Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Romulo Albano de Freitas
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
r.freitas@unesp.br

Hércules de Araújo Feitosa
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
hercules.feitosa@unesp.br

Reticulados distributivos com uma adjunção

Distributive lattices with an adjunction

Resumo

Neste trabalho, propomos a junção de dois tópicos algébricos bastante conhecidos, de modo independentes, e como eles se relacionam com sistemas lógicos subjacentes. Os tópicos algébricos são os reticulados distributivos e os pares de Galois. Como são vários os pares de Galois, optamos por tratar de um destes pares, a adjunção. Como é conhecido na literatura sobre lógicas algébricas, reticulados distributivos são modelos algébricos para a lógica positiva, um sistema lógico proposicional que não conta com o operador de negação. Os operadores de conjunção, disjunção e condicional se comportam de modo muito similar aos correspondentes operadores clássicos. Como em todo reticulado temos a noção de ordem, temos meios iniciais para caracterizarmos os pares de Galois sobre esta estrutura algébrica. Faremos, então, o acréscimo de operadores modais ao sistema positivo para formalizarmos o referido par de Galois, a adjunção, no ambiente lógico, como contraparte da justaposição das duas estruturas algébricas.
Palavras-chave: Modelo algébrico. Par de Galois. Reticulados. Lógica positiva.

Abstract

In this work, we propose the junction of two well-known algebraic topics, independently, and how they relate to underlying logical systems. The algebraic topics are distributive lattices and Galois pairs. As there are several Galois pairs, we chose to deal with one of these pairs, the adjunction. As is known in the literature on algebraic logics, distributive lattices are algebraic models for positive logic, a propositional logic system that does not have the negation operator. Conjunction, disjunction and conditional operators behave very similarly to the corresponding classical operators. As in every lattice we have the notion of order, we have initial tools to characterize the Galois pairs on this algebraic structure. We will then add modal operators to the positive system to formalize the mentioned Galois pair, the adjunction, in the logical environment, as a counterpart of the overlap of the two algebraic structures.
Keywords: Algebraic model. Galois pair. Lattices. Positive logic.

Artigo recebido em out. 2022 e aceito em fev. 2023

1 Introdução

Esta contribuição está numa intersecção entre Álgebra e Lógica, área conhecida como lógica algébrica ou modelos algébricos para lógicas.

Destacamos duas abordagens algébricas relevantes para o artigo, os reticulados distributivos e os pares de Galois.

Para deixarmos o artigo bem auto-contido, fazemos duas seções sobre estes dois temas algébricos, então incluímos uma seção sobre a lógica positiva e o seu modelo algébrico, dado pelos reticulados distributivos, mais especificamente, sobre reticulados relativamente pseudo-complementados. Apresentamos os tópicos de modo breve e remetemos à boa literatura sobre o tema.

Nossa contribuição original, que está nas últimas seções, será a construção de um sistema lógico, com a motivação algébrica dada pelo acréscimo de operadores modais à lógica proposicional positiva, elementos esses motivados pelos pares de Galois, neste caso, uma adjunção.

2 Reticulados distributivos

Apresentamos, nesta seção, algumas noções algébricas iniciais sobre reticulados.

Os resultados essenciais deste tema podem ser encontrados em Birkhoff (1948), Dunn e Hardegree (2001), Miraglia (1987), Rasiowa (1974) e Rasiowa e Sikorski (1963).

Definição 1 *Uma relação binária $\leq$ definida sobre um conjunto A é uma ordem parcial sobre A se para todos os elementos $a, b, c \in A$, a relação satisfaz as seguintes condições:*
(i) $a \leq a$;
(ii) *se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$, *então* $a \leq c$;
(iii) *se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$, *então* $a = b$.

Estas três condições indicam que a ordem $\leq$ é, respectivamente, reflexiva, transitiva e antissimétrica.

Definição 2 *Um conjunto parcialmente ordenado é um par $(A, \leq)$ em que A é um conjunto não-vazio e $\leq$ é uma ordem parcial sobre A.*

Como é usual, por economia, também chamamos um conjunto parcialmente ordenado de poset (partial order set).

Definição 3 *Um elemento a de um poset $(A, \leq)$ é um limitante superior (inferior) de um subconjunto B de A se $b \leq a$ ($a \leq b$), para todo $b \in B$.*

Definição 4 *Se o conjunto de todos os limitantes superiores (inferiores) de B contém o menor elemento (maior), então esse elemento é denominado o supremo de B (ínfimo de B).*

A seguir, denotaremos o supremo de $\{a, b\}$ por $sup\{a, b\}$ e o ínfimo de $\{a, b\}$ por $inf\{a, b\}$.

Seguem outras noções sobre supremo e ínfimo conforme Rasiowa (1974).

Definição 5 *Sejam $(A, \leq)$ um poset e $a, b \in A$. O supremo do par $\{a, b\}$, caso exista, é o elemento $c \in A$ que satisfaz:*
(i) $a \leq c$ *e* $b \leq c$,
(ii) $a \leq d$ *e* $b \leq d \Rightarrow c \leq d$.

As duas condições da definição acima garantem que c é o menor limitante superior do conjunto $\{a, b\}$.

De modo dual temos o seguinte.

Definição 6 *Sejam $(A, \leq)$ um poset e $a, b \in A$. O ínfimo do par $\{a, b\}$, caso exista, é o elemento $e \in A$ que satisfaz:*

(i) $e \leq a$ *e* $e \leq b$,

(ii) $f \leq a$ *e* $f \leq b \Rightarrow f \leq e$.

Definição 7 *Se $(A, \leq)$ é um poset de modo que para todos $a, b \in A$ existem em A o $inf\{a, b\}$ e o $sup\{a, b\}$, então denominamos de reticulado a estrutura algébrica determinada por $(A, \wedge, \vee)$, em que $a \wedge b = inf\{a, b\}$ e $a \vee b = sup\{a, b\}$.*

Deste modo, temos que as operações binárias $\wedge$ e $\vee$ são apenas novas notações para as operações de ínfimo e supremo para conjuntos com dois elementos.

Definição 8 *Se $(A, \wedge, \vee)$ é um reticulado, então, para todos $a, b, c \in A$, as seguintes equações são satisfeitas:*

(i) $a \wedge b = b \wedge a$ *e* $a \vee b = b \vee a$ [comutatividade];

(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ *e* $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ [associatividade];

(iii) $(a \wedge b) \vee b = b$ *e* $a \wedge (a \vee b) = a$ [absorção].

Mais resultados que podem ser encontrados em Birkhoff (1948), Miraglia (1987) ou Rasiowa (1974).

Proposição 9 *Se $(A, \wedge, \vee)$ é um reticulado e $a, b, c \in A$, então:*

(i) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$;

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ [ordem];

(iii) $a \wedge a = a$ *e* $a \vee a = a$ [idempotência];

(iv) $a \leq a \vee b$ *e* $a \wedge b \leq a$;

(v) $b \leq a \vee b$ *e* $a \wedge b \leq b$;

(vi) $a \leq c$ *e* $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$;

(vii) $c \leq a$ *e* $c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$;

(viii) $a \leq c$ *e* $b \leq d \Rightarrow a \vee b \leq c \vee d$;

(ix) $a \leq c$ *e* $b \leq d \Rightarrow a \wedge b \leq c \wedge d$.

Demonstração: *Ver Rasiowa (1974, p. 39).* ■

Definição 10 *Um reticulado $(A, \wedge, \vee)$ é distributivo quando para todos $a, b, c \in A$:*

(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Definição 11 *Se $(A, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado que tem o maior (menor) elemento, então ele é denominado a unidade (o zero) de $(A, \leq)$ e é denotado por 1 (0).*

Como todo reticulado é um conjunto parcialmente ordenado, então apenas dizemos que ele é um reticulado com 0 e 1.

Definição 12 *Em todo reticulado com* 0 *e* 1*, temos que:*
(i) $a \leq 1$ *e* $0 \leq a$
(ii) $a \vee 1 = 1$ *e* $a \wedge 1 = a$
(iii) $a \vee 0 = a$ *e* $a \wedge 0 = 0$.

Definição 13 *Seja* $(A, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ *um reticulado com 0 e 1. Se para cada* $a \in A$ *existe o elemento* $-a = max\{y \in A : a \wedge y = 0\}$ *em A, então dizemos que* $-a$ *é o pseudo-complemento de* a.

O pseudo-complemento tem a intenção de formalizar uma noção de negação no reticulado, a negação intuicionista.

A próxima definição é motivada por uma outra negação, a negação booleana ou clássica.

Definição 14 *Seja* $(A, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ *um reticulado com 0 e 1. Se* $a \in A$*, então um elemento* $a' \in A$ *é um complemento de* a *em* A *se:*
(i) $a \wedge a' = 0$
(ii) $a \vee a' = 1$.

Todo complemento é um pseudo-complemento, mas não vale a recíproca.

Como temos interesse em reticulados distributivos, mas sem alguma negação, então estas notas já são o bastante para os próximos passos.

3 Pares de Galois e a adjunção

Nesta seção apresentamos os pares de Galois. Textos introdutórios sobre os pares de Galois ou conexões de Galois podem ser vistos em Areces, Bernardi e Moortgat (2004), Erné, Koslowski, Melton e Strecker (1993), Oriowska e Rewitzky (2010) e Smith (2010).

Estes pares são definidos entre duas estruturas de ordem, e as combinações possíveis dos pares vão além da conexão de Galois, de maneira que o par da adjunção é uma delas.

Mostraremos algumas propriedades da adjunção que serão usadas, posteriormente, para realçar alguns aspectos de ordenação dados pelo acréscimo de operadores modais à lógica positiva.

Criador da teoria dos grupos, Évariste Galois (1811 - 1832) foi uma figura importante para a Matemática em desenvolvimentos algébricos. Dentre suas contribuições, para este artigo, trataremos das Conexões de Galois.

Numa versão algébrica e generalizada, estas funções realçam alguns aspectos de ordenação e uma certa correspondência entre conjuntos parcialmente ordenados.

O conceito de ordem é bastante usual na Matemática e também na Lógica. Assim, entendemos ser pertinente trazermos algumas caracterizações das conexões de Galois para este trabalho, já que precisaremos mostrar alguma relação de ordem para os novos operadores modais.

Definição 15 *Se* $(A, \leq)$ *e* $(P, \leq)$ *são posets, com* $a \in A$ *e* $p \in P$ *elementos quaisquer, e se* $f : A \longrightarrow P$ *e* $g : P \longrightarrow A$ *são funções, então:*
(i) *o par* (f, g) *é uma conexão de Galois se:* $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$;
(ii) *o par* (f, g) *é uma conexão dual de Galois se:* $g(p) \leq a \Leftrightarrow f(a) \leq p$;
(iii) *o par* $[f, g]$ *é uma adjunção se:* $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$;
(iv) *o par* $[f, g]$ *é uma adjunção dual se:* $g(p) \leq a \Leftrightarrow p \leq f(a)$.

Dunn e Hardegree (2001) denominam o par da adjunção de residuado, mas para este trabalho manteremos o nome adjunção.

Destacamos o item (iii) da definição anterior.

Adjunção: Dados dois posets $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$ e as funções $f : A \longrightarrow P$ e $g : P \longrightarrow A$, o par de Galois $[f, g]$ é uma adjunção quando para todo $a \in A$ e todo $p \in P$ vale $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$.

Proposição 16 *Dados dois posets $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$ e as funções $f : A \longrightarrow P$ e $g : P \longrightarrow A$, para $a, b \in A$ e $p, q \in P$. O par $[f, g]$ é uma adjunção de Galois se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(i) *$a \leq g(f(a))$, ou seja, $g \circ f$ é inflacionária;*

(ii) *$f(g(p)) \leq p$, ou seja, $f \circ g$ é deflacionária;*

(iii) *$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, ou seja, a função f preserva a ordem;*

(iv) *$p \leq q \Rightarrow g(p) \leq g(q)$, ou seja, a função g preserva a ordem.*

Demonstração: *Seja $[f, g]$ uma adjunção. Vamos mostrar que $[f, g]$ satisfaz as quatro condições do enunciado.*

(i) Como $f(a) \leq f(a)$ e $[f, g]$ é adjunção, então $a \leq g(f(a))$.

(ii) Como $g(p) \leq g(p)$ e $[f, g]$ é adjunção, então $f(g(p)) \leq p$.

(iii) Se $a \leq b$, como por (i), $b \leq g(f(b))$, então $a \leq g(f(b))$. Sendo $[f, g]$ uma adjunção, então, $a \leq g(f(b)) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$. Portanto, $f(a) \leq f(b)$.

(iv) Se $p \leq q$, desde que por (ii), $f(g(p)) \leq p$, então $f(g(p)) \leq q$. Sendo $[f, g]$ uma adjunção, temos que $f(g(p)) \leq q \Leftrightarrow g(p) \leq g(q)$. Logo, $g(p) \leq g(q)$.

Agora mostramos que as quatro condições garantem uma adjunção.

Se $a \leq g(p)$, por (iii), $f(a) \leq f(g(p))$ e por (ii) $f(a) \leq p$. Por outro lado, se $f(a) \leq p$, então, por (iv), $g(f(a)) \leq g(p)$ e por (i) $a \leq g(p)$.

Portanto, $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$. ∎

Proposição 17 *Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então valem:*

(i) *$f(a) = f(g(f(a)))$;*

(ii) *$g(b) = g(f(g(b)))$.*

Demonstração: *Pela proposição anterior, item (i), $a \leq g(f(a))$ e, por (iii), $f(a) \leq f(g(f(a)))$. Por outro lado, de (ii), $f(g(f(a))) \leq f(a)$. Logo, $f(a) = f(g(f(a)))$.*

Pela proposição anterior, item (ii), $f(g(b)) \leq b$ e, por (iv), $g(f(g(b))) \leq g(b)$. Por outro lado, em (i), $g(b) \leq g(f(g(b)))$. Logo, $g(b) = g(f(g(b)))$. ∎

Proposição 18 *Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para os reticulados $(A, \vee, \wedge)$ e $(P, \vee, \wedge)$, então valem:*

(i) *$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;*

(ii) *$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$.*

Demonstração: *(i) Como $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$, então $f(x) \leq f(x \vee y)$ e $f(y) \leq f(x \vee y)$. Logo, $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$.*

Do outro lado, $f(x) \leq f(x) \vee f(y)$ e $f(y) \leq f(x) \vee f(y)$. Como $[f, g]$ é uma adjunção, então $x \leq g(f(x)) \leq g(f(x) \vee f(y))$ e $y \leq g(f(y)) \leq g(f(x) \vee f(y))$. Daí $x \vee y \leq g(f(x) \vee f(y))$ e então $f(x \vee y) \leq f(g(f(x) \vee f(y))) \leq f(x) \vee f(y)$.

(ii) Como $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$, então $g(x \wedge y) \leq g(x)$ e $g(x \wedge y) \leq g(y)$ e, portanto, $g(x \wedge y) \leq g(x) \wedge g(y)$.

Do outro lado, de $g(x) \wedge g(y) \leq g(x)$ e $g(x) \wedge g(y) \leq g(y)$, segue que $f(g(x) \wedge g(y)) \leq f(g(x)) \leq x$ e $f(g(x) \wedge g(y)) \leq f(g(y)) \leq y$. Assim, temos $f(g(x) \wedge g(y)) \leq x \wedge y$. Logo $g(f(g(x) \wedge g(y))) \leq g(x \wedge y)$ e, finalmente, $g(x) \wedge g(y) \leq g(x \wedge y)$. ∎

Proposição 19 *Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então:*

(i) $f(a) = min\{p \in P : a \leq g(p)\}$;

(ii) $g(p) = max\{a \in A : f(a) \leq p\}$.

Demonstração: *(i) Se $a \in A$, como pela Proposição 16, $a \leq g(f(a))$, então $f(a) \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$. Agora, se $c \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$, então $a \leq g(c)$ e daí $f(a) \leq f(g(c))$. Como $f(g(c)) \leq c$, pela Proposição 16, $f(a) \leq c$. Logo $f(a) = min\{p \in P : a \leq g(p)\}$.*

(ii) Dado $p \in P$, como pela Proposição 16, $f(g(p)) \leq p$, então $g(p) \in \{a \in A : f(a) \leq p\}$. Agora, se $c \in \{a \in A : f(a) \leq p\}$, então $f(c) \leq p$ e daí $g(f(c)) \leq g(p)$ e, portanto, $c \leq g(p)$, pois pela Proposição 16, $c \leq g(f(c))$. Logo, $g(p) = max\{a \in A : f(a) \leq p\}$. ∎

4 A lógica positiva

Nesta seção apresentamos a lógica positiva, uma lógica implicativa e sem negação (RASIOWA, 1974).

A lógica positiva é determinada sobre a linguagem proposicional:

$$L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}.$$

Apresentamos uma versão axiomática para a lógica positiva, que denotaremos por $\mathcal{L}_+$.

Axiomas esquemas:

(Ax_1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
(Ax_2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
(Ax_3) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
(Ax_4) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
(Ax_5) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$
(Ax_6) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
(Ax_7) $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
(Ax_8) $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$.

Regra de inferência:

(MP) De $\varphi \rightarrow \psi$ e φ, deduz-se ψ.

Escreveremos assim: $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \ / \ \psi$.

Definição 20 *Seja $\Gamma \cup \{\psi\}$ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_+$. A fórmula ψ é deduzida ou derivada em $\mathcal{L}_+$ do conjunto de fórmulas Γ, o que é denotado por $\Gamma \vdash \psi$, se existe uma sequência φ_1, φ_2, ..., φ_n de fórmulas de maneira que para cada $1 \leq i \leq n$, φ_i é um axioma, ou $\varphi_i \in \Gamma$, ou φ_i é obtida de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência, por aplicação da regra de inferência (ou dedução) do sistema $\mathcal{L}_+$, e φ_n é ψ.*

Esta sequência é uma dedução de ψ a partir de Γ. Os membros de Γ são as premissas ou hipóteses e ψ é a conclusão da dedução.

Quando $\Gamma = \emptyset$ dizemos que φ é teorema de $\mathcal{L}_+$.

Teorema 21 *(Teorema da dedução) Seja $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_+$. Se $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*
Demonstração: *Ver Feitosa e Paulovich (2005). A demonstração precisa apenas dos axiomas (Ax_1), (Ax_2) e da regra MP.* ∎

O operador de bicondicional $\leftrightarrow$, como usualmente, é definido por:

$$\varphi \leftrightarrow \psi =_{df} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

Proposição 22 *Em $\mathcal{L}_+$ valem:*
(i) $\varphi \to \psi$ *e* $\psi \to \sigma$ / $\varphi \to \sigma$ *(SH)*
(ii) $\varphi \to (\psi \to \sigma)$ / $\psi \to (\varphi \to \sigma)$ *(Troca de premissas)*
(iii) $\varphi \to \psi, \psi \to \varphi$ / $\varphi \leftrightarrow \psi$ *(BIC).*
Demonstração: *Ver Rasiowa (1974).* ∎

Os teoremas e demais fórmulas válidas de $\mathcal{L}_+$ podem ser encontrados em Rasiowa (1974, p. 216) e (*Ibid*., p. 241).

Dada a versão axiomática de $\mathcal{L}_+$, veremos a seguir as propriedades e definições para seu modelo algébrico, como em Rasiowa (1974) ou Rasiowa e Sikorski (1963).

Definição 23 *Álgebra implicativa positiva é uma estrutura algébrica $(A, 1, \to)$, em que 1 é uma constante, $1 \in A$ e $\to$ é uma operação binária tal que para todos $a, b, c \in A$:*
(i) $a \to (b \to a) = 1$;
(ii) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$;
(iii) *se* $a \to b = 1$ *e* $b \to a = 1$, *então* $a = b$;
(iv) $a \to 1 = 1$.

Definição 24 *Se $(A, 1, \to)$ é uma álgebra implicativa positiva, então definimos uma relação de ordem sobre A por:*

$$a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1.$$

Proposição 25 *Se $(A, 1, \to)$ é uma álgebra implicativa positiva, então para todos $a, b, c \in A$:*
(i) *se* $a \to b = 1$ *e* $a = 1$, *então* $b = 1$;
(ii) $a \to a = 1$;
(iii) *se* $a \to b = 1$ *e* $b \to c = 1$, *então* $a \to c = 1$.
Demonstração: *(i) Se $a \to b = 1$, então $a \leq b$. Sendo $a = 1$, temos que $1 \leq b$. Sendo 1 o maior elemento, então $b = 1$.*
(ii) Como pela reflexividade da ordem temos que $a \leq a$, então pela definição acima $a \to a = 1$.
(iii) Pela transitividade da ordem $\leq$ e Definição 24. ∎

Segundo Rasiowa (1974), uma estrutura algébrica $(A, 1, \to)$ em que valem 25 (ii), (iii), 23 (iii) e (iv) é uma álgebra implicacional. Logo, toda álgebra implicativa positiva é uma álgebra implicacional.

Certamente temos uma ordem bem definida em $(A, \leq)$, pois por 25 (ii), 23 (iii) e 25 (iii) vemos que a relação $\leq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva, respectivamente. Além disto, o item (iv) garante que 1 é um elemento máximo para esta ordem.

O item 25 (i) indica que esta álgebra preserva a regra MP. O item 25 (iii) indica, além da transitividade, que esta álgebra também preserva a regra (SH).

A regra (BIC) também é preservada, pois se $a \to b = 1$ e $b \to a = 1$ e, pela Definição 24, temos que $a \leq b$ e $b \leq a$, respectivamente, e, portanto, $a = b$.

Definição 26 *Uma álgebra $(A, 1, \to, \wedge, \vee)$ é um reticulado relativamente pseudo-complementado se $(A, 1, \to)$ é uma álgebra implicativa positiva e valem as condições:*
(i) $(a \wedge b) \to a = 1$*;*
(ii) $(a \wedge b) \to b = 1$*;*
(iii) $(a \to c) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c))) = 1$*;*
(iv) $a \to (a \vee b) = 1$*;*
(v) $b \to (a \vee b) = 1$*;*
(vi) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c)) = 1$.

Os itens (i) - (vi), da definição acima, garantem que $\wedge$ é um ínfimo e $\vee$ é um supremo. Logo, temos uma ordem com o maior elemento 1 e com supremo e ínfimo para todo par $\{a, b\}$.

Definição 27 *Se $(A, \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $(A, \to, \wedge, \vee)$ é um reticulado relativamente pseudo-complementado se, e somente se, para todos $a, b, x \in A$ vale a seguinte condição:*

$$a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq a \to b.$$

Proposição 28 *Todo reticulado relativamente pseudo-complementado é distributivo.*
Demonstração: *Ver Rasiowa e Sikorski (1963, p. 59).* ∎

Teorema 29 *Todo reticulado distributivo é isomorfo a um reticulado de conjuntos.*
Demonstração: *Pode ser vista em Rasiowa e Sikorski (1963, p. 50-51) e mencionada em Rasiowa (1974, p. 44).* ∎

Este teorema é a versão do isomorfismo de Stone para reticulados distributivos. Na versão original, ele é demonstrado para álgebras de Boole e nos textos mencionados temos a versão para reticulados distributivos.

Proposição 30 *Em todo reticulado relativamente pseudo-complementado valem:*
(i) $a \leq b \to a$*;*
(ii) $a \wedge (a \to b) \leq b$*;*
(iii) $a \to (b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c)$*;*
(iv) $(a \to c) \wedge (b \to c) \leq (a \vee b) \to c$*;*
(v) $(a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to (b \wedge c)$.
Demonstração: *Ver Rasiowa e Sikorski (1963, p. 59-60).* ∎

Um reticulado relativamente pseudo-complementado não precisa ter o menor elemento 0. Certamente tem o 1, mas como não temos uma negação, o elemento mínimo não é essencial.

Os modelos algébricos da lógica positiva $\mathcal{L}_+$ são exatamente os reticulados relativamente pseudo-complementados $\mathcal{P} = (P, 1, \to, \wedge, \vee)$.

Definição 31 *Uma valoração* $v : For(\mathcal{L}_+) \to \mathcal{P}$ *é um modelo para um conjunto* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L}_+)$ *se* $v(\varphi) = 1$*, para toda* $\varphi \in \Gamma$*.*

Definição 32 *Uma fórmula* $\varphi \in For(\mathcal{L}_+)$ *é válida em* $\mathcal{P}$ *se toda valoração* $v : For(\mathcal{L}_+) \to \mathcal{P}$ *é modelo para* φ*.*

Definição 33 *Uma fórmula* φ *é* $\mathcal{L}_+$*-válida se ela é válida em todo reticulado pseudo-complementado* $\mathcal{P}$*.*

Como usualmente, denotamos que φ é válida por $\vDash \varphi$.

Teorema 34 (Correção) *Os reticulados relativamente pseudo-complementados* $\mathcal{P} = (P, 1, \to, \wedge, \vee)$ *são modelos corretos para a lógica* $\mathcal{L}_+$*.*
Demonstração: *Em Rasiowa (1974).* ∎

Teorema 35 (Completude) *Se* $\varphi \in For(\mathcal{L}_+)$ *e* φ *é válida, então* φ *é demonstrável em* $\mathcal{L}_+$*.*
Demonstração: *Em Rasiowa (1974).* ∎

Corolário 36 *A lógica* $\mathcal{L}_+$ *é consistente.*
Demonstração: *Em Rasiowa (1974).* ∎

5 A lógica positiva acrescida de uma adjunção

Nesta seção buscamos um sistema lógico modal que sintetize a justaposição dos reticulados pseudo-complementados com uma adjunção.

A lógica positiva $\mathcal{L}_+$ servirá de sistema de base, com uma relação de ordem, para acréscimo de operadores modais, como o $\Box$, mais conhecido na literatura por representar o conceito de necessidade, e o $\Diamond$, representando o conceito de possibilidade. Como a nossa construção tem motivação algébrica, num primeiro momento, os operadores $\Box$ e $\Diamond$ não devem ser pensados como usualmente, como operadores aléticos.

Estes operadores modais, com frequência, são interdefiníveis, isto é, podemos definir um a partir do outro:

$$\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi \text{ e } \Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi.$$

Todavia, neste caso, os operadores modais serão inseridos à lógica positiva sem esta característica de interdefinição, já que não temos em $\mathcal{L}_+$ o operador para a negação.

O que temos em mente é que com estes operadores modais sobre a lógica positiva tenhamos um par de Galois, uma adjunção.

5.1 Sistema axiomático

A lógica positiva acrescida de uma adjunção será denotada por $\mathcal{L}_{+\!\!\dashv\vdash}$.

Ela será construída sobre a linguagem proposicional de $\mathcal{L}_+$ acrescida dos operadores modais $\{\Box, \Diamond\}$, de modo que:

$$L = \{\wedge, \vee, \to, \Box, \Diamond, p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}.$$

O sistema formal de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ consiste nos seguintes itens:

(i) o conjunto das variáveis proposicionais de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$: $Var(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$;

(ii) o conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$, definido indutivamente:
- se $i \in \mathbb{N}$ e $p_i \in Var(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então $p_i \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$;
- se φ e $\psi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$;
- se $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então $\Box\varphi$ e $\Diamond\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.

Além desses itens, temos o conjunto de axiomas e regras de inferência, dados abaixo.

Axiomas:

(Ax_1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(Ax_2) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$
(Ax_3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
(Ax_4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
(Ax_5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \wedge \sigma)))$
(Ax_6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
(Ax_7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
(Ax_8) $(\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma))$
(Ax_9) $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$
(Ax_{10}) $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$.

Regras de inferência:

(MP) $\varphi \to \psi, \varphi \,/\, \psi$
(RM$\Diamond$) $\vdash \varphi \to \psi \,/\, \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$
(RM$\Box$) $\vdash \varphi \to \psi \,/\, \vdash \Box\varphi \to \Box\psi$.

Agora podemos mostrar alguns dos teoremas e fórmulas deriváveis da lógica $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$.

Proposição 37 $\varphi \to \Diamond\psi \,/\, \Box\varphi \to \psi$
Demonstração:

1.	$\varphi \to \Diamond\psi$	*p.*
2.	$\Box\varphi \to \Box\Diamond\psi$	*RM$\Box$ em (1)*
3.	$\Box\Diamond\psi \to \psi$	Ax_9
4.	$\Box\varphi \to \psi$	*SH em (2) e (3).*

■

Proposição 38 $\Box\varphi \to \psi \,/\, \varphi \to \Diamond\psi$
Demonstração:

1.	$\Box\varphi \to \psi$	*p.*
2.	$\Diamond\Box\varphi \to \Diamond\psi$	*RM$\Diamond$ em (1)*
3.	$\varphi \to \Diamond\Box\varphi$	Ax_{10}
4.	$\varphi \to \Diamond\psi$	*SH em (2) e (3).*

■

Proposição 39 *O par* $[\Box, \Diamond]$ *é uma adjunção.*
Demonstração: *Segue de 37 e 38.* ■

Proposição 40 $\vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$
Demonstração:

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	*Ax_6*
2. $\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$	*RM$\Diamond$ em (1)*
3. $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	*Ax_7*
4. $\Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$	*RM$\Diamond$ em (3)*
5. $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$	*Ax_8*
6. $(\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)))$	*Substituição em (5)*
7. $(\Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi))$	*MP em (2) e (6)*
8. $\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \rightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)$	*MP em (4) e (7).*

■

Proposição 41 $\vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$
Demonstração:

1. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	*Ax_3*
2. $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi$	*RM$\Box$ em (1)*
3. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	*Ax_4*
4. $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi$	*RM$\Box$ em (3)*
5. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$	*Ax_5*
6. $(\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow ((\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi) \rightarrow (\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)))$	*Substituição em (5)*
7. $(\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi) \rightarrow (\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi))$	*MP em (2) e (6)*
8. $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$	*MP em (4) e (7).*

■

Os resultados das Proposições 42 à 49 surgem naturalmente desde que o par $[\Box, \Diamond]$ é uma adjunção. Porém, a demonstração de cada proposição é dada logo abaixo.

Proposição 42 $\vdash \Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$
Demonstração:

1. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	*Ax_3*
2. $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\varphi$	*RM$\Diamond$ em (1)*
3. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	*Ax_4*
4. $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\psi$	*RM$\Diamond$ em (3)*
5. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)))$	*Ax_5*
6. $(\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\varphi) \rightarrow ((\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\psi) \rightarrow (\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)))$	*Substituição em (5)*
7. $(\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\psi) \rightarrow (\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi))$	*MP em (2) e (6)*
8. $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$	*MP em (4) e (7).*

■

Proposição 43 $\vdash \Box\varphi \vee \Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$
Demonstração:

1. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ — Ax_6
2. $\Box\varphi \to \Box(\varphi \vee \psi)$ — *RM$\Box$ em (1)*
3. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$ — Ax_7
4. $\Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$ — *RM$\Box$ em (3)*
5. $(\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma))$ — Ax_8
6. $(\Box\varphi \to \Box(\varphi \vee \psi)) \to ((\Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)) \to ((\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi)))$ — *Substituição em (5)*
7. $(\Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)) \to ((\Box\varphi \vee \Box\psi) \to \Box(\varphi \vee \psi))$ — *MP em (2) e (6)*
8. $\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$ — *MP em (4) e (7).*

■

Proposição 44 $\vdash \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$

Demonstração:

1. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ — Ax_3
2. $(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond\varphi$ — *Substituição em (1)*
3. $\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Box\Diamond\varphi$ — *RM$\Box$ em (2)*
4. $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$ — Ax_9
5. $\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \varphi$ — *SH em (3) e (4)*
6. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ — Ax_4
7. $(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond\psi$ — *Substituição em (6)*
8. $\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Box\Diamond\psi$ — *RM$\Box$ em (7)*
9. $\Box\Diamond\psi \to \psi$ — *Substituição em (4)*
10. $\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \psi$ — *SH em (8) e (9)*
11. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \sigma) \to (\varphi \to (\psi \wedge \sigma)))$ — Ax_5
12. $(\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \varphi) \to ((\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \psi) \to (\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to (\varphi \wedge \psi)))$ — *Substituição em (11)*
13. $(\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \psi) \to (\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to (\varphi \wedge \psi))$ — *MP em (5) e (12)*
14. $\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to (\varphi \wedge \psi)$ — *MP em (10) e (13)*
15. $\Diamond\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi) \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ — *RM$\Diamond$ em (14)*
16. $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ — Ax_{10}
17. $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond\Box(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$ — *Substituição em (16)*
18. $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ — *SH em (15) e (17).*

■

Proposição 45 $\vdash \Box(\varphi \vee \psi) \to \Box\varphi \vee \Box\psi$

Demonstração:

1. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ — Ax_6
2. $\Box\varphi \to (\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *Substituição em (1)*
3. $\Diamond\Box\varphi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *RM$\Diamond$ em (2)*
4. $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ — Ax_{10}
5. $\varphi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *SH em (3) e (4)*
6. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$ — Ax_7
7. $\Box\psi \to (\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *Substituição em (6)*
8. $\Diamond\Box\psi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *RM$\Diamond$ em (7)*
9. $\psi \to \Diamond\Box\psi$ — *Substituição em (4)*
10. $\psi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *SH em (8) e (9)*
11. $(\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma))$ — Ax_8
12. $(\varphi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)) \to ((\psi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)))$ — *Substituição em (11)*
13. $(\psi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi))$ — *MP em (5) e (12)*
14. $\varphi \vee \psi \to \Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *MP em (10) e (13)*
15. $\Box(\varphi \vee \psi) \to \Box\Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *RM$\Box$ em (14)*
16. $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$ — Ax_9
17. $\Box\Diamond(\Box\varphi \vee \Box\psi) \to (\Box\varphi \vee \Box\psi)$ — *Substituição em (16)*
18. $\Box(\varphi \vee \psi) \to \Box\varphi \vee \Box\psi$ — *SH em (15) e (17).*

■

Proposição 46 $\vdash \Diamond(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$
Demonstração:
1. $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$ — *Prop. 42*
2. $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \to \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ — *Prop. 44*
3. $\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi \leftrightarrow \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ — *BIC em (1) e (2).*

■

Proposição 47 $\vdash \Box(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \vee \Box\psi$
Demonstração:
1. $\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$ — *Prop. 43*
2. $\Box(\varphi \vee \psi) \to \Box\varphi \vee \Box\psi$ — *Prop. 45*
3. $\Box(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \vee \Box\psi$ — *BIC em (1) e (2).*

■

Proposição 48 $\vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$
Demonstração:
1. $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ — Ax_{10}
2. $\Box\varphi \to \Box\Diamond\Box\varphi$ — *RM$\Box$ em (1)*
3. $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$ — Ax_9
4. $\Box\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$ — *Substituição em (3)*
5. $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$ — *BIC em (2) e (4)*

■

Proposição 49 $\vdash \Diamond\Box\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\varphi$
Demonstração:

1. $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ — Ax_{10}
2. $\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\Diamond\varphi$ — *Substituição em (1)*
3. $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$ — Ax_9
4. $\Diamond\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$ — *RM$\Diamond$ em (3)*
5. $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$ — *BIC em (2) e (4)*

■

5.2 Reticulado relativamente pseudo-complementado com adjunção

Como fizemos uma justaposição no sistema lógico dedutivo, também fazemos agora uma justaposição das estruturas algébricas investigadas.

Por simplicidade, vamos chamar esta nova estrutura algébrica de reticulado adjunto.

Definição 50 *Um reticulado adjunto é álgebra $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ tal que $(A, 1, \to, \wedge, \vee)$ é um reticulado relativamente pseudo-complementado e $[f, g]$ é uma adjunção sobre A.*

Em $\mathcal{A}_r$ temos a ordem natural $a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1$ e com a adjunção $[f, g]$, se $a, p \in A$ então $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$.

Assim todas as propriedades algébricas válidas para os reticulados relativamente pseudo-complementados e para as adjunções valem para os reticulados adjuntos.

Teorema 51 *Todo reticulado adjunto é isomorfo a um reticulado adjunto de conjuntos.*

Demonstração: *Se $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ é um reticulado adjunto, então $(A, 1, \to, \wedge, \vee)$ é um reticulado distributivo e pelo Teorema 29, ele é isomorfo a um reticulado de conjuntos $\mathcal{P}(A)$. Se $h : \mathcal{A}_r \to \mathcal{P}(A)$ é tal isomorfismo, então para $B, P \in \mathcal{P}(A)$, o par de funções $[f, g]$ definidas por $f(B) = h(f(b))$, tal que $h(b) = B$ e $g(P) = h(g(p))$, tal que $h(p) = P$ determina uma adjunção sobre $\mathcal{P}(A)$.* ■

Vejamos alguns conceitos de lógicas algébricas que nos ajudarão a alcançar a completude forte para o nosso sistema.

Usualmente, encontramos na literatura a seguinte definição de lógica.

Definição 52 *Uma lógica abstrata é um par (E, C) em que E é um conjunto não-vazio e C é um operador de consequência sobre E.*

Ao adentrarmos em um ambiente algébrico o par (E, C) passa a ser $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, tal que $\mathcal{A}$ define um modelo algébrico para uma certa lógica $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre $\mathcal{A}$.

Definição 53 *Uma lógica algébrica é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, em que $\mathcal{A}$ é um modelo algébrico para $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$ é um filtro sobre $\mathcal{A}$.*

Para a nossa lógica, denotaremos o par como $(\mathcal{A}_r, \mathcal{F})$, em que $\mathcal{A}_r$ é um reticulado adjunto, modelo algébrico de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$, e $\mathcal{F}$ é um filtro sobre $\mathcal{A}_r$.

Definição 54 *Um conjunto $A \subseteq E$ é trivial em (E, C) se $C(A) = E$.*

Sendo assim, um conjunto $A \subseteq E$ é não trivial no caso em que $C(A) \neq E$.

Veremos, a seguir, que no ambiente algébrico, esta definição de não trivial coincide com a definição de filtro próprio. Segundo Feitosa e Soares (2017), em muitos dos textos sobre lógica universal encontramos os conjuntos não triviais denominados de consistentes, exceto na tradição das lógicas paraconsistentes. Logo, se conseguirmos mostrar que nosso filtro $\mathcal{F}$ é próprio, então mostraremos que a teoria correspondente é consistente. Ademais, se mostrarmos que $\mathcal{F}$ é maximal, então a teoria é completa.

Definição 55 *Seja $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto. Um filtro em $\mathcal{A}_r$ é um subconjunto $\mathcal{F}$ de A tal que, para todos $p, q \in A$:*

(i) $1 \in \mathcal{F}$;

(ii) *se $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathcal{F}$, então $p \wedge q \in \mathcal{F}$;*

(iii) *se $p \in \mathcal{F}$ e $p \leq q$, então $q \in \mathcal{F}$.*

Definição 56 *Sejam $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto e $\mathcal{F} \subseteq A$ um filtro de $\mathcal{A}_r$. O filtro $\mathcal{F}$ é próprio se $\mathcal{F} \neq A$.*

Definição 57 *Sejam $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto e $\mathcal{F} \subseteq A$ um filtro. O filtro $\mathcal{F}$ é maximal se ele é próprio e:*

(i) *para todo filtro $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{A}_r$, se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$, então $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}^* = A$.*

Definição 58 *Sejam $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto e $\mathcal{F} \subseteq A$ um filtro. O filtro $\mathcal{F}$ é irredutível se ele é próprio e para dois filtros quaisquer $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$:*

(i) *se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, então $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$.*

Proposição 59 *Se $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ é um reticulado adjunto, então as seguintes condições são equivalentes para todo filtro $\mathcal{F} \subseteq A$:*

(i) *$\mathcal{F}$ é filtro maximal;*

(ii) *$\mathcal{F}$ é filtro irredutível.*

Demonstração: *$(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $\mathcal{F}$ um filtro maximal. Da definição de filtro maximal segue que $\mathcal{F}$ é ainda um filtro próprio. Se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, com $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ dois filtros, então $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ e, portanto, $\mathcal{F}$ é irredutível.*

$(i) \Leftarrow (ii)$: Seja $\mathcal{F}$ um filtro irredutível. Da definição de filtro irredutível, temos que $\mathcal{F}$ é também um filtro próprio. Se $\mathcal{F}$ é irredutível, então $\mathcal{F}$ só pode ser subfiltro dele mesmo e de A. Logo, $\mathcal{F}$ é maximal. ■

Lema 60 *Sejam $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto e Π uma cadeia de filtros em $\mathcal{A}_r$. Então:*

(i) *$\cup\Pi$ é filtro de $\mathcal{A}_r$;*

(ii) *se $x \notin \mathcal{F}$, para todo elemento $\mathcal{F}$ de Π, então $x \notin \cup\Pi$.*

Proposição 61 *(Lema de Zorn) Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado. Se toda cadeia em $(A, \leq)$ tem um limitante superior, então $(A, \leq)$ tem um elemento maximal.*

Demonstração: *Ver Dunn e Hardegree (2001, p. 30).* ■

Proposição 62 *Sejam $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto e $\mathcal{F}$ um filtro de $\mathcal{A}_r$. Se $x \notin \mathcal{F}$, então existe um filtro irredutível $\mathcal{F}^*$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ e $x \notin \mathcal{F}^*$.*

Demonstração: *Seja Π o conjunto ordenado pela inclusão de conjuntos $\subseteq$ de todos os filtros sobre $\mathcal{A}_r$, que contém $\mathcal{F}$ e $x \notin \mathcal{F}$.*

Como Π é ordenado pela inclusão, então Π possui um limitante superior $\cup\Pi$ e como $x \notin \mathcal{F}$, para todo elemento $\mathcal{F}$ de Π, então $x \notin \cup\Pi$.

Daí, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $\mathcal{F}^*$ em Π.

Pela Proposição 59, se $\mathcal{F}^*$ é maximal, então é irredutível.

Logo, há um filtro irredutível $\mathcal{F}^*$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ e $x \notin \mathcal{F}^*$. ■

6 Adequação entre o sistema lógico e o modelo algébrico

Nesta seção, mostramos o resultado principal do trabalho, que identifica os reticulados relativamente pseudo-complementados com adjunção, isto é, reticulados adjuntos $\mathcal{A}_r$, como modelos algébricos da lógica $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$.

A seguir, $\mathcal{A}_r$ denota um reticulado adjunto.

Definição 63 *Uma valoração restrita é uma função $\tilde{v} : Var(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \to \mathcal{A}_r$, que interpreta cada variável de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ em um elemento de $\mathcal{A}_r$.*

Definição 64 *Uma valoração é uma função $v : For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \to \mathcal{A}_r$ que estende $\tilde{v}$, natural e unicamente, por:*

$v(p) = \tilde{v}(p)$;
$v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \wedge v(\psi)$;
$v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \vee v(\psi)$;
$v(\varphi \to \psi) = v(\varphi) \to v(\psi)$;
$v(\Box\varphi) = f(v(\varphi))$;
$v(\Diamond\varphi) = g(v(\varphi))$.

Definição 65 *Uma valoração $v : For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \to \mathcal{A}_r$ é um modelo para um conjunto $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ se $v(\varphi) = 1$, para cada $\varphi \in \Gamma$.*

Definição 66 *Uma fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ é válida em um reticulado adjunto $\mathcal{A}_r$ se toda valoração $v : For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \to \mathcal{A}_r$ é modelo para φ.*

Teorema 67 (Correção) *Reticulados adjuntos são modelos fortemente corretos para a lógica $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$, ou seja, se $\Gamma \cup \{\sigma\} \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então $\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma \models \sigma$.*

Demonstração: *Seja $\mathcal{A}_r = (A, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ um reticulado adjunto. De acordo com o Teorema da Correção de $\mathcal{L}_{+}$, basta mostrarmos que os axiomas Ax_9 e Ax_{10} são válidos em $\mathcal{A}_r$ e que as regras RM$\Diamond$ e RM$\Box$ preservam validade em $\mathcal{A}_r$:*

(i) Ax_9 : Certamente, $g(v(\varphi)) \leq g(v(\varphi))$ e como o par $[f, g]$ é uma adjunção, então $g(v(\varphi)) \leq g(v(\varphi)) \Leftrightarrow f(g(v(\varphi))) \leq v(\varphi)$. Daí $f(g(v(\varphi))) \leq v(\varphi)$ e, portanto, o esquema $\Box\Diamond\varphi \to \varphi$ é válido na $\mathcal{A}_r$.

(ii) Ax_{10} : Como $f(v(\varphi)) \leq f(v(\varphi))$ e $[f, g]$ é uma adjunção, então$f(v(\varphi)) \leq f(v(\varphi)) \Leftrightarrow v(\varphi) \leq g(f(v(\varphi)))$. Daí $v(\varphi) \leq g(f(v(\varphi)))$ e, então, o esquema $\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ é válido em $\mathcal{A}_r$.

(iii) RM$\Diamond$: Se $\vdash \varphi \to \psi$, então $v(\varphi) \leq v(\psi)$. Mas $v(\varphi) \leq v(\psi) \Leftrightarrow v(\varphi) \wedge v(\psi) = v(\varphi) \Rightarrow g(v(\varphi) \wedge v(\psi)) = g(v(\varphi))$. Da Proposição 18, item (ii), $g(v(\varphi) \wedge v(\psi)) = g(v(\varphi)) \wedge g(v(\psi))$.

Logo, $g(v(\varphi) \wedge v(\psi)) = g(v(\varphi)) \Leftrightarrow g(v(\varphi)) \wedge g(v(\psi)) = g(v(\varphi)) \Leftrightarrow g(v(\varphi)) \leq g(v(\psi)) \Leftrightarrow \vdash \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi$.

(iv) $RM\Box$ *: Se* $\vdash \varphi \rightarrow \psi$*, então* $v(\varphi) \leq v(\psi)$*. Porém,* $v(\varphi) \leq v(\psi) \Leftrightarrow v(\varphi) \vee v(\psi) = v(\psi) \Rightarrow f(v(\varphi) \vee v(\psi)) = f(v(\psi))$*. Da Proposição 18, item (i),* $f(v(\varphi) \vee v(\psi)) = f(v(\varphi)) \vee f(v(\psi))$*. Logo,* $f(v(\varphi) \vee v(\psi)) = f(v(\psi)) \Leftrightarrow f(v(\varphi)) \vee f(v(\psi)) = f(v(\psi)) \Leftrightarrow f(v(\varphi)) \leq f(v(\psi)) \Leftrightarrow \vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$. ■

A meta seguinte é a obtenção do teorema da completude, que é a recíproca do teorema da correção.

Para tanto, definiremos a álgebra de Lindenbaum para $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$.

Definição 68 *Para* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$*, relação binária* $\equiv$ *é definida sobre* $For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \times For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ *por:*

$$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

A relação $\equiv$ é de equivalência e se $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, denotamos por $[\psi]_\Gamma = \{\gamma \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) : \gamma \equiv \psi\}$ a classe de equivalência de ψ módulo $\equiv$ e Γ.

Definição 69 *A álgebra de Lindenbaum para* $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$*, denotada por* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$*, é a álgebra quociente definida por* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) = (For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})|_\equiv, 1_\equiv, \rightarrow_\equiv, \wedge_\equiv, \vee_\equiv, f_\equiv, g_\equiv)$*, de modo que:*

$1_\equiv[\varphi] = [\varphi \rightarrow \varphi]$
$[\varphi] \wedge_\equiv [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$
$[\varphi] \vee_\equiv [\psi] = [\varphi \vee \psi]$
$[\varphi] \rightarrow_\equiv [\psi] = [\varphi \rightarrow \psi]$
$f_\equiv[\varphi] = [\Box\varphi]$
$g_\equiv[\varphi] = [\Diamond\varphi]$.

Em geral, por simplicidade, omitiremos o símbolo de equivalência $\equiv$.

Quando $\Gamma = \emptyset$ denotaremos a álgebra de Lindenbaum para $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ apenas por $\mathcal{A}(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.

Proposição 70 *Em* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ *asseguramos que* $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Demonstração: *De fato, pelo Teorema 9 itens (i) e (ii) temos que* $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \vee [\psi] = [\psi]$*. Da Definição 69,* $[\varphi] \vee [\psi] = [\psi] \Leftrightarrow [\varphi \vee \psi] = [\psi]$*. Por fim,* $[\varphi \vee \psi] = [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. ■

Proposição 71 *A álgebra* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ *é um reticulado adjunto.*
Demonstração: $(Ax_9) : [\Box\Diamond\varphi] \leq [\varphi] \Rightarrow f([\Diamond\varphi]) \leq [\varphi] \Rightarrow f(g([\varphi])) \leq [\varphi]$;
$(Ax_{10}) : [\varphi] \leq [\Diamond\Box\varphi] \Rightarrow [\varphi] \leq g([\Box\varphi]) \Rightarrow [\varphi] \leq g(f([\varphi]))$;
$(RM\Diamond) : [\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi \Leftrightarrow [\Diamond\varphi] \leq [\Diamond\psi] \Leftrightarrow g([\varphi]) \leq g([\psi])$;
$(RM\Box) : [\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\psi \Leftrightarrow [\Box\varphi] \leq [\Box\psi] \Leftrightarrow f([\varphi]) \leq f([\psi])$. ■

Definição 72 *A álgebra* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ *é o modelo canônico de* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.

Denotamos uma valoração no modelo canônico por $v_0 : For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \rightarrow \mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.

Quando $\Gamma = \emptyset$, temos $v_0 : For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.

Proposição 73 *Sejam $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ e $\mathcal{A}(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ o modelo canônico para $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$. Então φ é um teorema de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ se, e somente se, $[\varphi] = 1$.*
Demonstração: *Consideremos que $\vdash \varphi$:*

1. $\vdash \varphi$	*Hipótese*
2. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$	Ax_1
3. $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	*Substituição em (2)*
4. $\vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$	*MP em (1) e (3)*

Segue que $1 = [\varphi \to \varphi] \leq [\varphi]$. Logo, $[\varphi] = 1$.

Agora, se $[\varphi] = 1$, como $[\varphi \to \varphi] \leq [\varphi]$, então $\vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$. Desde que $\vdash \varphi \to \varphi$, por Modus Ponens temos que $\vdash \varphi$.

Assim, para cada fórmula φ temos que:

$[\varphi] = 1$ *se, e somente se,* $\vdash \varphi$. ■

Teorema 74 *Se $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então os seguintes itens são equivalentes:*

(i) $\vdash \varphi$;

(ii) $\vDash \varphi$;

(iii) a fórmula φ é válida em todo reticulado adjunto de conjuntos $\mathcal{B}_r = (\mathcal{P}(B), B, \to, \cap, \cup, f, g)$;

(iv) $v_0(\varphi) = 1$, para a valoração canônica de $\mathcal{A}_\Gamma$.

Demonstração: *$(i) \Rightarrow (ii)$: segue do teorema da correção.*

$(ii) \Rightarrow (iii)$: se φ é válida, então vale em todo reticulado adjunto e, em particular, no reticulado adjunto de conjuntos $\mathcal{B}_r$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: A álgebra de Lindembaum $\mathcal{A}_\Gamma$ é um reticulado adjunto. Pelo teorema do isomorfismo, ela é isomorfa a um reticulado adjunto $\boldsymbol{B}_r$. Como do item (iii) φ é válida em qualquer reticulado adjunto de conjuntos, então ela é válida em $\boldsymbol{B}_r$ e, pelo isomorfismo h, ela é válida em $\mathcal{A}_\Gamma$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: se $v_0(\varphi) = 1$, então $[\varphi] = 1$ e o resultado segue da proposição anterior. ■

Corolário 75 (Completude) *Se $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, então $\vdash \varphi$ se, e somente se, $\vDash \varphi$.*

A correção do Teorema 67 é forte, no sentido de que $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$. Esta versão da completude é fraca, pois equivale teoremas e fórmulas válidas. A seguir, buscamos a completude forte.

Definição 76 *A estrutura $\mathcal{A}_r$ é um modelo fortemente adequado para Γ quando: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$.*

Usualmente, para a correção forte, usamos a definição de conjunto consistente que deve estar incluso em um conjunto consistente maximal.

Um conjunto $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$ é consistente se não há alguma fórmula σ, tal que $\Gamma \vdash \sigma$ e $\Gamma \vdash \neg\sigma$. Mas em $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ não temos uma negação $\neg$. Então precisamos de outro caminho para a completude forte.

Definição 77 *Seja $(E, \vdash)$ um sistema dedutivo. Dado $A \subseteq E$, o fecho dedutivo de A é o conjunto $\overline{A} = \{x \in E : A \vdash x\}$.*

Definição 78 *Uma teoria Δ é um conjunto não vazio de fórmulas que é fechado para a dedução, isto é, $\varphi \in \Delta$ se, e somente se, $\Delta \vdash \varphi$.*

Definição 79 *Uma teoria Δ de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ é maximal se para qualquer teoria Σ de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$, se $\Delta \subseteq \Sigma$, então $\Sigma = \Delta$ ou $\Sigma = For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$.*

Seja **T** o conjunto de todas as teorias maximais da lógica $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$.

Definição 80 *Para $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, seja $||\varphi|| = \{\Delta \in \boldsymbol{T} : \varphi \in \Delta\}$.*

Proposição 81 *Para $\varphi, \psi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, $||\varphi|| \subseteq ||\psi||$ se, e somente se, $\vdash \varphi \to \psi$.*
Demonstração: *($\Rightarrow$) Se $\nvdash \varphi \to \psi$, então existe $\Delta \in \boldsymbol{T}$ tal que $\varphi \to \psi \notin \Delta$. Uma tal teoria deve ser tal que $\Delta \vdash \varphi$ e $\Delta \nvdash \psi$, isto é, $||\varphi|| \nsubseteq ||\psi||$.*

($\Leftarrow$) Se $\Delta \in ||\varphi||$, então $\Delta \vdash \varphi$. Como $\vdash \varphi \to \psi$, então $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ e, por MP, $\Delta \vdash \psi$. Logo $\Delta \in ||\psi||$. ■

Definição 82 *Seja $\mathcal{A}_{||} = (\{||\varphi|| : \varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})\}, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$, definida por:*

(i) $1 = ||\varphi \to \varphi|| = \boldsymbol{T}$
(ii) $||\varphi|| \to ||\psi|| = ||\varphi \to \psi||$
(iii) $||\varphi|| \wedge ||\psi|| = ||\varphi \wedge \psi||$
(iv) $||\varphi|| \vee ||\psi|| = ||\varphi \vee \psi||$
(v) $f||\varphi|| = ||\Box\varphi||$
(vi) $g||\varphi|| = ||\Diamond\varphi||$.

Proposição 83 *Para $\varphi, \psi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, $\vdash \varphi \to \psi$ se, e somente se, $||\varphi \to \psi|| = 1$.*
Demonstração: *Segue imediato a partir da definição acima.* ■

Proposição 84 *Para $\varphi, \psi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$, $||\varphi|| \to ||\psi|| = 1$ se, e somente se, $||\varphi|| \subseteq ||\psi||$.*
Demonstração: $||\varphi|| \to ||\psi|| = 1 \Leftrightarrow ||\varphi \to \psi|| = 1 \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow ||\varphi|| \subseteq ||\psi||$. ■

Teorema 85 *A álgebra $\mathcal{A}_{||} = (\{||\varphi|| : \varphi \in For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})\}, 1, \to, \wedge, \vee, f, g)$ é reticulado adjunto.*
Demonstração: *(i) Como $\vdash \Box\Diamond\varphi \to \varphi$, então $||\Box\Diamond\varphi|| \subseteq ||\varphi|| \Leftrightarrow f(||\Diamond\varphi||) \subseteq ||\varphi|| \Leftrightarrow f(g(||\varphi||)) \subseteq ||\varphi||$.*

(ii) Como $\vdash \varphi \to \Diamond\Box\varphi$, então $||\varphi|| \subseteq ||\Diamond\Box\varphi|| \Leftrightarrow ||\varphi|| \subseteq g(||\Box\varphi||) \Leftrightarrow ||\varphi|| \subseteq g(f(||\varphi||))$.

(iii) $||\varphi|| \subseteq ||\psi|| \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi \Leftrightarrow ||\Diamond\varphi|| \subseteq ||\Diamond\psi|| \Leftrightarrow g(||\varphi||) \subseteq g(||\psi||)$.

(iv) $||\varphi|| \subseteq ||\psi|| \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow \vdash \Box\varphi \to \Box\psi \Leftrightarrow ||\Box\varphi|| \subseteq ||\Box\psi|| \Leftrightarrow f(||\varphi||) \subseteq f(||\psi||)$. ■

Proposição 86 *Cada teoria Δ de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ é um filtro para $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$.*
Demonstração: *Certamente, $\varphi \to \varphi$ pertence a toda teoria Δ de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$, e se $\varphi \in \Delta$ e $\varphi \leq \psi$, então $\varphi \to \psi \in \Delta$ e, por MP, $\psi \in \Delta$.* ■

Teorema 87 *(Completude Forte) Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For(\mathcal{L}_{\dashv\vdash})$. Se $\Gamma \vDash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.*
Demonstração: *Pela contraposição, consideremos que $\Gamma \nvdash \varphi$.*

Se Δ é o fecho dedutivo de Γ, então Δ é uma teoria tal que $\varphi \notin \Delta$. Pela proposição anterior, Δ é um filtro de $\mathcal{L}_{\dashv\vdash}$ e das Proposições 59 e 62, existe um filtro maximal Σ tal que $\Delta \subseteq \Sigma$ e $\varphi \notin \Sigma$. Logo, $\Sigma \in \boldsymbol{T}$. Assim, há um modelo Σ em um reticulado adjunto, a álgebra $\mathcal{A}_{||}$, tal que $\Sigma \vDash \Gamma$ e $\Sigma \nvDash \varphi$. Logo, $\Gamma \nvDash \varphi$. ■

7 Bibliografia

ARECES, C.; BERNARDI, R.; MOORTGAT, M. Galois connections in categorial type logic. **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, v. 53, p. 3-20, 2004.

BIRKHOFF, G. **Lattice theory**. New York: American Mathematical Society, 1948. (Colloquium publications - American Mathematical Society, v. 25).

BLACKBURN, P.; RIJKE, M.; VENEMA, Y. **Modal logic**. Cambridge: University Press, 2001.

CHELLAS, B. F. **Modal logic:** an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford: Oxford University Press, 2001.

ERNÉ, M.; KOSLOWSKI, J.; MELTON, A.; STRECKER, G. E. A primer on Galois connections. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 704, n. 1, p. 103-125, 1993.

FEITOSA, H. A.; LÁZARO, C. A.; NASCIMENTO, M. C. Pares de Galois e espaços de Tarski. **Cognitio**, v. 19, n. 1, p. 110-132, 2018.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FEITOSA, H. A.; SOARES, M. R. Da dedução para a álgebra. **C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 10, p. 118-134, 2017. Edição Ermac. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v10a09-da-deducao-para-a-algebra.pdf. Acesso em: 22 out. 2022.

JARVINEN, J.; KONDO, M.; KORTELAINEN, J. Logics from Galois connections. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 49, n. 3, p. 595-606, 2008.

LÁZARO, C. A.; FEITOSA, H. A.; SOARES, M. R. Lógica da dedutibilidade: o axioma modal B e adjunções. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v. 2, n. 3, p. 52-69, 2021.

LÁZARO, C. A.; FEITOSA, H. A.; SOARES, M. R. Lógica, ordem e sistemas implicativos. **Veritas** (Porto Alegre), v. 64, n. 3, p. e32214, 2019.

MIRAGLIA, F. **Cálculo proposicional:** uma interação da álgebra e da lógica. Campinas: UNICAMP/CLE, 1987. (Coleção CLE, v. 1).

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

ORLOWSKA, E.; REWITZKY, I. Algebras for Galois-style connections and their discrete duality. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 161, n. 9, p. 1325-1342, 2010.

PRIEST, G. **An introduction to non-classical logic**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

RASIOWA, H. **An algebraic approach to non-classical logics**. Amsterdam: North-Holland, 1974.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. **The mathematics of metamathematics**. Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers, 1963.

SMITH, P. **The Galois connection between syntax and semantics**. [*S. l.: s. n.*, 2010]. Disponível em: https://www.logicmatters.net/resources/pdfs/Galois.pdf. Acesso em: 22 out. 2022.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. Amsterdam: North-Holland, 1971.