under supervision of the second author,

Keywords: Chebyshev Theory. Qualitative Theory of ODEs. Limit Cycles. Ciclicity. Piecewise Vector Fields.



1 Introdução

Cada vez mais a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias vem sendo aplicada com sucesso nas mais diversas modelagens matemáticas de fenômenos naturais e problemas de ciências aplicadas tais como Física e Biologia. Com ela, é possível modelar competições entre predadores e presas, conhecido como sistemas do tipo Lotka-Volterra, além do comportamento e evolução de certas doenças (DE PILLIS; RADUNSKAYA, 2003). Contudo, existem certos fenômenos e problemas que não são bem modelados por um sistema dinâmico suave, isto é, por um sistema diferencial de classe C^1 . Tal problema ocorre quando há uma mudança repentina do comportamento e evolução do fenômeno, gerando uma situação de não suavidade da equação diferencial. Assim, mostra-se necessário a utilização de um modelo matemático que contenha períodos de evolução suave, mas que apresente uma interrupção na sua lei de formação, contendo, assim, todos os comportamentos do fenômeno ou problema. Modelos, desta natureza, são conhecidos por sistemas dinâmicos suaves por partes (DI BERNARDO *et al*, 2008) e podemos citar exemplos de modelagens em sistemas elétricos, tendo situações que envolvam interruptores e na biologia, com modelos não suaves para o tratamento de doenças (CARVALHO *et al*, 2022), em que a mudança de comportamento indica o início de um protocolo de tratamento específico.

Um dos principais problemas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, a qual se baseia em técnicas geométricas e topológicas para análise de equações diferenciais sem ser necessário explicitar suas soluções, é a segunda parte do chamado 16º Problema de Hilbert. O problema, exposto em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM), consiste em determinar o número máximo de ciclos limites (i.e., uma órbita periódica isolada) que um campo de vetores polinomial planar de grau n pode ter. Tal problema ainda se encontra em aberto. Por sua complexidade, começou-se a buscar estimativas, isto é, cotas superiores e inferiores, para este número máximo de ciclos limites, mas considerando famílias particulares de campos de vetores. Uma teoria que pode facilitar esta busca por estimativas é a chamada Teoria de Sistemas de Chebyshev (LLIBRE; ŚWIRSZCZ, 2011), a qual teve início a partir de problemas de interpolação de funções e apresenta resultados sobre o número de zeros de funções expressas como combinações lineares de outras (KARLIN; STUDDEN, [1966]; NURNBERGER, 1989). Na Teoria Qualitativa das EDOs, os sistemas de Chebyshev são utilizados para obter cotas do número de zeros da chamada função deslocamento que, em certos casos, pode ser expressa como uma combinação linear de funções. Tal teoria se mostra uma boa opção para o estudo do número de ciclos limites, uma vez que os zeros da aplicação de deslocamento correspondem a ciclos limites do sistema de equações diferenciais associado.

Portanto, com o objetivo de mostrar uma aplicação da teoria de sistemas de Chebyshev na Teoria Qualitativa das EDOs, iremos estudar o sistema linear descontínuo por partes separados por uma reta $\Sigma = \{x = 0\}$, dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} M^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^+, & \text{se } x > 0, \\ M^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^-, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

a partir de três conjuntos distintos de hipóteses e, usando a teoria de sistemas de Chebyshev, obter resultados sobre a ciclicidade de tais sistemas, isto é, o número de ciclos limites que podem bifurcar de um anel de órbitas periódicas a partir de uma perturbação do sistema. Aqui, ressaltamos que a

classe de sistemas lineares por partes utilizada neste artigo é mais abrangente que a do trabalho de Llibre, Novaes e Teixeira (2015), uma vez que os autores consideram uma restrição que, ao nosso entendimento, não é necessária. Além disso, formulamos dois teoremas, Teorema 27 e Teorema 31, os quais são adaptações para os teoremas encontrados no referido trabalho, que garantem que os conjuntos de funções são um sistema completo estendido de Chebyshev, sistema ECT, em uma vizinhança positiva e próxima de 0. No trabalho de Llibre, Novaes e Teixeira (2015), é provado, nestes resultados, que os conjuntos são apenas linearmente independentes.

Este artigo é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos, de forma breve, os principais resultados da teoria clássica e atual de sistemas de Chebyshev que utilizaremos ao longo do artigo. Na Seção 3, introduzimos a teoria de sistemas suaves por partes e apresentamos a construção de semi-aplicações de Poincaré, sendo uma ferramenta importante da Teoria Qualitativa das EDOs no estudo de órbitas periódicas. A aplicação da teoria de sistemas de Chebyshev no estudo da ciclicidade do sistema linear por partes é realizada na Seção 4.

2 Sistemas de Chebyshev

Aqui, apresentamos os resultados da Teoria de Chebyshev, clássica e atual, que serão utilizados nas outras seções.

Sistemas de Chebyshev podem ser totalmente caracterizados pelo número de zeros, simples ou não, que uma combinação linear não trivial de suas funções possui. O resultado a seguir dá uma condição necessária e suficiente para um conjunto de funções diferenciáveis ser um sistema completo estendido de Chebyshev ou, apenas, sistema ECT.

Teorema 1 *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$. Então $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, qualquer combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^k a_i g_i$, com $\sum_{i=0}^k a_i^2 \neq 0$, possui no máximo k zeros, contando suas multiplicidades.*

O resultado a seguir fornece uma caracterização de sistemas ECT a partir de Wronskianos. Esta caracterização, muitas vezes, é usada como definição para tais sistemas por seu uso recorrente em aplicações.

Teorema 2 *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^n[a, b]$. Então, $\{g_i\}_0^n$ é sistema ECT se, e somente se, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, e todo $t \in [a, b]$, temos*

$$W_k(t) = W(g_0, g_1, \dots, g_k)(t) = \begin{vmatrix} g_0(t) & g_1(t) & \cdots & g_k(t) \\ g_0^{(1)}(t) & g_1^{(1)}(t) & \cdots & g_k^{(1)}(t) \\ g_0^{(2)}(t) & g_1^{(2)}(t) & \cdots & g_k^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_0^{(k)}(t) & g_1^{(k)}(t) & \cdots & g_k^{(k)}(t) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Desta maneira, por estes dois resultados, para retirar informações sobre o número de zeros de uma certa combinação linear de funções de um conjunto $\{g_i\}_0^n$ basta calcularmos os Wronskianos

dos subconjuntos $\{g_i\}_0^k$, para $k = 0, 1, \dots, n$, e verificar se são diferentes de zero no intervalo considerado. Na realidade, ainda podemos dizer que sempre existe um elemento do espaço gerado pelas funções do sistema tendo, exatamente, esse número máximo de zeros isolados, estimados pelo teorema acima. Quando isto acontece, dizemos que a cota, isto é, o número máximo de zeros, é realizável. A proposição adiante, encontrada em Llibre e Świrszcz (2011) valida tal afirmação, uma vez que se $\{g_i\}_0^n$ é um sistema ECT, então suas funções são linearmente independentes.

Proposição 3 *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$. Se tais funções são linearmente independentes, então existem pontos distintos $t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in [a, b]$ e constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todas nulas, tais que*

$$g(t_j) = \sum_{k=0}^n \alpha_k g_k(t_j) = 0,$$

para todo $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Como visto, sistemas ECT são completamente caracterizados a partir de Wronskianos não nulos e, isto, proporciona uma caracterização via número de zeros que uma combinação linear não trivial das funções do sistema pode ter. Além disso, é sempre possível obter um elemento do espaço gerado que tem, precisamente, tal quantidade de zeros isolados, como mostra a Proposição 3.

Agora, considerando $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ um conjunto ordenado qualquer de funções suficientemente diferenciáveis, apresentamos um resultado, demonstrado em Gusson (2022), para o número de zeros de elementos do espaço gerado pelas $n + 1$ funções, quando alguns dos Wronskianos $W_k(t) = W(g_0, \dots, g_k)(t)$, $k = 0, \dots, n$, se anulam. Ainda, mostramos resultados sobre a realização de todas as possíveis configurações de zeros de um sistema deste tipo.

Definição 4 *Sejam $g_0, g_1, \dots, g_n \in C^r[a, b]$, $r \geq n$. Diremos que o conjunto ordenado $\{g_i\}_0^n$ é um sistema estendido de Chebyshev com acurácia k se toda combinação linear não trivial, $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$, possui no máximo $n + k$ zeros, contando suas multiplicidades, sendo $k \geq 1$ o menor inteiro positivo tal que a condição acontece.*

Teorema 5 *Sejam g_0, g_1, \dots, g_n funções analíticas no intervalo $[a, b]$. Suponha que todos os v_i 's zeros do Wronskiano $W_i = W(g_0, \dots, g_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$, são simples. Então, o número de zeros isolados de toda combinação linear não trivial, $g = \sum_0^n a_i g_i$, é no máximo*

$$n + v_n + v_{n-1} + 2v_{n-2} + v_{n-3} + \dots + v_1 + v_0 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1}, \quad (3)$$

em que $\mu_r = \min(v_r, v_0 + \dots + v_{r-2})$, para cada $r = 2, 3, \dots, n - 1$.

Definição 6 *Chama-se configuração de $m \leq n$ zeros, de uma função u , um ponto $(p_1, p_2, \dots, p_m, z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}_+^m$ tal que $\sum_{i=1}^m z_i = n$, em que cada p_i é um zero de u de multiplicidade z_i , $i = 1, \dots, m$.*

Teorema 7 *Seja $\{g_0, \dots, g_n\}$ um conjunto ordenado de funções de classe C^∞ , definidas em (a, b) , tal que existe $\xi \in (a, b)$ com $W_{n-1}(\xi) \neq 0$.*

1. *Se $W_n(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $\text{span}(g_0, \dots, g_n)$ com essa configuração.*
2. *Se $W_n(\xi) = 0$ e $W'_n(\xi) \neq 0$, então para cada configuração de $m \leq n + 1$ zeros, levando em conta as multiplicidades, existe um elemento em $\text{span}(g_0, \dots, g_n)$ com essa configuração.*

3 Sistemas suaves por partes

Nesta seção, reunimos as principais definições e convenções sobre a teoria de sistemas de equações diferenciais suaves por partes, que podem ser encontradas em Guardia, Seara e Teixeira (2011).

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e f um germe de função suave de modo que 0 é valor regular, ou seja, $\nabla f(p) \neq (0, 0)$, para todo ponto $p \in f^{-1}(0)$. Sendo assim, $f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade de codimensão 1 em \mathbb{R}^2 , a qual denotaremos por Σ e que pode ser chamada de *variedade de descontinuidade*. Desta maneira, Σ separa o aberto U em dois conjuntos abertos, denominadas *regiões ou zonas de descontinuidade*,

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U : f(x, y) > 0\} \text{ e } \Sigma^- = \{(x, y) \in U : f(x, y) < 0\}.$$

Definição 8 *Um Campo de Vetores Planar Suave por Partes é um campo de vetores $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por*

$$Z(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^+, \\ X^-(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (4)$$

em que X^+ e X^- são campos de vetores suaves.

Observação 9 *Denotamos o campo vetorial por $Z = (X^+, X^-)$, para indicar suas componentes.*

Com o intuito de definir o fluxo do campo, vamos estabelecer o conceito de trajetória local. Para isto, devemos distinguir se p é um ponto em Σ^+ , Σ^- ou Σ . Se p for um ponto em Σ^+ ou Σ^- , a trajetória será dada, então, pela solução do campo X^+ ou X^- , respectivamente. Para pontos em Σ , é preciso separar a variedade de descontinuidade em regiões.

Definição 10 *A derivada de Lie em relação à um campo vetorial X em um ponto p é dada por $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$. Ainda, por recorrência, temos $X^i f(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} f(p) \rangle$.*

Definição 11 *Considere o campo (4), então definimos em Σ as seguintes regiões:*

1. *Região de Costura:* $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p))(X^- f(p)) > 0\}$,
2. *Região de Deslize:* $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p)) < 0 \text{ e } (X^- f(p)) > 0\}$,
3. *Região de Escape:* $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : (X^+ f(p)) > 0 \text{ e } (X^- f(p)) < 0\}$,

Sendo θ o ângulo entre $X(p)$ e $\nabla f(p)$, então o sinal de $Xf(p)$ é determinado por esse ângulo, pois $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla f(p)\| \cos \theta$. Assim, a definição acima exclui os pontos em que $X^+ f(p)$ ou $X^- f(p)$ sejam iguais à zero, chamados de *pontos de tangência*. Tais pontos pertencem, então, às fronteiras (topológicas) das regiões definidas acima, denotadas por $\partial \Sigma^{c,s,e}$. Ainda, pontos de tangência incluem os pontos críticos do campo (4), isto é, pontos $q \in U$ tais que $Z(q) = 0$.

Definição 12 *Um campo de vetores suave X possui uma dobra ou tangência quadrática com Σ em p se $Xf(p) = 0$ e $X^2 f(p) \neq 0$. Sendo $Z = (X^+, X^-)$, se p é um ponto de dobra para ambos os campos X^+ e X^- , dizemos que p é um ponto dobra-dobra para o campo Z .*

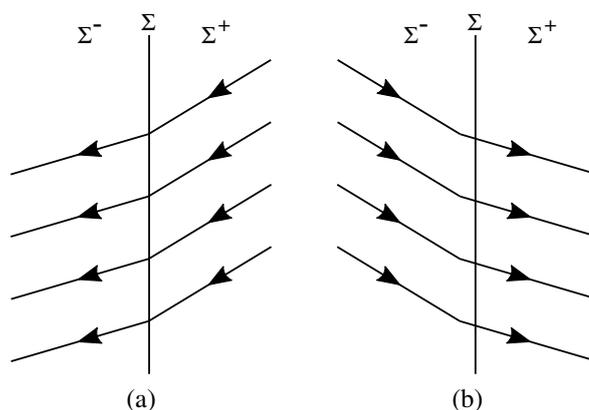


Figura 1: Regiões de Costura

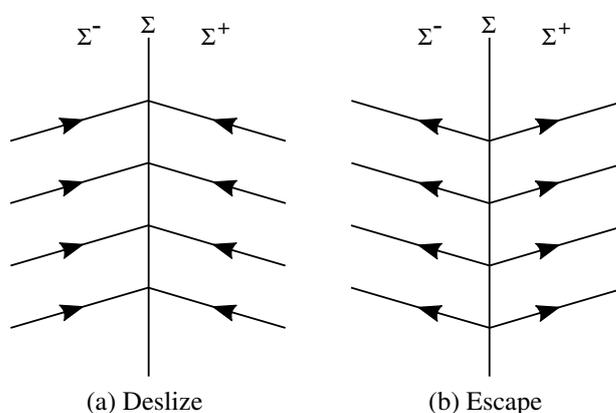


Figura 2: Regiões de Deslize e Escape

Se $p \in \Sigma^c$, então os campos vetoriais X^+ e X^- apontam para a mesma direção. Logo, para a trajetória do campo suave por partes, nesses pontos, é suficiente justapor as trajetórias de cada componente, X^+ e X^- , que passa pelo ponto p . Para pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, os campos X^+ e X^- apontam em direções opostas, o que torna inviável justapor as trajetórias de cada campo passando por p . Neste caso, consideramos um campo vetorial auxiliar Z^s , chamado *campo deslizando* que atua sobre $\Sigma^s \cup \Sigma^e$, tal que as trajetórias de (4), nas regiões de deslize e escape, são dadas pela trajetória de Z^s . Contudo, não exibiremos detalhes sobre esse campo, uma vez que não o utilizamos neste trabalho.

Recordemos que, se X é um campo vetorial suave autônomo definido em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, então o fluxo $\varphi_X(t, p)$ deve satisfazer: $\frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p))$ e $\varphi_X(0, p) = p$, para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 13 A trajetória local de um campo de vetores suave por partes $Z = (X^+, X^-)$, como em (4), que passa por um ponto p é dada por uma das seguintes possibilidades:

- Se $p \in \Sigma^+$ ou $p \in \Sigma^-$ de modo que $X^+(p), X^-(p) \neq 0$, então a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{X^+}(t, p)$ ou $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{X^-}(t, p)$, respectivamente, para $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.
- Se $p \in \Sigma^c$, então dividimos em dois casos, assumindo a origem do tempo em p :

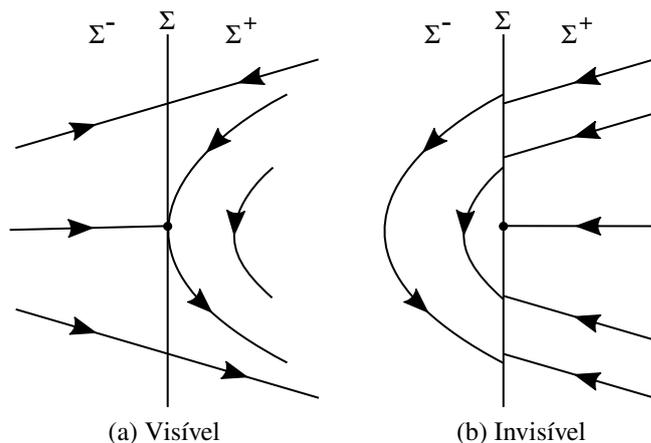


Figura 3: Pontos de tangência do tipo dobra

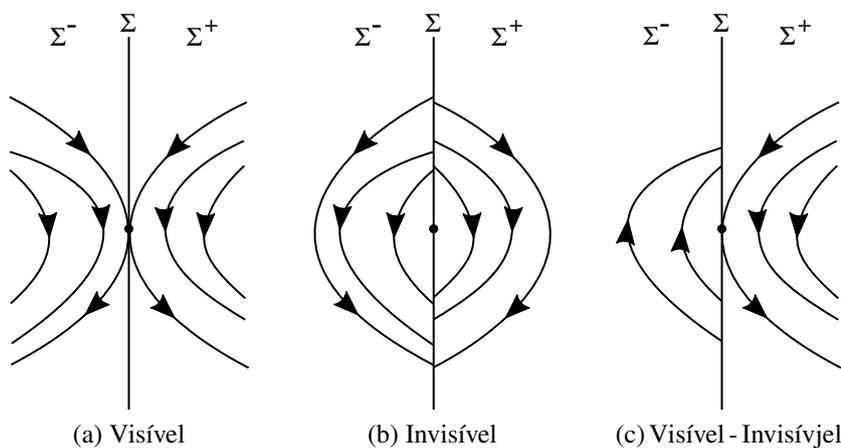


Figura 4: Pontos de tangência do tipo dobra-dobra

1. Se $X^+ f(p), X^- f(p) > 0$, então a trajetória é dada por $\varphi_Z = \begin{cases} \varphi_{X^+}(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_{X^-}(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$

2. Se $X^+ f(p), X^- f(p) < 0$, então a trajetória é dada por $\varphi_Z = \begin{cases} \varphi_{X^+}(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}, \\ \varphi_{X^-}(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}. \end{cases}$

- Se $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ de modo que as definições de trajetórias para pontos de Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e, ainda, coincidem, então a trajetória é esta estendida. É o caso de pontos de tangência regulares
- Se p não se enquadra em nenhum dos itens anteriores, então definimos a trajetória por $\varphi_Z(t, p) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. É o caso dos pontos de tangência singulares, pontos críticos dos campos X^+ e X^- , e pontos críticos do campo deslizando Z^s em $\partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$.

Definição 14 Chamamos de órbita local de um ponto $p \in U$, o conjunto dado por $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I\}$.

Com esta definição de trajetória, garantimos a unicidade de soluções do campo (4) e, ainda, que o espaço de fase pode ser decomposto como a união disjunta de todas as órbitas. Mantendo, desta forma, o usual em campos de vetores suaves.

Definição 15 Dado um campo de vetores suave por partes $Z = (X^+, X^-)$, como em (4), se $p \in \Sigma^\pm$ tal que $X^+(p) = 0$ ou $X^-(p) = 0$, então p é um ponto de equilíbrio de X^+ ou X^- .

Pontos de tangência singular ou regular são pontos $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que $X^+f(p) = 0$ ou $X^-f(p) = 0$. Todo ponto que não se enquadra em algum dos casos acima é chamado de ponto regular.

Definição 16 Seja p um ponto de equilíbrio de X^+ (X^- , respectivamente). Se $p \in \overline{\Sigma^+}$ ($\overline{\Sigma^-}$, respectivamente), então p é dito ponto de equilíbrio real. Se $p \in \Sigma^-$ (Σ^+ , respectivamente), então p é dito ponto de equilíbrio virtual.

Definição 17 Seja a trajetória $\varphi_Z(t, q)$ do campo (4) e $p \in \Sigma$. Então, p é ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $T < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T^+} \varphi_Z(t, q) = p$. Analogamente, p é ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $T > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow T^-} \varphi_Z(t, q) = p$.

Definição 18 Uma separatriz instável é uma órbita regular que é a variedade invariante instável de um ponto de sela $p \in \overline{\Sigma^+}$ de X^+ ou $p \in \overline{\Sigma^-}$ de X^- , dada por $W^u(p) = \{q \in U : \varphi_Z(t, q) \text{ é bem definido em } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p\}$. Analogamente, podemos definir as separatrizes estáveis $W^s(p)$.

Definição 19 Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, então a chamamos de conexão de separatrizes.

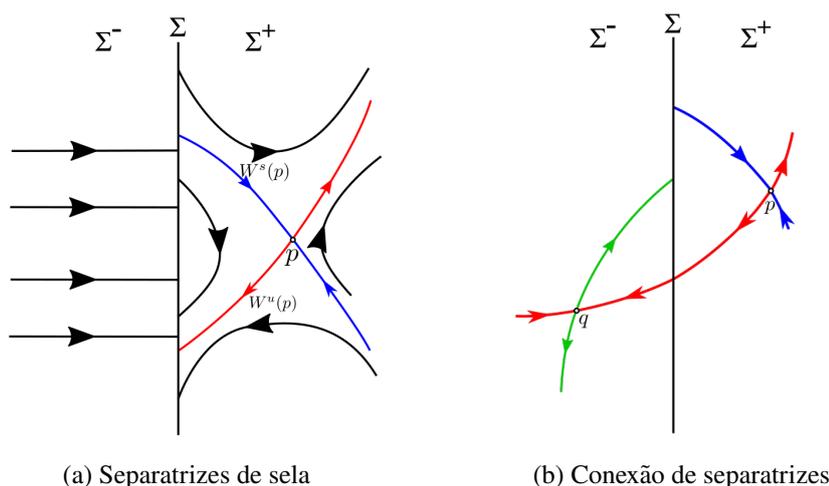


Figura 5: Exemplos de separatrizes e de conexão de separatrizes de uma sela.

Definição 20 Se p é um ponto de sela de X^+ em $\overline{\Sigma^+}$ ou de X^- em $\overline{\Sigma^-}$, dizemos que $\Gamma(p)$ é um laço homoclínico de costura se é uma conexão de separatrizes, tal que p é ponto de chegada e partida de todo $q \in \Gamma(p)$ e, além disso, $\Gamma(p) \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$ com $\Gamma(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$.

Definição 21 Uma órbita periódica regular é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \Sigma^c$ e satisfaz $\varphi_Z(t+T, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$. Aqui, T é dito período se for o menor tempo positivo para o qual a condição acima ocorre.

Definição 22 Seja γ uma órbita periódica regular que passa por p , dizemos que γ é um ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ de modo que $\gamma(q)$ não é órbita periódica regular, para todo $q \in V$ e $q \neq p$.

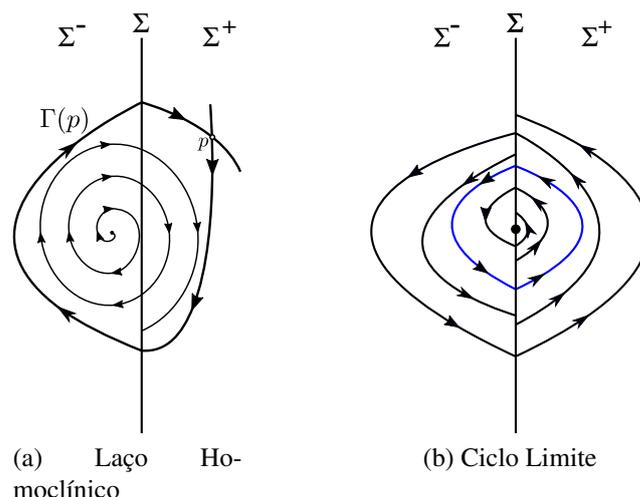


Figura 6: Exemplos de laço homoclínico e de ciclo limite.

3.1 Aplicações e semi-aplicações de Poincaré

Uma das principais ferramentas da Teoria Qualitativa das EDOs que auxilia no estudo de órbitas periódicas e ciclos limites é a chamada aplicação de Poincaré. A partir dela, é possível construir uma função auxiliar, dita função deslocamento, a qual os seus zeros isolados correspondem a ciclos limites do sistema diferencial associado. Mais detalhes podem ser encontrados em Gonçalves (2020).

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (5)$$

definido num aberto $I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Seja $\varphi(t, p)$, o fluxo do sistema acima que passa por um ponto $p \in U$. Vamos supor que em $p_0 \in U$, o sistema possui uma órbita periódica γ . Agora, supomos que $\Sigma \subset U$ é uma subvariedade de dimensão 1 que contém o ponto p_0 , e transversal ao fluxo $\varphi(t, p_0)$. Neste caso, Σ é denominada *seção de Poincaré* ou *seção transversal*. Por continuidade, para todo ponto $p \in \Sigma$, próximo de p_0 , a órbita $\varphi(t, p)$ permanece próxima à γ . Desta forma, a trajetória $\varphi(t, p)$ deve, também, retornar em um ponto $\pi(p) = \varphi(t(p), p)$ em Σ , após um tempo $t(p) > 0$. Desta forma, a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto \varphi(t(p), p) \end{aligned} \quad (6)$$

é chamada de *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de primeiro retorno*.

Caso a interseção de Σ com a órbita periódica γ seja dada em dois pontos, isto é, no próprio ponto p_0 e em um outro ponto $q_0 \in \Sigma$, podemos definir a chamada *aplicação de meio retorno de Poincaré*

ou *semi-aplicação de Poincaré*. Para isto, basta repetir o argumento usado no caso anterior, porém usando o tempo $t(p)$ que a órbita $\varphi(t, p)$ leva para atingir Σ próximo ao ponto q_0 .

A fim de buscar órbitas periódicas e ciclos limites de um determinado sistema diferencial, restringimos-nos a buscar pontos fixos da aplicação de retorno, isto é, pontos $p \in \Sigma$ tal que $\pi(p) = p$. Muitas vezes, é mais prático analisar os zeros da chamada *função deslocamento* dada por $\delta(p) = \pi(p) - p$. Veja a figura 7 para ilustração das aplicações.

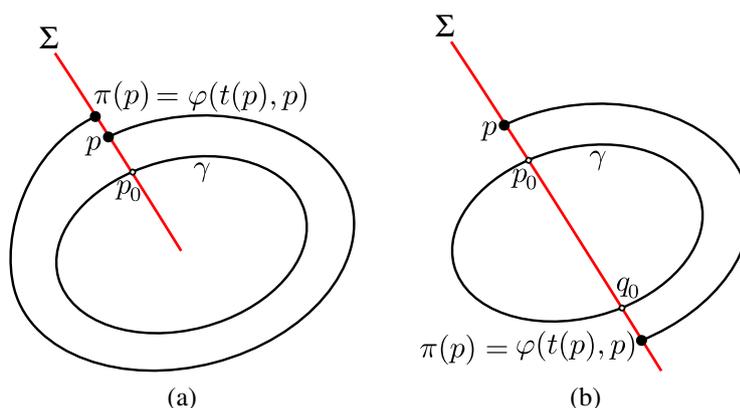


Figura 7: Aplicação e Semi-aplicação de Poincaré

Para sistemas suaves por partes, seguimos a mesma ideia do caso contínuo, considerando a variedade de descontinuidade Σ como seção de Poincaré. Seja um campo por partes $Z = (X^+, X^-)$, separados pela variedade Σ . Seja $p \in \Sigma$. Chamamos de *tempo de retorno* ou *tempo de voo* da órbita de X^+ (X^- , respectivamente), o tempo positivo $t^+(p)$ (negativo $t^-(p)$, respectivamente) que a órbita de X^+ (X^- , respec.), passando por $p \in \Sigma$, leva para retornar para Σ pela primeira vez. Desta maneira, definimos as *semi-aplicações de Poincaré* ou *aplicações de meio retorno* associadas aos campos X^+ e X^- , respectivamente, por $\pi^+(p) = \varphi^+(t^+(p), p)$ e $\pi^-(p) = \varphi^-(t^-(p), p)$.

Aqui, também, definimos a função deslocamento por

$$f(p) = \pi^+(p) - \pi^-(p) = \varphi^+(t^+(p), p) - \varphi^-(t^-(p), p). \quad (7)$$

Em geral, a obtenção direta da expressão de semi-aplicações de Poincaré não é uma tarefa fácil. O que se faz, usualmente, é obter uma expansão para tais aplicações. Mais detalhes de como obter estas expansões podem ser conferidas em Gusson (2022).

4 Ciclicidade de um sistema linear por partes: aplicação da teoria de Chebyshev

Aqui, com o intuito de aplicar alguns dos resultados apresentados sobre sistemas de Chebyshev, iremos estudar, sob algumas hipóteses, o número de ciclos limites que bifurcam por perturbações lineares de um sistema linear por partes descontínuo com duas zonas separadas por uma reta, apresentado no artigo de Llibre, Novaes e Teixeira (2015). Nossa colaboração para com estes resultados está na classe de sistema por partes utilizada, a qual é uma classe mais abrangente que a utilizada pelos autores acima. Uma das principais ferramentas para o estudo de órbitas periódicas é a aplicação de Poincaré e a função deslocamento em que, a grosso modo, cada zero está associado

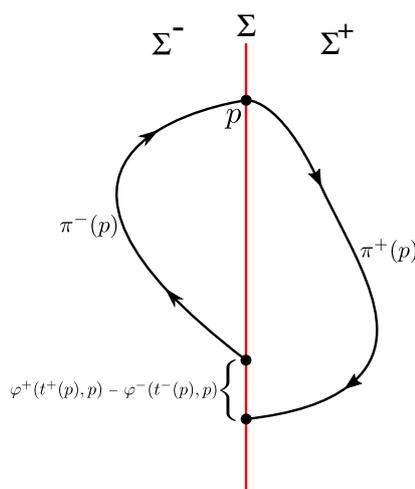


Figura 8: Construção da função deslocamento para sistemas suaves por partes.

um único ciclo limite. Uma vez que determinar este número de zeros, na maioria dos casos, não é uma tarefa fácil, o uso da teoria de Chebyshev, nestes casos, faz-se importante.

Consideremos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} M^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^+, & \text{se } x > 0, \\ M^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u^-, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

um sistema linear por partes descontínuo com duas zonas separadas pela reta $\Sigma = \{x = 0\}$, em que M^+ e M^- são matrizes reais quadradas de ordem 2, $(x, y)^T, u^+$ e $u^- \in \mathbb{R}^2$. Denotaremos por \dot{x} a derivada de x em relação ao tempo t , isto é, à variável independente. Chamaremos de sistema à direita (à esquerda, respectivamente) o sistema (8) restrito à $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ ($\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$, respectivamente).

Agora, vamos considerar três conjuntos de hipóteses para o sistema (8), Ha, Hb e Hc , dadas por

$$Ha = \{Hak : k = 1, 2, 3\}, \quad (9)$$

em que

Ha1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Ha2 o sistema à esquerda tem um centro p na região Σ^- ;

Ha3 p é, também, um centro para o sistema (8) de modo que seu anel periódico, formado por todas as órbitas periódicas ao redor de p , é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

$$Hb = \{Hbk : k = 1, 2, 3\}, \quad (10)$$

tal que

Hb1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Hb2 o sistema à esquerda tem um centro p em Σ ;

Hb3 p é, também, um centro para o sistema (8) de modo que seu anel periódico é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

$$Hc = \{Hck : k = 1, 2, 3\}, \quad (11)$$

com

Hc1 o sistema à direita tem uma sela s na região Σ^+ ;

Hc2 o sistema à esquerda tem um centro virtual p em Σ^+ ;

Hc3 existe um ponto dobra-dobra para o sistema (8), o qual é um centro e tal que seu anel periódico é limitado por um laço homoclínico do ponto de sela s .

Definição 23 Chamamos de Σ -preservação uma mudança afim de variáveis, no plano, que preserva a reta Σ .

Os resultados a seguir estabelecem, para cada um dos conjuntos de hipóteses acima, uma forma normal para o sistema (8), isto é, uma maneira simplificada de escrever o sistema (8) com um número reduzido de parâmetros. Uma vez que a classe de sistemas aqui usada é diferente do que é considerado no artigo de Llibre, Novaes e Teixeira (2015), fez-se necessário realizar outras mudanças de variáveis. Detalhes sobre a obtenção desta classe mais abrangente de sistemas, isto é, das formas normais, bem como as suas condições, são encontrados na dissertação de mestrado do primeiro autor (GUSSON, 2022).

Proposição 24 O sistema linear por partes descontínuo (8), satisfazendo o conjunto de hipóteses Ha , após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (12)$$

em que $A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$ e $A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, com $a, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

Ideia da demonstração. Primeiro, consideremos o sistema à esquerda de (8). Pela hipótese $Ha2$, temos que o ponto singular p do sistema é um centro. Logo, podemos assumir

$$M^- = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & -m_1 \end{pmatrix},$$

com $m_1^2 + m_2m_3 < 0$. Depois, realizamos duas Σ -preservações, transladando o ponto singular $p = (-d, e) = \left(-\frac{m_1u_1^- + m_2u_2^-}{m_1^2 + m_2m_3}, -\frac{m_3u_1^- - m_1u_2^-}{m_1^2 + m_2m_3}\right)$, primeiramente, para $p_1 = (-d, \frac{m_1}{m_2}d)$ e, depois, para

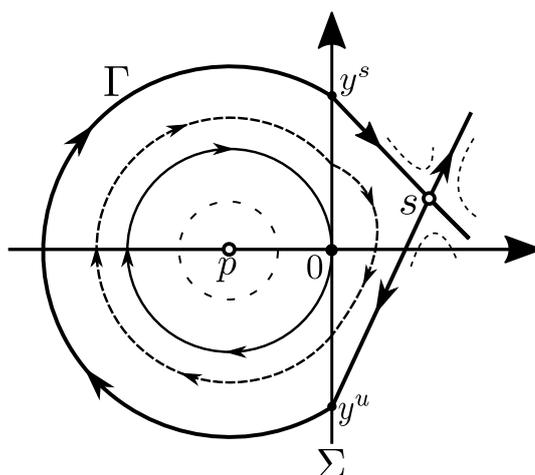


Figura 9: Representação da forma normal (12) com o conjunto de hipóteses H_a .

$p_2 = (-d, 0)$, com $d > 0$, pois $p \in \Sigma^-$. Por fim, fazemos uma reparametrização do tempo t através de $\tau = \sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3} t$.

Para o sistema à direita, repetimos o processo com as mesmas mudanças de variáveis, considerando

$$M^+ = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{com } m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} < 0$$

e obtendo

$$A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{11} - \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}} & \frac{m_{12}}{m_2} \\ -\frac{(m_{21}m_2 - m_{22}m_1 + m_{11}m_1 - \frac{m_{12}m_1^2}{m_2})}{m_1^2 + m_2 m_3} & \frac{m_{22} + \frac{m_{12}m_1}{m_2}}{\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}} \end{pmatrix},$$

e

$$s = \begin{pmatrix} c \\ -\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{22}u_1^+ - m_{12}u_2^+}{m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22}} \\ -\frac{(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})u_1^- + (m_{21}u_1^+ - m_{11}u_2^+)m_2 + (m_{12}u_2^+ - m_{22}u_1^+)m_1}{(m_{12}m_{21} - m_{11}m_{22})\sqrt{-m_1^2 - m_2 m_3}} \end{pmatrix},$$

com $c > 0$, como ponto singular.

A condição $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$ obtemos a partir do determinante negativo de A^+ , por estar associado a um ponto de sela.

A condição $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ é obtida verificando que a origem é um ponto de dobra-dobra.

E, por fim, a condição $\bar{b} = -\bar{a}$ é obtida através da simetria induzida pelo ponto de centro e pelo laço homoclínico. Fazemos isto calculando os pontos y^u e y^s de interseção do laço Γ com Σ e impondo que $y^u = -y^s$. \square

Proposição 25 *O sistema linear por partes descontínuo (8), satisfazendo o conjunto de hipóteses H_b , após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma*

normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (13)$$

em que $A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$ e $A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, com $d = 0$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

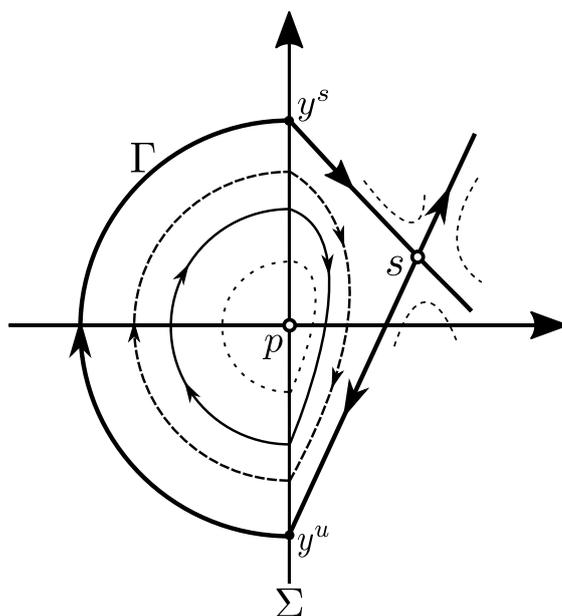


Figura 10: Representação da forma normal (13) com o conjunto de hipóteses Hb.

Proposição 26 *O sistema linear por partes descontínuo (8), satisfazendo o conjunto de hipóteses Hc, após uma Σ -preservação e uma reparametrização do tempo, pode ser reescrito na forma normal*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix}, & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix}, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (14)$$

em que $A^+ = \begin{pmatrix} \bar{a} & a \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$ e $A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, com $d < 0$, $a, c > 0$, $\bar{b} = -\bar{a}$, $\bar{c} = \frac{\bar{a}c}{a}$ e $\bar{a}\bar{b} - ab < 0$.

No trabalho de Llibre, Novaes e Teixeira (2015), os autores adicionam a condição de que $\bar{a} = 0$ e, conseqüentemente, $\bar{b} = \bar{c} = 0$. No entanto, não encontramos justificativa para que tal parâmetro seja nulo e é isto que diferencia as duas classes de sistemas utilizados no artigo dos autores citado e deste.

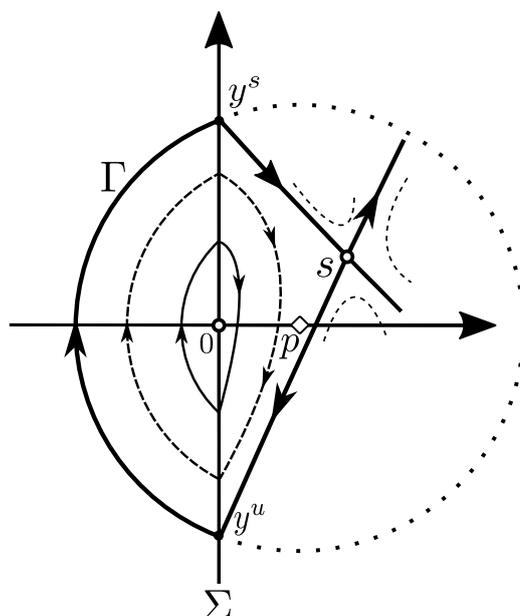


Figura 11: Representação da forma normal (14) com o conjunto de hipóteses Hc.

Consideremos, agora, a seguinte perturbação das formas normais do sistema (8), obtidas nas proposições acima, dentro da classe de sistemas lineares descontínuos por partes com duas zonas separadas por $\Sigma = \{x = 0\}$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} A^+ \begin{pmatrix} x - c \\ y - \bar{c} \end{pmatrix} + \varepsilon \left(B^+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^+ \right), & \text{se } x > 0, \\ A^- \begin{pmatrix} x + d \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \left(B^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v^- \right), & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (15)$$

com $\varepsilon \neq 0$ um parâmetro real suficientemente pequeno, $B^\pm = \begin{pmatrix} b_1^\pm & b_2^\pm \\ b_3^\pm & b_4^\pm \end{pmatrix}$ e $v^\pm = \begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix}$.

Denotamos, ainda, por N o número máximo de ciclos limites do sistema perturbado (15) acima, que podem bifurcar, para ε suficientemente pequeno, a partir das soluções periódicas (no interior do laço homoclínico) dos sistemas não perturbados, isto é, das formas normais apresentadas nas proposições anteriores, com seus respectivos conjuntos de hipóteses.

Teorema 27 *Considere o sistema (12), sob as hipóteses Ha e da Proposição 24, então $N = 2$ para pontos próximos de 0. Além disso, podemos encontrar parâmetros b_i^\pm , para $i = 1, 2, 3, 4$ e v_j^\pm , para $j = 1, 2$, de modo que o sistema (15), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, para pontos próximos de 0, exatamente 0, 1 ou 2 ciclos limites*

Demonstração. Denote por $\varphi^\pm(t, x, y, \varepsilon) = (\varphi_1^\pm(t, x, y, \varepsilon), \varphi_2^\pm(t, x, y, \varepsilon))$, as soluções do sistema (15), para $x > 0$ e $x < 0$, tais que $\varphi^\pm(0, x, y, \varepsilon) = (x, y)$. Agora, faremos uso das semi-aplicações de Poincaré. Consideremos $y > 0$ e $t^+(y, \varepsilon)$ o menor tempo positivo para que $\varphi_1^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = 0$. Da mesma forma, seja $t^-(y, \varepsilon)$ o maior tempo negativo tal que $\varphi_1^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = 0$. Desta maneira, como os pontos estão na variedade Σ , e possuem a mesma condição inicial, teremos um

ciclo limite passando por y se, e só se, for verificado que $\varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) = \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon)$, isto é, se as órbitas intersectam-se no mesmo ponto. Além disso, estudar essa igualdade é equivalente a analisar o número de zeros da função deslocamento

$$f(y, \varepsilon) = \varphi_2^+(t^+(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon) - \varphi_2^-(t^-(y, \varepsilon), 0, y, \varepsilon). \quad (16)$$

Com o auxílio de um software de cálculo simbólico, podemos encontrar as soluções para o sistema (15) com condição inicial em $(0, y)$ para $y > 0$ e os tempos de retorno t^+ e t^- . Ao substituirmos t^+ em φ_2^+ e t^- em φ_2^- na função deslocamento (16), podemos expandir tal função em série de Taylor, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1 e obter $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_1(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_1(y) = k_1 g_1(y) + k_2 g_2(y) + k_3 g_3(y), \quad (17)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{a(b_1^- + b_4^-)d + (b_1^+ + b_4^+)c - 2av_1^- + 2v_1^+}{a}, & g_1(y) &= 1, \\ k_2 &= -\frac{b_1^- + b_4^-}{4}, & g_2(y) &= \frac{d^2 + y^2}{y} \left(3\pi + 2 \arctan \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right) \right), \\ k_3 &= \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2 \sqrt{\bar{a}^2 + ab}}, & g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2}{y} \log \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right). \end{aligned}$$

Vamos, agora, mostrar que o conjunto $G_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ forma um sistema ECT para pontos positivos próximos de $y = 0$. De fato, calculando os Wronskianos das funções, obtemos

$$W_0(y) = W(g_1)(y) = 1,$$

$$W_1(y) = W(g_1, g_2)(y) = \frac{-3d^2\pi - 4dy + 3\pi y^2 + 2(-d^2 + y^2) \arctan \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right)}{y^2}$$

$$\begin{aligned} W_2(y) = W(g_1, g_2, g_3)(y) &= \frac{-2}{y^5(d^2 + y^2)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2} \left(c^2(d^2 + y^2)(3d^2\pi + 4dy \right. \\ &\quad \left. - 3\pi y^2 + 2(d^2 - y^2) \arctan \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right) \right) \left(-2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{5}{2}} c^3 y + 2a^3(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}} c y^3 \right. \\ &\quad \left. + (\bar{a}^2 + ab)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2 \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) \right) \\ &\quad + d^2((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2)^2 \left(3d^2\pi + 4dy + 3\pi y^2 + 2(d^2 + y^2) \arctan \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left(2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y - (\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 + ay^2)) \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay} \right) \right). \end{aligned}$$

Note que os Wronskianos W_1 e W_2 não são definidos em $y = 0$. Para contornar tais problemas vamos multiplicar W_1 por y^2 e W_2 por y^5 e, daí, expandir tais funções. Depois, dividimos as expansões resultantes pelos fatores respectivos que foram multiplicados. Ainda, para resolver o problema com o termo $\arctan \left(\frac{d^2 - y^2}{2dy} \right)$, realizamos, na verdade, uma expansão em um ponto $\beta > 0$ e depois tomamos

o limite para $\beta \rightarrow 0^+$. Assim, o termo mencionado é substituído por $\arctan\left(\frac{d^2 - \beta^2}{2d\beta}\right)$, cujo limite para $\beta \rightarrow 0$ é igual à $\frac{\pi}{2}$. Procedendo como mencionado, obtemos as expansões dos Wronskianos dadas por

$$\begin{aligned} W_0(y) &= 1, \\ W_1(y) &= 4\pi - \frac{4\pi d^2}{y^2} + O(y^3) \\ W_2(y) &= \frac{32a^3 d^2 \pi}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y^2} + O(y^4). \end{aligned}$$

Veja que W_1 se anula somente em $y = d$. Logo, para pontos positivos próximos de 0, os Wronskianos estão bem definidos e não se anulam. Assim, G_1 forma um sistema ECT. Desta maneira, então, toda combinação linear não trivial dos elementos de G_1 possui, no máximo, 2 zeros, contando suas multiplicidades. Ainda, pela Proposição 3, tal cota é realizável, isto é, é possível encontrar elementos do espaço gerado por G_1 tendo, exatamente, 0, 1 e 2 zeros simples, para pontos $y > 0$ próximos de 0. Resta mostrar que tais zeros são, de fato, zeros isolados da função deslocamento.

Vamos supor que y^* seja um zero simples de (17). Se definirmos $F(y, \varepsilon) = f_1(y) + O(\varepsilon)$ de modo que $\varepsilon F(y, \varepsilon) = f(y, \varepsilon)$, então temos que tal função $F(y, \varepsilon)$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Aplicação Implícita numa vizinhança de $(y^*, 0)$, ou seja,

$$F(y^*, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} F(y, \varepsilon) \Big|_{(y^*, 0)} \neq 0.$$

Desta maneira, existe uma única função $\xi(\varepsilon)$ tal que

$$F(\xi(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \text{ e } \xi(0) = y^*.$$

Portanto, pela expressão da função deslocamento (16), para cada zero simples de (17), existe um único ciclo limite de (15). E, isto, junto à Proposição 3, finaliza a demonstração do teorema. \square

Corolário 28 *Nas hipóteses do Teorema 27, vamos assumir que $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{4}$, $b_1^+ = \frac{11712}{5}$, $b_1^- = -13312$, $v_1^+ = 4496$ e $\bar{a} = b_2^\pm = b_4^\pm = b_2^\pm = v_1^- = v_2^\pm = 0$. Então, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (12) possui, ao menos, três ciclos limites passando numa ε -vizinhança dos pontos $(0, y_i)$, em que y_i , $i = 1, 2, 3$, são as soluções da equação*

$$\begin{aligned} \frac{16}{5y} \left(-5312y + 195(\pi + 16\pi y^2) + 130(1 + 16y^2) \arctan\left(\frac{1 - 16y}{8y}\right) \right. \\ \left. + 183(1 - 4y^2) \ln\left(\frac{1 + 2y}{1 - 2y}\right) \right) = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

para $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Além disso, uma aproximação numérica com 4 casas decimais dos zeros y_i , $i = 1, 2, 3$, é dada por $y_1 = 0.3116$, $y_2 = 0.4389$ e $y_3 = 0.4924$.

Lema 29 *Considere o sistema (13), sob as hipóteses H_b e da Proposição 25. Se $b_1^+ = -b_4^+$, $b_1^- = -b_4^-$ e $v_1^+ = av_1^-$, então o sistema (15) não admite ciclos limites.*

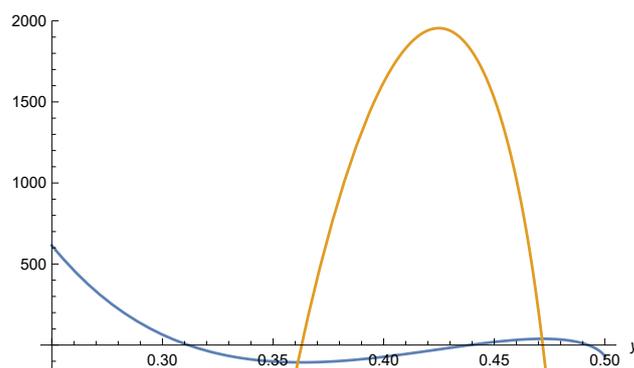


Figura 12: Gráficos da função deslocamento do Corolário 28 em azul e de sua derivada em amarelo.

Teorema 30 *Considere o sistema (13), sob as hipóteses H_b e da Proposição 25, então $N = 2$. Além disso, podemos encontrar parâmetros b_i^\pm , para $i = 1, 2, 3, 4$ e v_j^\pm , para $j = 1, 2$, de modo que o sistema (15), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, exatamente, 0, 1 ou 2 ciclos limites.*

Demonstração. Novamente, usando um software de cálculo simbólico e procedendo como no Teorema 27, podemos construir a função deslocamento associada ao sistema, cuja expansão em série de Taylor, em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1, é dada por $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_2(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_2(y) = k_1 g_1(y) + k_2 g_2(y) + k_3 g_3(y), \quad (19)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{(b_1^+ + b_4^+)c - 2av_1^- + 2v_1^+}{a}, & g_1(y) &= 1, \\ k_2 &= -\frac{b_1^- + b_4^-}{2}, & g_2(y) &= y, \\ k_3 &= \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}}, & g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c - a^2y^2}{y} \log\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right). \end{aligned} \quad e$$

Para finalizar a demonstração do teorema, vamos mostrar que $G_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$ forma um sistema ECT. De fato, temos

$$\begin{aligned} W_1(y) &= W(g_1)(y) = 1, \\ W_2(y) &= W(g_1, g_2)(y) = 1, \\ W_3(y) &= W(g_1, g_2, g_3)(y) \\ &= \frac{2c^2(2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}}cy - (\bar{a}^2 + ab)((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2) \ln\left(\frac{\sqrt{a^0^2 + abc + ay}}{\sqrt{a^0^2 + abc - ay}}\right))}{-(\bar{a}^2 + ab)c^2y^3 + a^2y^5}. \end{aligned} \quad (20)$$

Notemos, primeiramente, que a função \ln acima é definida para todo ponto $y \in \left(-\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$. Logo, W_3 está definido para todo $y \in \left(-\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$. Porém, como estamos considerando $y > 0$, vamos tomar $I = \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$ como intervalo de definição dos Wronskianos. Agora,

escrevendo o Wronskiano $W_3(y)$ como

$$W_3(y) = \frac{2(\bar{a} + ab)c^2}{((\bar{a}^2 + ab)c^2y^3) - a^2y^5}P(y), \quad (21)$$

em que $P(y) = -2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc}y + ((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2) \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right)$, temos

$$P'(y) = -2a^2y \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right).$$

Note que, $P(0) = 0$ e $P'(y) < 0$ para qualquer $y \in I$. Assim, temos, também, $P(y) < 0$ para $y \in I$. Por fim, a função racional que multiplica $P(y)$ em (21) também está bem definida, e é diferente de zero no intervalo I . Desta forma, W_3 é um produto de duas funções que não se anulam neste intervalo e, conseqüentemente, $W_3 \neq 0$ em I . Portanto, o conjunto G_2 forma um sistema ECT em $I = \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$.

Como (19) só é identicamente nula nas condições do Lema 29, para este caso o sistema não apresenta ciclos limites. Assim, assumindo que (19) não é identicamente nula, temos que seus zeros indicam ciclos limites para o sistema. Sendo G_2 um sistema ECT, então é possível encontrar elementos do espaço gerado por G_2 tendo 0, 1 e 2 zeros simples. Daí, novamente pelo Teorema da Aplicação Implícita, concluímos a demonstração. \square

Teorema 31 *Considere o sistema (14), sob as hipóteses Hc e da Proposição 26, então $N = 2$. Além disso, podemos encontrar parâmetros b_i^\pm , para $i = 1, 2, 3, 4$ e v_j^\pm , para $j = 1, 2$, de modo que o sistema (15), satisfazendo as mesmas hipóteses quando $\varepsilon = 0$, tenha, exatamente, 0, 1 ou 2 ciclos limites.*

Demonstração. Mais uma vez, podemos construir a função deslocamento, expandida em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, até ordem 1, como $f(y, \varepsilon) = \varepsilon f_3(y) + O(\varepsilon^2)$, em que

$$f_3(y) = k_1g_1(y) + k_2g_2(y) + k_3g_3(y), \quad (22)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{a(b_1^- - b_4^-)d + (b_1^+ + b_4^+)c - 2v_1^+}{a}, & g_1(y) &= 1, \\ k_2 &= \frac{b_1^- + b_4^-}{4}, & g_2(y) &= \frac{d^2 + y^2}{y} \left(\pi + 2 \arctan\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right) \right), \\ k_3 &= \frac{b_1^+ + b_4^+}{2a^2\sqrt{\bar{a}^2 + ab}}, & g_3(y) &= \frac{(\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2y^2}{y} \log\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right). \end{aligned}$$

Calculando os Wronskianos, temos

$$W_0(y) = W(g_1)(y) = 1,$$

$$W_1(y) = W(g_1, g_2)(y) = \frac{-d^2\pi - 4dy + \pi y^2 + 2(-d^2 + y^2) \arctan\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)}{y^2}$$

$$W_2(y) = W(g_1, g_2, g_3)(y) = \frac{-2}{y^5(d^2 + y^2)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2} \left(c^2(d^2 + y^2)(d^2\pi + 4dy - \pi y^2 + 2(d^2 - y^2) \arctan\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)) \right. \\ \left. (-2a(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{5}{2}} c^3 y + 2a^3(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}} c y^3 + (\bar{a}^2 + ab)(\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 - ay^2))^2 \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right) \right) \\ \left. + d^2((\bar{a}^2 + ab)c^2 - a^2 y^2)^2 (d^2\pi + 4dy + \pi y^2 + 2(d^2 + y^2) \arctan\left(\frac{d^2 - y^2}{2dy}\right)) \right. \\ \left. \cdot (2a\sqrt{\bar{a}^2 + abc} y - (\bar{a}^2 c^2 + a(bc^2 + ay^2)) \ln\left(\frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} + ay}{\sqrt{\bar{a}^2 + abc} - ay}\right)) \right).$$

Uma vez que tais expressões são um tanto complexas para uma análise direta, junto ao fato de que não estão definidas em $y = 0$, podemos proceder conforme feito na demonstração do Teorema 27, isto é, expandir as funções W_1 e W_2 , multiplicadas, respectivamente, por y^2 e y^5 , em um ponto $\beta > 0$ e, depois, tomar o limite quando $\beta \rightarrow 0$ e, por fim, dividir as expressões pelas respectivas potências de y que foram multiplicadas. Assim, obtemos as tais expansões em série de potências de y

$$W_0(y) = 1,$$

$$W_1(y) = -\frac{16}{3d}y + O(y^4),$$

$$W_2(y) = \frac{512a^3((\bar{a}^2 + ab)c^2 + a^2 d^2)}{45(\bar{a}^2 + ab)^{\frac{3}{2}} c^3 d^3} y^3 + O(y^9),$$

os quais não se anulam em pontos próximos de 0 e nem no intervalo de definição $I = \left(0, \frac{\sqrt{\bar{a}^2 + abc}}{a}\right)$ dos Wronskianos acima e das funções g_1, g_2 e g_3 . Portanto, o conjunto $G_3 = \{g_1, g_2, g_3\}$ forma um sistema ECT. Por fim, pelo Teorema da Função Implícita, finalizamos a demonstração. \square

4.1 Aplicação da teoria de Chebyshev com acurácia

Faremos uso da teoria de Chebyshev com acurácia, exibida no início do artigo, para melhorar o resultado obtido no Teorema 27. Neste teorema, o sistema (15) tem, exatamente, 2 ciclos limites para pontos próximos de $y = 0$. Aqui, mostraremos que este número máximo de ciclos limites é, exatamente, 2 ou 3, dependendo dos valores dos parâmetros e considerando todo o intervalo de definição das funções.

Seja $G_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ o conjunto de funções obtidas no Teorema 27. Indicaremos por $N(G_1)$ o número máximo de zeros de um elemento do espaço gerado por G_1 . Para simplificar a notação,

vamos considerar o conjunto $\mathcal{F}(\alpha) = \{u_0, u_1^\alpha, u_2\}$, definido no intervalo $(0, \alpha)$, tal que

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1^\alpha(t) &= \frac{\alpha^2 - t^2}{t} \ln\left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t}\right), \\ u_2(t) &= \frac{t^2 + 1}{t} \left(3\pi - 2 \arctan\left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Note que $\alpha = \frac{c\sqrt{a^2+ab}}{qd} > 0$ e que os conjuntos G_1 e $\mathcal{F}(\alpha)$ se relacionam pelas igualdades $u_0(t) = g_1(y)$, $u_1^\alpha(t) = \frac{1}{a^2d} g_2(dt)$ e $u_2(t) = \frac{1}{d} g_3(dt)$. Logo, $N(G_1) = N(\mathcal{F}(\alpha))$. Vamos mostrar, primeiramente, que $N(\mathcal{F}(\alpha)) \leq 3$. Para realizar isto, vamos estender o espaço gerado por $\mathcal{F}(\alpha)$ no espaço gerado por $\mathcal{F}^*(\alpha) = \{u_0, u_2^*, u_3, u_1^\alpha\}$, cujas funções são dadas por

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1^\alpha(t) &= \frac{\alpha^2 - t^2}{t} \ln\left(\frac{\alpha + t}{\alpha - t}\right), \\ u_2^*(t) &= \frac{t^2 + 1}{t} \arctan\left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right), \\ u_3(t) &= \frac{t^2 + 1}{t}. \end{aligned} \quad (24)$$

e mostrar que tal conjunto de funções forma um sistema ECT.

Proposição 32 *O conjunto ordenado $\mathcal{F}^*(\alpha) = \{u_0, u_2^*, u_3, u_1^\alpha\}$ é um sistema ECT no intervalo $(0, \alpha)$. Portanto, $N(\mathcal{F}^*(\alpha)) = 3$.*

Da proposição acima, concluímos que $N(G_1) = N(\mathcal{F}(\alpha)) \leq 3$.

Teorema 33 *Seja $\mathcal{F}(\alpha) = \{u_0, u_1^\alpha, u_2\}$ o conjunto ordenado dado pelas funções (23). Então,*

$$N(\mathcal{F}(\alpha)) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 < \alpha \leq \alpha^*, \\ 3, & \text{se } \alpha > \alpha^*, \end{cases}$$

em que α^* é a solução positiva de $4\alpha - 3\pi(-1 + \alpha^2) + 2(-1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + \alpha^2}{2\alpha}\right) = 0$.

Demonstração. Os Wronskianos das funções do conjunto $\mathcal{F}(\alpha)$ são dados por

$$\begin{aligned} W_0(t) &= W(u_0)(t) = 1, \\ W_1(t) &= W(u_0, u_1^\alpha)(t) = \frac{2\alpha t - (t^2 + \alpha^2) \ln\left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha}\right)}{t^2} = \frac{t^2 + \alpha^2}{t^2} P(t), \\ W_2(t) &= W(u_0, u_1^\alpha, u_2)(t) = \frac{Q(t)}{t^3}, \end{aligned}$$

em que

$$P(t) = \frac{2\alpha t}{t^2 + \alpha^2} - \ln\left(\frac{t + \alpha}{-t + \alpha}\right),$$

$$Q(t) = \frac{1}{(1 + t^2)(t^2 - \alpha^2)} \left(4\alpha t(-3\pi(1 + t^2)(-1 + \alpha^2) + 4t(1 + \alpha^2)) \right. \\ \left. + 8t(1 + t^2)\alpha(-1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) - 2(t^2 - \alpha^2) \left(-4t(-1 + \alpha^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 3\pi(1 + t^2)(1 + \alpha^2) - 2(1 + t^2)(1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) \right) \ln\left(\frac{t + \alpha}{-t + \alpha}\right) \right).$$

Note que $P(0) = 0$ e $P'(t) = \frac{8\alpha^3 t^2}{(t^2 - \alpha^2)(t^2 + \alpha^2)^2} < 0$ em $(0, \alpha)$. Assim, $P(t)$ não se anula em $(0, \alpha)$. Logo, $W_0(t)$ e $W_1(t)$ são diferentes de zero no intervalo $(0, \alpha)$. Para analisarmos a função $Q(t)$ no intervalo $(0, \alpha)$, vamos nos concentrar no comportamento de $Q(t)$ próximo aos pontos de fronteira de $(0, \alpha)$ e nas propriedades de monotonicidade no intervalo todo. Desejamos expandir a função $Q(t)$, em série de potências, próxima de 0 e de α . Contudo a função $Q(t)$ não está definida em ambos os pontos. Em $t = 0$, a estratégia para calcular a expansão de $Q(t)$ é expandi-la em um ponto $\varepsilon > 0$ e depois tomar o limite para $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Desta forma, a função $\arctan\left(\frac{-1+t^2}{2t}\right)$, que gera o problema da não definição de Q em 0, é substituída por $\arctan\left(\frac{-1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)$, com $\varepsilon > 0$, cujo limite para $\varepsilon \rightarrow 0$ é igual à $-\frac{\pi}{2}$. Feito isso, obtemos a expansão de $Q(t)$ em torno de $t = 0$, dada por

$$Q(t) = -\frac{32\pi}{\alpha}t + \frac{32\pi(\alpha^2 - 2)}{3\alpha^3}t^3 + \frac{32\pi(2\alpha^2 - 3)}{5\alpha^5}t^5 \\ - \frac{512(1 + \alpha^2)}{45\alpha^3}t^6 + O(t^7). \quad (25)$$

Em $t = \alpha$, o problema está na parcela $\frac{1}{t^2 - \alpha^2} \ln\left(\frac{t + \alpha}{-t + \alpha}\right)$, a qual não está definida neste ponto. Desta forma, o que fazemos é, primeiramente, usar a propriedade de logaritmo do quociente e aplicar a distributiva com relação à essa diferença. Assim, agrupando os termos que são multiplicados por $\ln(-t + \alpha)$, obtemos

$$Q(t) = \frac{2}{1 + t^2} \left(-4t(-1 + \alpha^2) + 3\pi(1 + t^2)(1 + \alpha^2) \right. \\ \left. - 2(1 + t^2)(1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) \right) \ln(-t + \alpha) \\ + \frac{1}{(1 + t^2)(t^2 - \alpha^2)} \left(4\alpha t(-3\pi(1 + t^2)(-1 + \alpha^2) + 4t(1 + \alpha^2)) \right. \\ \left. + 8\alpha t(1 + t^2)(-1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) - 2(t^2 - \alpha^2) \left(-4t(-1 + \alpha^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 3\pi(1 + t^2)(1 + \alpha^2) - 2(1 + t^2)(1 + \alpha^2) \arctan\left(\frac{-1 + t^2}{2t}\right) \right) \ln(t + \alpha) \right).$$

Agora, a ideia é expandir a função Q em partes. Primeiro, expandimos em $t = \alpha$, até ordem 1, a expressão que multiplica $\ln(-t + \alpha)$, tomando o termo constante, e multiplicamos por $\ln(-t + \alpha)$. Depois, visto que a segunda parcela da expressão de Q ainda não está definida em $t = \alpha$, multiplicamos tal expressão por $(t - \alpha)$ e a expandimos. Logo após, dividimos o resultado por $(t - \alpha)$. Por fim, somamos as expressões resultantes obtemos a expansão da função Q em $t = \alpha$, dada por

$$Q(t) = \frac{\alpha(-1 + \alpha^2)}{\alpha - t} L_1(\alpha) + (\alpha^2 + 1) \ln(-t + \alpha) L_2(\alpha) + O(1), \quad (26)$$

em que

$$L_1(\alpha) = 6\pi - \frac{8\alpha}{-1 + \alpha^2} - 4 \arctan\left(\frac{-1 + \alpha^2}{2\alpha}\right), \quad (27)$$

$$L_2(\alpha) = 6\pi - \frac{8\alpha(-1 + \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} - 4 \arctan\left(\frac{-1 + \alpha^2}{2\alpha}\right). \quad (28)$$

Sendo $A(t) = -\arctan\left(\frac{-1+t^2}{2t}\right)$ e $L(t) = \ln\left(\frac{t+\alpha}{-t+\alpha}\right)$, temos que a derivada de $Q(t)$ é dada por $Q_1(t) = Q'(t) = q_0(t) + q_1(t)A(t) + q_2(t)L(t)$, em que q_0, q_1 e q_2 são funções racionais, com $q_2(t) = \frac{16(t^2+\alpha^2)}{(1+t^2)^2}$. Dividindo $Q_1(t)$ por $q_2(t)$ e derivando, obtemos $Q_2(t) = (Q_1(t)/q_2(t))' = \tilde{q}_0(t) + \tilde{q}_1(t)A(t)$, com \tilde{q}_0 e \tilde{q}_1 funções racionais, sendo

$$\tilde{q}_1(t) = \frac{2\alpha^3 t(1+t^2)(1+\alpha^2)(t^4 - \alpha^2 + 3t^2(-1 + \alpha^2))}{(t^2 - \alpha^2)^3(t^2 + \alpha^2)^2}.$$

Derivando $Q_2(t)/\tilde{q}_1(t)$, obtemos

$$Q_3(t) = (Q_2(t)/\tilde{q}_1(t))' = -\frac{32(t^2 + \alpha^2)(t^4 + \alpha^2)}{(1 + t^2)^2(t^4 - \alpha^2 + 3t^2(-1 + \alpha^2))^2}. \quad (29)$$

Note que a função $t \mapsto (t^4 - \alpha^2 + 3t^2(-1 + \alpha^2))$ é negativa para $\alpha \leq 1$ e, para $\alpha > 1$, possui um único zero t^* em $(1, \alpha)$. De fato, como os zeros da função são $t = \pm \frac{\sqrt{3-3\alpha^2 \pm \sqrt{9-14\alpha^2+9\alpha^4}}}{\sqrt{2}}$, temos que $t^* = \frac{\sqrt{3-3\alpha^2 + \sqrt{9-14\alpha^2+9\alpha^4}}}{\sqrt{2}}$. Desta maneira, para $\alpha > 1$, em t^* , a função $Q_3(t)$ tem uma assíntota e \tilde{q}_1 tem um zero. Sendo $\alpha \leq 1$, temos que as funções Q_3, q_2 e \tilde{q}_1 no intervalo $(0, \alpha)$ são, respectivamente, negativa, positiva e positiva. Ainda, os limites de Q_1/q_2 e Q_2/\tilde{q}_1 , quando $t \rightarrow 0^+$ são, respectivamente, $-\frac{2\pi}{\alpha^3}$ e -2π . Pelo procedimento de divisão e derivação, feito acima, vamos verificar que a função Q é decrescente e negativa. Com efeito, como Q_3 é negativa e é a derivada da função Q_2/\tilde{q}_1 , segue que Q_2/\tilde{q}_1 é uma função decrescente, a qual possui limite negativo, para $t \rightarrow 0^+$. Assim, Q_2/\tilde{q}_1 é uma função negativa e como \tilde{q}_1 é positiva, segue que Q_2 é uma função negativa. Da mesma forma, como Q_2 é a derivada da função Q_1/q_2 , temos que Q_1/q_2 é uma função decrescente, cujo limite, para $t \rightarrow 0^+$, é negativo. Desta maneira, segue que Q_1/q_2 é uma função negativa. Uma vez que q_2 é positiva, então Q_1 deve ser uma função negativa. Por fim, como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q(t) = 0$ e a derivada de Q, Q_1 , é negativa, concluímos que Q é uma função decrescente e negativa.

Considerando $\alpha > 1$, temos $Q_3 < 0$ com uma assíntota em $t^*, q_2 > 0, \tilde{q}_1 > 0$ em $(0, t^*)$ e $\tilde{q}_1 < 0$ em (t^*, α) . Temos, também, que os limites de $Q_1, Q_1/q_2$ e Q_2/\tilde{q}_1 , para $t \rightarrow 0^+$, são $-\frac{32}{\alpha}, -\frac{2\pi}{\alpha^3}$ e -2π , respectivamente. Ainda, $\lim_{t \rightarrow \alpha} Q_2(t)/\tilde{q}_1(t) = -L_1(\alpha)/4$. Note que $L_1(\alpha)$ tem um único

zero em α^* , além de ser negativa para $\alpha < \alpha^*$ e positiva para $\alpha > \alpha^*$. De fato, temos que a função $L_1(\alpha)$ é crescente, pois $L_1'(\alpha) = \frac{32\alpha^2}{(-1 + \alpha^2)^2(1 + \alpha^2)} > 0$. Daí, como $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} L_1(\alpha) = -\infty$ e $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} L_1(\alpha) = 4\pi$, temos a existência de um único zero α^* , uma vez que $L_1(\alpha)$ é contínua para $\alpha > 1$. Desta forma, repetindo o argumento do procedimento de divisão e derivação, podemos concluir que Q é uma função decrescente e negativa para $\alpha \leq \alpha^*$. De fato, seja $\alpha \leq \alpha^*$. Vamos dividir o estudo nos intervalos $(0, t^*)$ e (t^*, α) . Primeiramente, vamos considerar o intervalo $(0, t^*)$. Como $Q_3 < 0$, então Q_2/\bar{q}_1 é uma função decrescente. Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_2/\bar{q}_1 < 0$ e $\bar{q}_1 > 0$, então $Q_2 < 0$. Isso implica que Q_1/q_2 é uma função decrescente e como $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$, temos que Q_1/q_2 é uma função negativa em $(0, t^*)$ e, ainda, por $q_2 > 0$, segue que $Q_1 < 0$. Daí, Q é uma função decrescente e por $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q = 0$, temos que $Q < 0$. Portanto, Q é uma função decrescente e negativa. Agora, consideremos o intervalo (t^*, α) . Sendo $Q_3 < 0$, então Q_2/\bar{q}_1 é uma função decrescente. Como $\lim_{t \rightarrow (t^*)^+} Q_2/\bar{q}_1 = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_2/\bar{q}_1 = -L_1(\alpha)/4 > 0$, segue que $Q_2/\bar{q}_1 > 0$. Daí, sendo $\bar{q}_1 < 0$, segue que $Q_2 < 0$. Assim, Q_1/q_2 é uma função decrescente e, por possuir tal propriedade em todo o intervalo $(0, \alpha)$, junto ao fato de que $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$ e $q_2 > 0$, então $Q_1 < 0$. Daqui, podemos concluir como no caso anterior, considerando que Q é decrescente em todo intervalo $(0, \alpha)$, que Q é uma função decrescente e negativa.

Agora, seja $\alpha > \alpha^*$. Vamos provar que a função Q , além de possuir um único zero simples, é unimodal (isto é, há apenas um ponto de máximo/mínimo local) e decrescente próximo à origem. Com efeito, temos que $L_1(\alpha) > 0$ para $\alpha > \alpha^*$. Note, primeiramente, que no intervalo $(0, t^*)$, o processo segue análogo ao já apresentado. Isto é, em $(0, t^*)$ temos que Q_1/q_2 é uma função decrescente e negativa e, como $q_2 > 0$, segue que $Q_1 < 0$ e, portanto, Q é uma função decrescente e negativa. Agora, em (t^*, α) , como $Q_3 < 0$, temos que Q_2/\bar{q}_1 é uma função decrescente. Ainda, como $\alpha^* > 1$, temos que $\lim_{t \rightarrow (t^*)^+} Q_2/\bar{q}_1 = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_2/\bar{q}_1 = -L_1(\alpha)/4 < 0$. Desta forma, como Q_2/\bar{q}_1 é contínua em (t^*, α) , existe um único $z \in (t^*, \alpha)$ tal que $Q_2/\bar{q}_1(z) = 0$ com $Q_2/\bar{q}_1 > 0$ em (t^*, z) e $Q_2/\bar{q}_1 < 0$ em (z, α) . Consequentemente, como $\bar{q}_1 < 0$, temos $Q_2 < 0$ em (t^*, z) e $Q_2 > 0$ em (z, α) . Assim, segue que $Q_2(z) = 0$ e como Q_2 é a derivada de Q_1/q_2 , então z é ponto crítico da função Q_1/q_2 . Logo, em (t^*, z) , a função Q_1/q_2 é decrescente e em (z, α) , crescente. Temos, portanto, que z é ponto de mínimo de Q_1/q_2 . Uma vez que a função Q_1/q_2 é contínua em t^* e, também, decrescente em $(0, t^*)$, podemos concluir que Q_1/q_2 é, na verdade, decrescente no intervalo $(0, z)$. Ainda, Q_1/q_2 é negativa em $(0, z)$, pois $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q_1/q_2 < 0$. Temos, também, que $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} Q_1/q_2$ possui o mesmo sinal que $L_1(\alpha)$, logo o limite é positivo. Desta maneira, existe $w \in (z, \alpha)$ tal que $Q_1/q_2(w) = 0$, com Q_1/q_2 negativa em (z, w) e positiva em (w, α) . Além disso, tal zero é único pelas propriedades de monotonicidade obtidas sobre Q_1/q_2 . Uma vez que $q_2 > 0$ sempre, então $Q_1(w) = 0$. A função Q tem um ponto de mínimo em w , pois $Q_1 < 0$ em $(0, w)$ e $Q_1 > 0$ em (w, α) .

Considerando a expansão de $Q(t)$ numa vizinhança de $t = 0$, dada por (25), podemos ver que Q é negativa, pois o coeficiente que acompanha o termo de ordem 1, o qual domina a expressão para valores pequenos, é negativo. Além disso, pela expressão (26) de Q em uma vizinhança de $t = \alpha$, obtemos que $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} (\alpha - t)Q(t) = \alpha(-1 + \alpha^2)L_1(\alpha)$. Daí, como $L_1(\alpha) > 0$ quando $\alpha > \alpha^*$, segue que $Q(t)$ é positiva para pontos próximos de α . Logo, deve existir $\tau \in (0, \alpha)$ tal que $Q(\tau) = 0$. Ainda, tal zero é único, pelo sinal de Q_1 , e simples por não ser um zero de Q_1 , o qual possui um único zero w , que configura o ponto de mínimo de Q .

Portanto, mostramos que $Q(t)$ é uma função decrescente e negativa para $\alpha < \alpha^*$ e unimodal com um zero simples para $\alpha \geq \alpha^*$. Desta forma, pelo Teorema 7 e Proposição 32, concluímos que $N(\mathcal{F}(\alpha)) = 3$, se $\alpha > \alpha^*$. Ainda, pelos Teoremas 5 e 2, obtemos $N(\mathcal{F}(\alpha)) = 2$, se $0 < \alpha \leq \alpha^*$. \square



5 Bibliografia

- CARVALHO, T. *et al.* Global analysis of the dynamics of a piecewise linear vector field model for prostate cancer treatment. **Journal of Dynamics and Control Systems**, v. 28, n. 2, p. 375–398, 2022.
- DE PILLIS, L. G.; RADUNSKAYA, A. The dynamics of an optimally controlled tumor model: a case study. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 37 n. 11, p. 1221–1244, 2003.
- DI BERNARDO, M. *et al.* **Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications**. Londres: Springer, 2008. (Applied Mathematical Sciences; 163)
- GONÇALVES, L. F. **Campos de vetores suaves por partes: aspectos teóricos e aplicações**. 2020. 195 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2020.
- GUSSON, V. H. L. **Teoria de Chebyshev e aplicações à ciclicidade de campos de vetores lineares por partes**. 2022. 104 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2022.
- GRAU, M.; MAÑOSAS, F.; VILADELPRAT, J. A Chebyshev criterion for abelian integrals. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363 n. 1, p. 109–129, 2011.
- GUARDIA, M.; SEARA, T. M.; TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. **Journal of Differential Equations**, v. 250, n. 4, p. 1967–2023, 2011.
- KARLIN, S.; STUDDEN, W. J. **Tchebycheff systems, with applications in analysis and statistics**. New York: Interscience Publishers, [1966]. (Pure and applied mathematics, v. 15).
- LLIBRE, J.; NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differentiable center with two zones. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 25, n. 11, article 1550144, p. 1-11, 2015.
- LLIBRE, J.; ŚWIRSZCZ, G. On the limit cycles of polynomial vector fields. **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis**, v. 18, n. 2, p. 203–214, 2011.
- NOVAES, D. D.; TORREGROSA, J. On extended Chebyshev systems with positive accuracy. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 448, n. 1, p. 171–186, 2017.
- NÜRNBERGER, G. **Approximation by spline functions**. Berlin: Springer-Verlag, 1989.