Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Diego Miranda Gonçalves
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquisa Filho"
dm281291@gmail.com

Lucas Antonio Caritá
IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
prof.carita@ifsp.edu.br

Integrais impróprias em intervalos ilimitados com parâmetros complexos

Improper integrals on unlimited intervals with complex parameters

Resumo

O entendimento sobre a convergência de integrais impróprias é importante para o estudo de transformadas integrais, principalmente da transformada de Laplace. Nesse sentido, o seguinte trabalho aborda alguns aspectos da integração imprópria em intervalos ilimitados com parâmetros complexos. Para isso, é realizada uma revisão de conceitos como limite, derivada e integral no domínio dos números complexos, utilizando ferramentas da análise matemática e do cálculo diferencial e integral. Em seguida, são demonstrados alguns teoremas fundamentais sobre a convergência de integrais impróprias, como o critério da comparação, o critério de Cauchy e a convergência da integral que define a transformada de Laplace. Outros resultados incomuns de se encontrar na literatura são discutidos. Por fim, são apresentadas algumas transformadas integrais especiais.
Palavras-chave: Integrais Impróprias. Transformadas Integrais. Transformada de Laplace. Parâmetros Complexos.

Abstract

The understanding of the convergence of improper integrals is important for the study of integral transforms, especially the Laplace transform. In this sense, the following work studies some aspects of improper integration in unlimited intervals with complex parameters. A review of concepts such as limit, derivative and integral in the domain of complex numbers is carried out, using tools of mathematical analysis and differential and integral calculus. Then, some fundamental theorems about the convergence of improper integrals are demonstrated, such as the comparison criterion, the Cauchy criterion and the convergence of the integral that defines the Laplace transform. Other uncommon results to be found in the literature are presented. Finally, some special integral transforms are presented.
Keywords: Improper Integrals. Integral Transforms. Laplace transform. Complex Parameters.

Artigo recebido em jan. 2023 e aceito em abr. 2023

1 Introdução

Na teoria de integração de Riemann, quando se estuda integrais definidas, duas condições aparecem: as funções integrandas e os intervalos de integração são limitados. Contrariando uma dessas duas condições, temos o que chamamos de integrais impróprias tipo 1 ou tipo 2:

(i) Tipo 1: quando os intervalos de integração são ilimitados;

(ii) Tipo 2: quando o intervalo de integração é limitado mas a função integranda não é limitada.

Muitas integrais impróprias aparecem em diferentes campos da ciência, como Física, Engenharia e etc [1, 2, 3, 4]. Em particular, uma integral imprópria do tipo 1 pode ser estudada basicamente calculando o limite para $\pm\infty$ de um (ou ambos) dos extremos do intervalo de integração na integral de Riemann definida. Este tipo específico de integrais impróprias são muito utilizados para definir transformadas integrais, que são muito úteis para resolver problemas de decaimento radioativo, de condução de calor, de movimento da partícula sob gravidade, circuitos elétricos, etc [3].

A transformada de Laplace, por exemplo, é uma transformada integral com núcleo $K(s,t) = e^{-st}$ e constitui uma ferramenta fundamental para solucionar problemas de valor inicial em equações diferenciais. O método funciona basicamente transformando uma equação diferencial complicada na variável t em uma equação algébrica, mais simples de lidar, na variável complexa s.

Uma vez que as transformadas integrais são definidas utilizando integrais impróprias, é interessante que, antes de estudar transformadas, se tenha um conhecimento prévio suficiente e fundamentado dessas integrais.

Motivados em propiciar uma base consolidada para o estudo de transformadas integrais, especialmente de Laplace, escrevemos este artigo, com o objetivo de apresentar conceitos fundamentais sobre integrais impróprias do tipo 1 em intervalos ilimitados com parâmetros complexos.

2 Funções complexas de uma variável real

2.1 Limite e continuidade

Definição 1 *Uma função do tipo $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pode ser representada como $f(t) = u(t) + iv(t)$, onde $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v : A \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções chamadas de componentes de f. A componente u é a parte real de f e a componente v é a parte imaginária de f.*

Definição 2 *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f possui limite $L \in \mathbb{C}$ quando $t \in A$ tende a $t_0 \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L$, desde que:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - L| < \epsilon.$$

Definição 3 *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função com o conjunto A ilimitado superiormente. Dizemos que f possui limite $L \in \mathbb{C}$ quando $t \in A$ tende ao infinito por valores positivos, e escrevemos $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = L$, desde que:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid t > k \implies |f(t) - L| < \epsilon.$$

Observação 4 *As Definições 2 e 3 nos fornecem as seguintes equivalências:*

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L \iff \lim_{t\to t_0} |f(t) - L| = 0$$

$$e$$

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = L \iff \lim_{t\to +\infty} |f(t) - L| = 0.$$

Teorema 5 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $L = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$. Temos que $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = u_0$ e $\lim\limits_{t\to t_0} v(t) = v_0$.*

Demonstração:

De forma direta, mas supondo que $\lim\limits_{t\to t_0} u(t)$ e $\lim\limits_{t\to t_0} u(t)$ existem, tem-se:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L \iff \lim_{t\to t_0} f(t) = u_0 + iv_0 \iff \lim_{t\to t_0} (u(t) + iv(t)) = u_0 + iv_0$$

$$\iff \lim_{t\to t_0} u(t) + i \lim_{t\to t_0} v(t) = u_0 + iv_0 \iff \lim_{t\to t_0} u(t) = u_0 \;\; e \;\; \lim_{t\to t_0} v(t) = v_0$$

□

Exemplo 6 *Sendo $s = x + iy \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$, provemos que $\lim\limits_{t\to +\infty} -\dfrac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = 0$ para $Re(s) = x > a$.*

Demonstração:

Pela Observação 4:

$$\lim_{t\to +\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = 0 \iff \lim_{t\to +\infty} -\frac{1}{(s-a)\, e^{(s-a)t}} = 0 \iff$$

$$\lim_{t\to +\infty} \left| -\frac{1}{(s-a)\, e^{(s-a)t}} - 0 \right| = 0 \iff \lim_{t\to +\infty} \left| \frac{1}{(s-a)\, e^{(s-a)t}} \right| = 0.$$

Note que:

$$\left| \frac{1}{(s-a)\, e^{(s-a)t}} \right| \overset{s=x+iy}{=} \left| \frac{1}{(x-a+iy)\, e^{((x-a)+iy)t}} \right| = \left| \frac{1}{(x-a+iy)\, e^{iyt}\, e^{(x-a)t}} \right|$$

$$= \frac{1}{|x-a+iy|\, |e^{iyt}|\, |e^{(x-a)t}|} = \frac{1}{|x-a+iy|\, |\cos(yt) + i\sin(yt)|\, e^{(x-a)t}}$$

$$= \frac{1}{e^{(x-a)t}\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{\cos^2(yt) + \sin^2(yt)}} = \frac{1}{e^{(x-a)t}\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}.$$

Assim, se $x > a$:

$$\lim_{t\to +\infty} \left| \frac{1}{(s-a)\, e^{(s-a)t}} \right| = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{e^{(x-a)t}\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0$$

já que $e^{-(x-a)t} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$.

□

Definição 7 *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é contínua em $t_0 \in A$ quando $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$. Dizemos que f é contínua, quando for contínua em todos os pontos de A.*

Teorema 8 *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então f é contínua em $t_0 \in A$ se, e somente se, u e v são contínuas em $t_0 \in A$.*

Demonstração:

f contínua em $t_0 \overset{Def.\,7}{\iff} \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) = u(t_0) + iv(t_0) \overset{Teo.\,5}{\iff} \lim_{t \to t_0} u(t) = u(t_0)$ *e* $\lim_{t \to t_0} v(t) = v(t_0) \iff u$ e v são contínuas em t_0.

□

As regras operatórias de limite e continuidade para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [6].

2.2 Diferenciabilidade

Definição 9 *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que f é diferenciável em $t_0 \in A$ caso exista o limite*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

onde $\Delta t = t - t_0$. Esse limite chama-se derivada de f em t_0 e possui notação $f'(t_0)$ ou $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Teorema 10 *Se $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável em $t_0 \in A$, então f é contínua em $t_0 \in A$.*

Demonstração: De fato, temos:

$$\lim_{t \to t_0} |(f(t) - f(t_0))| = \lim_{t \to t_0} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{t - t_0}(t - t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{t - t_0} \cdot \lim_{t \to t_0}(t - t_0).$$

Da diferenciabilidade da f em t_0, sabendo que $\lim_{t \to t_0}(t - t_0)$ existe e é igual a zero, obtemos

$$\lim_{t \to t_0} |f(t) - f(t_0)| = f'(t_0) \cdot 0 = 0,$$

o que nos mostra, pela Observação 4, que f é contínua em t_0.

□

Teorema 11 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função com $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $t_0 \in A$. Então f é diferenciável em t_0 se, e somente se, $f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$.*

Demonstração: Note que:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{u(t) + iv(t) - (u(t_0) + iv(t_0))}{t - t_0} = \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i\left(\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}\right).$$

Pela Definição 9, supondo que $\lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0}$ e $\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ existem, tem-se:

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \iff f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left[\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i\left(\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}\right)\right]$$

$$\iff f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \iff f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0).$$

□

As regras de derivação para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [6].

2.3 Integrabilidade

Definição 12 *Sejam $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função e $P = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, em que $t_i \in [a, b]$, $0 \leq i \leq n$, com $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b$. Considere, aleatoriamente, $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e denote $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$.*

a) A soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$ é chamada soma de Riemann de f em relação à partição P.

b) O limite $\displaystyle\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$, quando existe, é chamado de integral de f em $[a, b]$. Nesse caso, usamos a notação $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$ e dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 13 *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ função em que $f(t) = u(t) + iv(t)$. Então f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, u e v são integráveis em $[a, b]$. Além disso:*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt.$$

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Por hipótese $f(t) = u(t) + iv(t)$ é integrável em $[a, b]$. Assim, nas condições da Definição 12:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta t_j = \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} (u(c_j)\Delta t_j + iv(c_j)\Delta t_j)$$

$$= \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} u(c_j)\Delta t_j + i \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} v(c_j)\Delta t_j = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt,$$

como f é integrável em $[a, b]$, da igualdade acima segue que u e v também o são.

($\Longleftarrow$) Agora, considerando u e v integráveis em $[a, b]$, tem-se:

$$\int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt = \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} u(c_j)\Delta t_j + i \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} v(c_j)\Delta t_j =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} (u(c_j)\Delta t_j + iv(c_j)\Delta t_j) = \lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta t_j = \int_a^b f(t)\, dt,$$

o que faz $f(t) = u(t)+iv(t)$ ser integrável em $[a, b]$. $\square$

As regras de integração para funções complexas são semelhantes as para as funções reais. O leitor pode conferir nas referências [5] e [6].

Devido a proposta deste trabalho, selecionamos alguns teoremas interessantes sobre integrabilidade complexa para demonstrar.

Teorema 14 *Dada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável em $[a, b]$ em que $f(t) = u(t)+iv(t)$. Então $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Demonstração: Por hipótese, f é integrável em $[a, b]$, então, pelo Teorema 13, as funções u e v também são integráveis em $[a, b]$. Assim, $u^2 + v^2$ é integrável em $[a, b]$. Como a composição de funções reais integráveis é integrável, segue também que $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ é integrável.

Agora vamos demonstrar a desigualdade proposta no enunciado.

Se $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$ não há o que demonstrar. Então suponha que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = x + iy \neq 0$. Na forma polar:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \cdot (\cos(\theta)) + i \sin(\theta)) \implies$$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{-1} \cdot \int_a^b f(t)\, dt, \tag{1}$$

em que θ é o argumento principal de $x + iy$. Denotemos $k = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{-1}$, então $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = Re\left(\int_a^b k\, f(t)\, dt \right)$, pois

$$\begin{aligned} Re\left(\int_a^b k\, f(t)\, dt \right) &= Re\left(k \int_a^b f(t)\, dt \right) \\ &= Re\left((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{-1} \cdot \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \right) \\ &= Re\left(\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \right) = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right|. \end{aligned}$$

Dessa maneira, como $\displaystyle Re\left(\int_a^b k\, f(t)\, dt \right) = \int_a^b Re\,(k\, f(t))\, dt$, segue que:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b Re(k\, f(t))\, dt \overset{Re(z) \leq |z|,\, \forall z \in \mathbb{C}}{\leq} \int_a^b |k\, f(t)|\, dt = \int_a^b |k|\, |f(t)|\, dt.$$

Sabendo[1] que $|k| = \left| \dfrac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \right| = |\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)| = 1$, obtemos:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

$\square$

Teorema 15 *Se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrável em $[a,x]$ para todo $x \in [a,b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ é diferenciável e $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$.*

Demonstração:

Sendo $f(t) = u(t) + iv(t)$, com f integrável em $[a,x]$, então u e v também são integráveis em $[a,x]$ pelo Teorema 13. Assim,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x (u(t) + iv(t))\, dt = \int_a^x u(t)\, dt + i \int_a^x v(t)\, dt.$$

Sabemos[2] da teoria de integrais em uma variável real que $\int_a^x u(t)\, dt$ e $\int_a^x v(t)\, dt$ são deriváveis e que $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x u(t)\, dt\right] = u(x)$ e $\dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x v(t)\, dt\right] = v(x)$. Então,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x u(t)\, dt + i\int_a^x v(t)\, dt\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x u(t)\, dt\right] + i\frac{d}{dx}\left[\int_a^x v(t)\, dt\right] = u(x) + iv(x) = f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 16 *Se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável e f' é integrável em $[a,b]$, então $\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$.*

Demonstração:

Sendo $f(t) = u(t) + iv(t)$ diferenciável, temos $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Sendo f' integrável em $[a,b]$, pelo Teorema 13, u' e v' também são integráveis. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo[3] temos $\int_a^b u'(t)\, dt = u(b) - u(a)$ e $\int_a^b v'(t)\, dt = v(b) - v(a)$, assim:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)\, dt &= \int_a^b (u'(t) + iv'(t))\, dt = \int_a^b u'(t)\, dt + i\int_a^b v'(t)\, dt \\ &= (u(b) - u(a)) + i(v(b) - v(a)) = u(b) + iv(b) - (u(a) + iv(a)) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

[1] Note que $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2$.

[2] O leitor pode conferir o Teorema 8, página 255, do livro [7].

[3] O leitor pode conferir o Teorema 9, página 256, do livro [7].

GONÇALVES, D. M.; CARITÁ, L. A. Integrais impróprias em intervalos ilimitados com parâmetros complexos. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 153–181, jul. 2023.
DOI: 10.21167/cqdv23n12023153181 Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index

$\square$

Com base nos Teoremas 15 e 16, calcular integrais de funções complexas de uma variável real é um processo muito similar ao cálculo de integrais de funções reais. Podemos, por exemplo, levar em conta o que conhecemos sobre integração por primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Observação 17 *Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo real e $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ao longo deste trabalho, muitas vezes será útil considerar uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, complexa de uma variável real, dada da seguinte forma $f(t) = K(s,t)g(t)$ em que g é uma função real ou complexa e $K : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função onde $s \in \Omega \subset \mathbb{C}$ é um parâmetro fixado. Neste caso, dizemos que uma integral da forma $G(s) = \displaystyle\int_I K(s,t)g(t)\,dt$ está indexada pelo parâmetro s e, com certa frequência, será de nosso interesse apontar as possibilidades de s para os quais a integral exista.*

3 Integrais impróprias do tipo 1

3.1 Definições e primeiros resultados

Para as definições e resultados dessa seção, considere f uma função do tipo $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definição 18 *Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $\displaystyle\int_a^u f(t)\,dt$ existe para todo $u \geq a$, definimos:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_a^u f(t)\,dt,$$

desde que o limite exista e seja finito.

Definição 19 *Seja $b \in \mathbb{R}$. Se $\displaystyle\int_{-u}^b f(t)\,dt$ existe para qualquer $-u \leq b$, definimos:*

$$\int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^b f(t)\,dt,$$

desde que o limite exista e seja finito.

As integrais $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$, apresentadas nas Definições 18 e 19, são chamadas integrais impróprias do tipo 1 e serão ditas **convergentes** caso os limites existam e, caso contrário, as integrais serão ditas **divergentes**.

Teorema 20 *Sejam a e b reais arbitrários. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ são convergentes então:*

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Demonstração: Suponha $a < b$, sem perda de generalidade. Pelas Definições 18 e 19:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt &= \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{a} f(t)\,dt + \lim_{u\to+\infty}\int_{a}^{u} f(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{a} f(t)\,dt + \lim_{u\to+\infty}\left[\int_{a}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{u} f(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} f(t)\,dt + \lim_{u\to+\infty}\int_{b}^{u} f(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to+\infty}\left[\int_{-u}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{b} f(t)\,dt\right] + \int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt + \int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

□

Definição 21 *Considere $a \in \mathbb{R}$. Se as integrais impróprias $\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$ e $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ são convergentes, definimos:*

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt.
$$

Pelo Teorema 20, a Definição 21 independe da escolha do $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 22 *Considere $u > 0$ e f uma função integrável em $[-u, u]$ e para a qual as integrais $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ e $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ existam. Então*

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} f(t)\,dt.
$$

Demonstração:

Sabemos pela Definição 21 que:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{0} f(t)\,dt \;+\; \lim_{u\to+\infty}\int_{0}^{u} f(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to+\infty}\left[\int_{-u}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{u} f(t)\,dt\right] = \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} f(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

□

3.2 Alguns exemplos

Agora vejamos alguns exemplos para aplicarmos os conceitos anteriores.

Exemplo 23 *Provemos que* $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$, *onde* $s \in \mathbb{C}$ *e* $Re(s) > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-st}\, dt.$$

Temos:

$$\int_0^u e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^u = -\frac{1}{s}\left(e^{-su} - 1\right).$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{1}{s}\left(e^{-su} - 1\right)\right] = \frac{1}{s}$$

para $Re(s) > 0$, *pois* $e^{-su} \longrightarrow 0$ *conforme* $u \longrightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$$

quando $Re(s) > 0$.

Exemplo 24 *Provemos que* $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}$, *onde* $s \in \mathbb{C}$ *e* $Re(s) > 0$.

Por definição,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-st}\, t\, dt.$$

Utilizando integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^u e^{-st}\, t\, dt &= -\frac{t}{s}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^u + \frac{1}{s}\int_0^u e^{-st}\, dt = -\frac{t}{s}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^u - \frac{1}{s^2}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^u \\ &= -\frac{u}{s}\left(e^{-su}\right) - \frac{1}{s^2}\left(e^{-su} - 1\right).\end{aligned}$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u\to+\infty}\left[-\frac{u}{s}\left(e^{-su}\right)-\frac{1}{s^2}\left(e^{-su}-1\right)\right] = \frac{1}{s^2}$$

para $Re(s) > 0$, *pois* $e^{-su} \longrightarrow 0$ *e* $-\frac{u}{s}\left(e^{-su}\right) \longrightarrow 0$ *conforme* $u \longrightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}$$

quando $Re(s) > 0$.

Exemplo 25 *Provemos que* $\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$, *onde* $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $s > 0$.

Neste caso iremos demonstrar pelo Princípio da Indução [4].

1. *Para* $n = 1$*:*

   $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}$, *conforme Exemplo 24.*

2. *Supondo válido para n:*

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

3. *Provando para* $n + 1$*:*

   Sabemos, da Definição 18, que:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} t^n e^{-st}\, dt.$$

   Com a utilização da integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^{u} t^n e^{-st}\, dt &= \frac{1}{n+1}\left(e^{-st}t^{n+1}\right)\Big|_0^u + \frac{s}{n+1}\int_0^u e^{-st}t^{n+1}\, dt\\ &= \frac{1}{n+1}\left(e^{-su}u^{n+1}\right) + \frac{s}{n+1}\int_0^u e^{-st}t^{n+1}\, dt.\end{aligned}$$

   Aplicando o limite quando $u \longrightarrow +\infty$*:*

[4] O leitor pode conferir a seção 1 do Capítulo 1, página 2, do livro [8].

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u t^n e^{-st}\, dt = \frac{s}{n+1}\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-st}\, dt$$

para $s > 0$, pois $\dfrac{1}{n+1}\left(e^{-su}u^{n+1}\right) \to 0$ quando $u \to +\infty$.

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}t^n\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$, temos:

$$\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{s}{n+1}\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-st}\, dt.$$

Isolando $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-st}\, dt$, obtemos:

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-st}\, dt = \frac{(n+1)n!}{s(s^{n+1})} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

Por indução, segue o resultado.

Exemplo 26 *Provemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ e $Re(s) > \alpha$.*

Pela Definição 18, sabemos que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt \;=\; \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt.$$

Usando substituição:

$$\int_0^u e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt \;=\; \int_0^u e^{(\alpha-s)t}\; dt = \frac{1}{\alpha-s}\int_0^{(\alpha-s)u} e^w\, dw = \frac{1}{\alpha-s}\left[e^{(\alpha-s)u} - 1\right].$$

Aplicando o limite:

$$\lim_{u\to+\infty}\left\{\frac{1}{\alpha-s}\left[e^{(\alpha-s)u} - 1\right]\right\} = \frac{1}{s-\alpha}$$

para $Re(s) > \alpha$, pois $e^{-(s-\alpha)u} \to 0$ conforme $u \to +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt \;=\; \frac{1}{s-\alpha}$$

quando $Re(s) > \alpha$.

Exemplo 27 *Provemos que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$*, onde* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $s \in \mathbb{C}$ *e* $Re(s) > 0$.

Pela Definição 18, segue que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\ \cos(\alpha t)\,dt \ = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-st}\ \cos(\alpha t)\,dt.$$

Com a utilização da integração por partes, realizada duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^u e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt &= \frac{e^{-st}\sin(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u + \frac{s}{\alpha}\int_0^u e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt\\ &= \frac{e^{-st}\sin(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u + \frac{s}{\alpha}\left(-\frac{e^{-st}\cos(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u - \frac{s}{\alpha}\int_0^u e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt\right)\\ &= \frac{e^{-st}\sin(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u - \frac{s}{\alpha^2}\left(e^{-st}\cos(\alpha t)\right)\Big|_0^u - \frac{s^2}{\alpha^2}\int_0^u e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt\\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\sin(\alpha u)\right) + \frac{s}{\alpha^2+s^2} - \frac{s}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\cos(\alpha u)\right).\end{aligned}$$

Aplicando o limite no lado direito da igualdade anterior:

$$\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\sin(\alpha u)\right) + \frac{s}{\alpha^2+s^2} - \frac{s}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\cos(\alpha u)\right)\right] = \frac{s}{\alpha^2+s^2}$$

para $Re(s) > 0$*, pois* $e^{-su} \to 0$ *conforme* $u \to +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt \ = \ \frac{s}{\alpha^2+s^2}$$

quando $Re(s) > 0$.

Exemplo 28 *Provemos que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}$*, onde* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $s \in \mathbb{C}$ *e* $Re(s) > 0$.

Por definição,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\ \sin(\alpha t)\,dt \ = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-st}\ \sin(\alpha t)\,dt.$$

Com a utilização da integração por partes, realizada duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^u e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt &= -\frac{e^{-st}\cos(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u - \frac{s}{\alpha}\int_0^u e^{-st}\cos(\alpha t)\,dt\\ &= -\frac{e^{-st}\cos(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u - \frac{s}{\alpha}\left(\frac{e^{-st}\sin(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u + \frac{s}{\alpha}\int_0^u e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt\right)\\ &= -\frac{e^{-st}\cos(\alpha t)}{\alpha}\Big|_0^u - \frac{s}{\alpha^2}\left(e^{-st}\sin(\alpha t)\right)\Big|_0^u - \frac{s^2}{\alpha^2}\int_0^u e^{-st}\sin(\alpha t)\,dt\\ &= -\frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\cos(\alpha u)\right) + \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2} - \frac{s}{\alpha^2+s^2}\left(e^{-su}\sin(\alpha u)\right).\end{aligned}$$

Aplicando o limite no lado direito da igualdade anterior:

$$\lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \cos(\alpha u) \right) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} - \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \left(e^{-su} \sin(\alpha u) \right) \right] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

para $Re(s) > 0$, pois $e^{-su} \to 0$ conforme $u \to +\infty$.

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\alpha t)\, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

quando $Re(s) > 0$.

4 Convergência de integrais impróprias do tipo 1

4.1 O critério da comparação (para integrais impróprias de funções reais)

Teorema 29 *Dada $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, x]$, para qualquer $x \geq a$ com $f(t) \geq 0$ no intervalo $[a, +\infty[$, considere a função $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, $x \geq a$. Então:*

a) $F(x)$ é crescente em $[a, +\infty[$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ existe se, e somente se, existir $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$ para todo $x \geq a$.

Demonstração:

a) Considere x_1 e x_2 dois números reais tais que $a \leq x_1 < x_2$, então:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\, dt - \int_a^{x_1} f(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \geq 0$$

uma vez que $f(t) \geq 0$ para $t \geq a$.

Assim, para quaisquer x_1, x_2 em $[a, +\infty[$, com $x_1 < x_2$, temos que:

$$x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2).$$

Portanto, $F(x)$ é crescente.

b) ($\Longrightarrow$) Se $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = A$, considerando sempre $x \geq a$ (para que esteja no domínio da F), então:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, k > 0 \ \mid \ x > k \implies |F(x) - A| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$:

$$\exists\, k > 0 \;\mid\; x > k \implies |F(x) - A| < 1.$$

Ou seja:

$$A - 1 < F(x) < A + 1, \;\; \forall\, x > k.$$

Então, F é limitada para $x > k$. Podemos dizer que existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$, $\forall\, x > k$. Note que k pode ser escolhido de forma a implicar que existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M, \forall\, x > a$. No caso em que $x = a$, $F(x) = \displaystyle\int_a^a f(t)\, dt = 0$. Logo, $F(x) \leq M$ para este caso também.

Portanto, existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M$ para todo $x \geq a$.

($\Longleftarrow$) Se $a > 0$, defina $I = \{F(x) \mid x \geq a\}$ e se, $a \leq 0$, defina $I = \{F(x) \mid x > 0\}$. De todo modo, o conjunto I é limitado superiormente, pois existe $M > 0$ tal que $F(x) \leq M, \forall\, x \geq a$. Denote $A = \sup I$ e provemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = A$.

Como $A = \sup I$, temos que:

$$\forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, \omega \in I \;\mid\; A - \epsilon < \omega \leq A.$$

Como $\omega \in I$, então $\omega = F(k)$, para algum $k \geq a$. Dessa maneira:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, k > a \;\mid\; A - \epsilon < F(k) \leq F(x) \tag{2}$$

onde $x > k$, pois como F é crescente (Teorema 29 (a)):

$$x > k \implies F(x) \geq F(k). \tag{3}$$

Assim, pelas Equações (2) e (3):

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, k > a \;\mid\; x > k \implies A - \epsilon \overset{Eq.\ (2)}{<} F(k) \overset{Eq.\ (2)}{\leq} F(x) \leq A < A + \epsilon.$$

Isto é,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, k > a \;\mid\; x > k \implies |F(x) - A| < \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = A.$$

$\square$

Observação 30 *Uma consequência do item b) do Teorema 29 é: Considere* $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *positiva e integrável em* $[a, x]$*, para qualquer* $x \geq a$*. Então* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ *é convergente se, e somente se, existir* $M > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\, dt \leq M$ *para todo* $x \geq a$*.*

Teorema 31 (Critério da Comparação) *Sejam duas funções* $f, g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *positivas e integráveis em* $[a, x]$*, para qualquer* $x \geq a$*, em que* $f(t) \leq g(t)$ *para todo* $t \geq a$*. Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *é convergente, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *também é convergente.*

Demonstração:

Por hipótese $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ é convergente. Logo, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt = M \geq 0$, pois $g(t) \geq 0$ para $t \geq a$. Uma vez que $f(t) \leq g(t)$ para qualquer $t \geq a$:

$$\int_a^{x} f(t)\, dt \leq \int_a^{x} g(t)\, dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\, dt = M < C,$$

para algum $C \in \mathbb{R}$. Da Observação 30, segue que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ é convergente.

□

Observação 32 *Pelo Teorema 31 é possível escrever: Sejam duas funções* $f, g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *positivas e integráveis em* $[a, x]$*, para qualquer* $x \geq a$*, em que* $f(t) \leq g(t)$ *para todo* $t \geq a$*. Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *também é divergente.*

Teorema 33 *São verdadeiras as afirmações:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$ *é convergente se* $\alpha > 1$ *e divergente se* $\alpha \leq 1$*.*

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ *é convergente se* $\alpha > 0$ *e divergente se* $\alpha \leq 0$*.*

Demonstração:

a) Para $\alpha = 1$, calculemos a integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{u \longrightarrow +\infty} \left(\int_1^{u} \frac{1}{t}\, dt \right).$$

Sabendo que

$$\int_1^{u} \frac{1}{t}\, dt = ln\,|t|\,\Big|_1^u = ln\,|u| \; - ln\,(1) \overset{u \geq 1}{=} ln\,(u)\;,$$

então,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{u\to+\infty} ln\,(u) \ = \ +\infty$$

e a integral diverge.

Para $\alpha \neq 1$ temos:

$$\int_1^{u} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[t^{1-\alpha}\right]\Big|_1^u = \frac{1}{1-\alpha}\left[u^{1-\alpha}-1\right] = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{u^{\alpha-1}}-1\right].$$

Dessa maneira, efetuando o limite quando $u \to +\infty$, obtemos:

$$\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{u^{\alpha-1}}-1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & , \quad \alpha > 1 \\ +\infty & , \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

uma vez que:

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 \ , & \alpha > 1 \\ +\infty \ , & \alpha < 1 \end{cases}$$

Consequentemente, a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$ converge para o valor $\dfrac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

b) Para $\alpha = 0$, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-0t}\, dt \ = \int_0^{+\infty} dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u dt = \lim_{u\to+\infty} u = +\infty$$

e a integral diverge.

Se $\alpha \neq 0$,

$$\int_0^{u} e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t}\right)\Big|_0^u = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha u}-1\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{e^{\alpha u}}\right).$$

Por conseguinte,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} e^{-\alpha t}\, dt = \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{e^{\alpha u}}\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & , \ \alpha > 0 \\ +\infty & , \ \alpha < 0 \end{cases}$$

uma vez que:

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha u}} = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha > 0 \\ +\infty & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Dessa maneira, a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ converge para o valor $\dfrac{1}{\alpha}$ se $\alpha > 0$ e diverge se $\alpha \leq 0$.

$\square$

Teorema 34 *Dado $a > 0$, considere $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável no intervalo $[a, x]$, para qualquer $x > a$, com $f(t) \geq 0$ em $[a, +\infty[$. Suponha que exista um número real α e uma função $g : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $t \geq a$ ocorra $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha} g(t)$. Além disso, considere que $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = L$ com $L > 0$. Então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ é convergente quando $\alpha > 1$ e divergente quando $\alpha \leq 1$.*

Demonstração:

Da hipótese $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = L$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, k > 0 \;\mid\; t > k \implies |g(t) - L| < \epsilon.$$

Abrindo o módulo,

$$|g(t) - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < g(t) < L + \epsilon.$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{L}{2}$ obtemos:

$$\frac{L}{2} < g(t) < \frac{3L}{2}.$$

Da hipótese que $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha} g(t)$, para $t \geq a$, então:

$$\frac{L}{2t^\alpha} < f(t) < \frac{3L}{2t^\alpha}.$$

Integrando esta última desigualdade em $[a, +\infty[$,

$$\frac{L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < \int_a^{+\infty} f(t)\, dt < \frac{3L}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt.$$

Do Teorema 33 a integral $\dfrac{3L}{2} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ é convergente para $\alpha > 1$ e pelo Teorema 31 (Critério da Comparação), a integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ é convergente nesse caso.

Do mesmo modo, do Teorema 33, a integral $\dfrac{L}{2} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ é divergente para $\alpha \leq 1$ e pela Observação 32, a integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ é divergente nesse caso.

$\square$

4.2 O critério de Cauchy

Teorema 35 (Critério de Cauchy) *Seja $f : [a, +\infty[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrável em $[a, x]$, para todo $x \geq a$. Então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ é convergente se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $b, c > A$ resulta $\left| \displaystyle\int_b^c f(t)\, dt \right| < \epsilon$.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Denotemos $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Sendo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente, podemos dizer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$, para algum $L \in \mathbb{C}$. Dessa maneira,

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, A > 0 \ | \ x > A \implies |F(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam $b, c > A$, assim:

$$\left|\int_b^c f(t)\,dt\right| = |F(c) - F(b)| = |F(c) - L + L - F(b)| \leq |F(c) - L| + |F(b) - L| \overset{b,c>A}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

($\Longleftarrow$) Seja (y_n) uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Pela hipótese:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, A > 0 \ | \ y_n, y_m > A \implies |F(y_m) - F(y_n)| < \epsilon.$$

Note que a sequência $(F(y_n))$ é de Cauchy e portanto convergente[5]. Logo $\lim\limits_{n\to+\infty} F(y_n) = L$, para algum $L \in \mathbb{C}$.

Provemos agora que para qualquer sequência (z_n), no domínio da F, com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n) = L$, com o mesmo L. Suponha que exista uma sequência (z_n) com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n) = L_2 \neq L$. Pela hipótese:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, A > 0 \ | \ b, c > A \implies |F(c) - F(b)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \dfrac{|L - L_2|}{3}$:

$$\exists A > 0 \ | \ b, c > A \implies |F(c) - F(b)| < \frac{|L - L_2|}{3}. \tag{4}$$

Tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que: $n > n_1 \implies y_n > A$ e $z_n > A$, temos pela Equação (4):

$$n > n_1 \implies |F(z_n) - F(y_n)| < \frac{|L - L_2|}{3}. \tag{5}$$

Como $L = \lim\limits_{n\to+\infty} F(y_n)$ e $L_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n)$, então:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \ | \ n > n_2 \implies |F(y_n) - L| < \epsilon \text{ e } |F(z_n) - L_2| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \dfrac{|L - L_2|}{3}$:

$$n > n_2 \implies |F(y_n) - L| < \frac{|L - L_2|}{3} \quad \text{e} \quad |F(z_n) - L_2| < \frac{|L - L_2|}{3}. \tag{6}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue das Equações (5) e (6):

$$\begin{aligned} n > n_0 \implies |L - L_2| &= |L - F(y_n) + F(y_n) - F(z_n) + F(z_n) - L_2| \\ &\leq |F(y_n) - L| + |F(z_n) - F(y_n)| + |F(z_n) - L| \\ &\overset{Eq.\ (5)\text{ e }(6)}{<} \frac{|L - L_2|}{3} + \frac{|L - L_2|}{3} + \frac{|L - L_2|}{3} = |L - L_2|. \end{aligned}$$

[5]O leitor pode conferir o Teorema 4.8, página 119, do livro [6].

Isto é: $|L - L_2| < |L - L_2|$ que é um absurdo! Portanto, não existe (z_n) com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n) = L_2 \neq L$. Logo, toda sequência (z_n) com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ possui $\lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n) = L$.

Por fim, provemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$. Suponha que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \neq L$. Então existe uma sequência (z_n) com $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} F(z_n) \neq L$. Mas isso é impossível, uma vez que provamos que nessas condições $\lim F(z_n) = L$. Sendo assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$, em outras palavras, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)$ é convergente.

□

4.3 Convergência condicional e absoluta

Definição 36 *A integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *é chamada de absolutamente convergente se a integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *é convergente. Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *é convergente, mas* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *é chamada condicionalmente convergente.*

Teorema 37 *Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *é absolutamente convergente, então também é convergente.*

Demonstração: Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, pelo Teorema 35 (Critério de Cauchy):

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \mid b, c > A \implies \left|\int_b^c |f(t)|\,dt\right| < \epsilon.$$

Como $\displaystyle\left|\int_b^c f(t)\,dt\right| \leq \int_b^c |f(t)|\,dt = \left|\int_b^c |f(t)|\,dt\right|$, então

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, A > 0 \mid b, c > A \implies \left|\int_b^c f(t)\,dt\right| < \epsilon. \tag{7}$$

Da Equação (7), novamente pelo Teorema 35 (Critério de Cauchy), $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ é convergente.

□

5 A convergência de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

Para toda essa seção, considere a função $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{C}$.

5.1 Funções de ordem exponencial γ

Definição 38 *Uma função* f *tem ordem exponencial* γ *se existirem constantes* $M > 0$ *e* $\gamma > 0$ *tais que para algum* $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}, \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Para alguns teoremas, precisaremos garantir que uma função f e algumas de suas derivadas tenham ordem exponencial. Isto, quando for necessário, precisa estar explícito nas hipóteses, uma vez que o primeiro fato não implica o segundo, conforme pode ser conferido no próximo exemplo.

Exemplo 39 *A função $f(t) = \sin(e^{t^3})$ possui ordem exponencial, mas $f'(t) = 3t^2e^{t^3}\cos(e^{t^3})$ não possui.*

De fato, para $\gamma > 0$, o $\lim\limits_{t\to+\infty} |\sin(e^{t^3})e^{-\gamma t}| = 0$, já que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\gamma t} = 0$ e $\sin(e^{t^3})$ é limitado. Então, existem constantes $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que para algum $t > 0$,

$$\frac{|\sin(e^{t^3})|}{e^{\gamma t}} \leq M.$$

Da mesma forma, o $\lim\limits_{t\to+\infty} |3t^2e^{t^3}\cos(e^{t^3})e^{-\gamma t}| = +\infty$. Assim, não existem constantes $\gamma > 0$ e $M > 0$ tais que para algum $t > 0$,

$$\frac{|3t^2e^{t^3}\cos(e^{t^3})|}{e^{\gamma t}} \leq M.$$

Então, concluímos que $f(t) = \sin(e^{t^3})$ é de ordem exponencial e a função $f'(t) = 3t^2e^{t^3}\cos(e^{t^3})$ não é de ordem exponencial.

Teorema 40 *Seja $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ derivável. Se f' é contínua em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial γ, segue que o mesmo vale para a função f.*

Demonstração: Da hipótese, f' é de ordem exponencial, então existem $M, \gamma > 0$ tais que:

$$|f'(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad t \geq t_0.$$

Como f' é contínua, do Teorema 16, segue que

$$\int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau = f(t) - f(t_0) \implies f(t) = \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau + f(t_0), \tag{8}$$

onde $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau$ é contínua pelo Teorema 15. Dessa forma, da Equação (8), também concluímos que f é contínua.

Portanto,

$$\begin{aligned}|f(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau \ + f(t_0)\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau\right| + |f(t_0)| \overset{Ord.\,Exp.}{\leq} M\int_{t_0}^{t} e^{\gamma\tau}\, d\tau + |f(t_0)| \\ &= \frac{M}{\gamma}e^{\gamma\tau}\Big|_{t_0}^{t} + |f(t_0)| = \frac{M}{\gamma}\left(e^{\gamma t} - e^{\gamma t_0}\right) + |f(t_0)| \leq \frac{M}{\gamma}e^{\gamma t} + |f(t_0)| \overset{\frac{M}{\gamma}=L}{=} Le^{\gamma t} + |f(t_0)|.\end{aligned}$$

Desse modo, $|f(t)| \leq Le^{\gamma t} + |f(t_0)|$ e assim é possível encontrar K suficientemente grande tal que $|f(t)| \leq Ke^{\gamma t}$. Então f é de ordem exponencial γ.

□

5.2 Continuidade por partes

Definição 41 *Uma função f possui um salto de descontinuidade em um ponto t_0 se os limites laterais,*

$$\lim_{t\to t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \qquad e \qquad \lim_{t\to t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

existem, ou seja, são números reais, e são distintos, isto é, $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

Definição 42 *Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo real e $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja $K : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função que leva $(s,t) \in \Omega \times I$ em $K(s,t) \in \mathbb{C}$. Defina $F(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} K(s,t) f(t)\,dt$. Dizemos que F converge uniformemente em algum domínio Ω no plano complexo se para todo $\epsilon > 0$ existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left| F(s) - \int_0^{\tau} K(s,t) f(t)\,dt \right| = \left| \int_{\tau}^{+\infty} K(s,t) f(t)\,dt \right| < \epsilon \tag{9}$$

para todo $\tau > \tau_0$ e $s \in \Omega$.

Teorema 43 *Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $0 < c$. Se $f(x,t)$ é contínua em cada retângulo $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq c$, exceto por possivelmente um número finito de saltos de descontinuidade, e se $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge uniformemente para todo x em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt.$$

Demonstração:

Temos

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx + \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx. \tag{10}$$

Uma vez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ é uniformemente convergente, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \geq \tau_0$,

$$\left| \int_{\tau}^{+\infty} f(x,t)\,dt \right| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

para todo x em $[a,b]$. Portanto, para $\tau \geq \tau_0$,

$$\left| (b-a) \int_{\tau}^{+\infty} f(x,t)\,dt \right| < \epsilon \implies \left| \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx \right| < \epsilon,$$

isto é,

$$\lim_{\tau\to+\infty} \int_a^b \int_{\tau}^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx = 0.$$

Tomando $\tau \to +\infty$ na Equação (10),

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \lim_{\tau\to+\infty} \int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx.$$

Dada a hipótese de continuidade da f e a teoria de integração dupla[6]:

$$\int_0^{\tau} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_0^{\tau} f(x,t)\,dt\,dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt\,dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt.$$

□

Teorema 44 *Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $0 < c$. Suponha que $f(x,t)$ e $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ sejam contínuas em cada retângulo $a \le x \le b$, $0 \le t \le c$, exceto por possivelmente um número finito de saltos de descontinuidade. Assuma também que a integral $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ seja convergente e que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$ seja uniformemente convergente. Então*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt \quad (a < x < b).$$

Demonstração: Seja

$$G(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,dt.$$

A função G é contínua[7]. Empregando o Teorema 43 temos:

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\,du &= \int_a^x \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,dt\,du = \int_0^{+\infty} \int_a^x \frac{\partial}{\partial u} f(u,t)\,du\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} [f(x,t) - f(a,t)]\,dt = F(x) - F(a).\end{aligned}$$

Assim[8], como $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x G(u)du = G(x)$,

$$\frac{d}{dx}F(x) = G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$

□

Definição 45 *Uma função f é contínua por partes no intervalo $[0, +\infty[$ se,*

1) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0)$*;*

[6]O leitor pode conferir o Teorema 4, página 43, do livro [9].
[7]O leitor pode conferir a Proposição 6.7, página 57, do livro [9].
[8]O leitor pode conferir o Teorema 8, página 255, do livro [7].

2) *f é contínua em todo intervalo $[0, x[$, para todo $x > 0$, exceto, possivelmente, por um número finito de pontos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ em $[0, x[$, nos quais f possui um salto de descontinuidade.*

Observação 46 *Uma consequência interessante da continuidade por partes de uma função f é que em cada possível subintervalo produzido pelo item 2) da Definição 45, f é também limitada. Isto é, para cada subintervalo $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, existe $M_i > 0$ tal que $|f(t)| < M_i$, $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, onde $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Sendo f contínua por partes em $[0, +\infty[$, para integrar f de 0 à x, onde $x > 0$, basta simplesmente calcular a integral em cada possível subintervalo produzido pelo item 2) da Definição 45 e somar os resultados. Ou seja,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{\tau_1} f(t)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dt + \ldots + \int_{\tau_n}^{x} f(t)dt.$$

Teorema 47 *Sejam $f, g : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas por partes e de ordem exponencial γ_1 e γ_2, respectivamente. Então:*

(i) $c_1 f + c_2 g$ é contínua por partes e possui ordem exponencial $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, para c_1 e c_2 constantes arbitrárias,

(ii) fg é contínua por partes e possui ordem exponencial $\gamma_1 + \gamma_2$.

Demonstração:

Como a soma e o produto de funções contínuas são contínuas e f e g possuem finitos saltos de descontinuidade, segue que a soma e o produto também terão essas mesmas características, isto é, $c_1 f + c_2 g$ e fg serão também contínuas por partes.

Em relação a ordem exponencial, temos:

(i) Note que $|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma_1 t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{\gamma_2 t}$. Para $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, segue que $|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{\gamma t}$. Então

$$\begin{aligned} |(c_1 f + c_2 g)(t)| &= |c_1 f(t) + c_2 g(t)| \leq |c_1 f(t)| + |c_2 g(t)| = |c_1||f(t)| + |c_2||g(t)| \\ &\leq |c_1| M_1 e^{\gamma t} + |c_2| M_2 e^{\gamma t} = (|c_1| M_1 + |c_2| M_2) e^{\gamma t} = M e^{\gamma t}, \end{aligned}$$

onde $M = |c_1| M_1 + |c_2| M_2$. Portanto, $c_1 f + c_2 g$ possui ordem exponencial $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

(ii) Também,

$$|(fg)(t)| = |f(t)g(t)| = |f(t)||g(t)| \leq M_1 e^{\gamma_1 t} \cdot M_2 e^{\gamma_2 t} = M_1 M_2 e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} = M e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t},$$

onde $M = M_1 M_2$. Portanto, fg possui ordem exponencial $\gamma_1 + \gamma_2$.

□

5.3 Condições suficientes para a convergência

A seguinte observação será muito importante ao longo do texto, pois será utilizada diversas vezes.

Observação 48 *Considere $s = x + iy$. Então:*

1)

$$\left|e^{-iyt}\right| = \left|\cos(-yt) + i\sin(-yt)\right| = \left|\cos(yt) - i\sin(yt)\right| = \sqrt{\cos^2(yt) + \sin^2(yt)} = \sqrt{1} = 1;$$

2)

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{(-x-iy)t}\right| = \left|e^{-xt}\right|\left|e^{-iyt}\right| \overset{1)}{=} e^{-xt}.$$

Teorema 49 *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é absolutamente convergente (e também convergente) para $s \in \mathbb{C}$ e $Re(s) > \gamma$.*

Demonstração:

Sendo f de ordem exponencial γ, temos:

$$\exists\, M_1 > 0,\ t_0 > 0 \text{ e } \gamma > 0 \ \mid\ |f(t)| \leq M_1 e^{\gamma t}, \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{11}$$

Como f é contínua por partes em $[0, t_0]$, da Observação 46, segue

$$\exists\, M_2 > 0 \ \mid\ |f(t)| \leq M_2, \quad 0 < t < t_0. \tag{12}$$

Uma vez que $e^{\gamma t}$ é sempre positivo, podemos dizer da Equação (12) que

$$\exists\, M_3 > 0 \ \mid\ |f(t)| \leq M_3 e^{\gamma t}, \quad 0 < t < t_0. \tag{13}$$

Das Equações (11) e (13) fica garantido que

$$\exists\, M > 0 \ \mid\ |f(t)| \leq M e^{\gamma t}, \quad \forall t > 0. \tag{14}$$

Considerando $s = x + iy$, provemos agora que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt$ é absolutamente convergente quando $Re(s) = x > \gamma$:

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^u |e^{-st} f(t)|\, dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^u |e^{-st} f(t)|\, dt &\overset{Obs.\ 48}{=} \int_0^u e^{-xt} |f(t)|\, dt \overset{Eq.\ (14)}{\leq} M \int_0^u e^{-xt} e^{\gamma t}\, dt \\ &= M \int_0^u e^{-(x-\gamma)t}\, dt = \left.\frac{M e^{-(x-\gamma)t}}{-(x-\gamma)}\right|_0^u = \frac{M}{x-\gamma} - \frac{M e^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt \leq \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{M}{x-\gamma} - \frac{Me^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma} \right) = \lim_{u\to+\infty} \frac{M}{x-\gamma} \left(1 - \frac{1}{e^{(x-\gamma)u}} \right) = \frac{M}{x-\gamma}$$

desde que $Re(s) = x > \gamma$.

Portanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é absolutamente convergente e, pelo Teorema 37, concluímos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ também é convergente para $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > \gamma$.

$\square$

Teorema 50 *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é uniformemente convergente para $Re(s) > \gamma$.*

Demonstração:

Sendo f de ordem exponencial γ, segue que:

$$\exists\, M > 0, \tau > 0 \text{ e } \gamma > 0 \mid |f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad t \geq \tau.$$

Considerando que $s = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\tau^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| &\overset{Obs.\ 48}{\leq} \int_\tau^{+\infty} e^{-xt} |f(t)|\, dt \leq M \int_\tau^{+\infty} e^{-(x-\gamma)t}\, dt \\
&= \lim_{u\to+\infty} \left. \frac{Me^{-(x-\gamma)t}}{-(x-\gamma)} \right|_\tau^u = \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma} - \frac{Me^{-(x-\gamma)u}}{x-\gamma} \right) = \frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma},
\end{aligned}$$

desde que $x = Re(s) > \gamma$. Além disso, supondo $x > \gamma$, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, pode-se tomar τ suficientemente grande de forma que

$$\frac{Me^{-(x-\gamma)\tau}}{x-\gamma} < \epsilon.$$

Sendo assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, sempre existe um valor $\tau_0 > 0$ tal que

$$\left| \int_\tau^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| < \epsilon, \quad \forall \tau \geq \tau_0,$$

quando $x = Re(s) > \gamma$. Logo, pela Definição 42, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é uniformemente convergente.

$\square$

6 Transformadas integrais

Definição 51 *Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo real e $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja $K : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função que leva $(s, t) \in \Omega \times I$ em $K(s, t) \in \mathbb{C}$. Dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, uma transformada integral de f é uma função definida por*

$$F(s) = \int_I K(s,t) f(t) dt \tag{15}$$

em que $F(s)$ é denominada transformada integral da função f, $K(s,t)$ é chamado de núcleo da transformada e s é um parâmetro complexo.

Considerando uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, a Tabela 1 nos mostra alguns exemplos de transformadas de f, em que mudamos apenas o núcleo e o intervalo I (domínio da f):

Tabela 1: Exemplos de transformadas integrais.

Núcleo	I	**Fórmula**	**Transformada**
$K(s,t) = e^{-st}$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$	Laplace
$K(s,t) = tJ_n(st)$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, t\, J_n(st)\, dt$	Hankel
$K(s,t) = t^{s-1}$	$I = [0, +\infty[$	$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{s-1}\, dt$	Mellin
$K(s,t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{t-s}$	$I = \mathbb{R}$	$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{t-s}\, dt$	Hilbert
$K(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}$	$I = \mathbb{R}$	$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}\, dt$	Fourier

Na Tabela 1, $J_n(t)$ é chamada de Função de Bessel de primeira espécie de ordem n e é representada, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, como $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\dfrac{t}{2}\right)^{2k+n}$.

6.1 Transformadas de Laplace

Definição 52 *Sejam $f : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função e s um parâmetro real ou complexo. Definimos a Transformada de Laplace de f como:*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{16}$$

quando a integral imprópria for convergente.

Podemos fazer um paralelo com a seção 3.2, onde calculamos alguns exemplos de integrais do mesmo tipo da integral da Definição 52.

Exemplo 53 *Calculamos as seguintes Transformadas de Laplace. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$:*

a) $\mathcal{L}(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \dfrac{1}{s}$, *$s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > 0$;*

b) $\mathcal{L}(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}$, $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > 0$;

c) $\mathcal{L}(t^n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ e $s > 0$;

d) $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha}$, $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > \alpha$;

e) $\mathcal{L}(\cos(\alpha t)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\alpha t)\, dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$, $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > 0$;

f) $\mathcal{L}(\sin(\alpha t)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\alpha t)\, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}$, $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > 0$.

Além dessas transformadas, na seção 5.3 também foram demonstrados alguns teoremas sobre a convergência da Transformada de Laplace.

Teorema 54 *Seja f de ordem exponencial γ contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é absolutamente convergente (e também convergente) para $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > \gamma$.*

Demonstração: A demonstração segue do Teorema 49.

□

Teorema 55 *Seja f de ordem exponencial γ e contínua por partes em $[0, x]$ para todo $x > 0$. Então $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é uniformemente convergente para $Re(s) > \gamma$.*

Demonstração: A demonstração segue do Teorema 50.

□

Para um aprofundamento sobre as transformadas de Laplace recomendamos a leitura de [10] ou [11], para leitores com conhecimentos mais avançados em matemática.

7 Considerações finais

Nosso objetivo foi fornecer um material sobre integrais impróprias para fundamentar o estudo das transformadas integrais. Sendo assim, nesse trabalho foi exemplificada de forma detalhada parte da teoria de integrais impróprias em intervalos ilimitados com parâmetros complexos. As demonstrações apresentadas exigem como pré-requisitos apenas algumas ferramentas básicas da análise matemática e do cálculo diferencial e integral.

Importantes teoremas foram explorados, como o critério da comparação e o critério de Cauchy, juntamente com alguns exemplos que mostram a aplicabilidade de tais resultados.

Além do mais, foi realizada a explanação da convergência da integral que define a transformada de Laplace, partindo das definições de função de ordem exponencial e da continuidade por partes. Com isso, podemos estudar as condições para a convergência da transformada de Laplace, além de calcular transformadas de Laplace de alguns exemplos primordiais que são base para a confecção de uma tabela de transformadas.

Referências

[1] ABU-GHUWALEH, M.; SAADEH, R.; BURQAN, A. New theorems in solving families of improper integrals. **Axioms**, v. 11, n. 7, Article 301, 2022.

[2] ARFKEN, G. B.; WEBER, H.-J. **Física matemática**: métodos matemáticos para engenharia e física. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2007.

[3] PATIL, D. P.; KANDEKAR, K. S.; ZANKAR, T.V. Application of general integral transform of error function for evaluating improper integrals. **International Journal of Advances in Engineering and Management**, v. 4, n. 6, p. 242-246, 2022.

[4] SAADEH, R.; ALAROUD, M.; AL-SMADI, M.; AHMAD, R. R.; DIN, U. K. S. Application of fractional residual power series algorithm to solve newell–whitehead–segel equation of fractional order. **Symmetry**, v.11, n. 12, Article 1431, 2019.

[5] BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Complex variables and applications**. 8th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009.

[6] AFONSO, S. M. S.; SILVA, M. A. **Teoria básica de análise complexa**. São Paulo: Editora Unesp, 2019.

[7] LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. v. 1.

[8] LIMA, E. L. **Análise real**: funções de uma variável. 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. v. 1.

[9] LIMA, E. L. **Análise no espaço** $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[10] DOETSCH, G. **Introduction to the theory and application of the Laplace transformation**. New York: Springer-Verlag, 1974.

[11] SCHIFF, J. L. **The Laplace transform**: theory and applications. New York: Springer, 1999.