

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Kadu Vinicius Toledo Paulino

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP-Universidade Estadual Pau-
lista "Júlio de Mesquita Filho"
kadu.toledo@unesp.br

Estudo qualitativo de modelos epidemiológicos

Qualitative study of epidemiological models

Resumo

Nesse trabalho, através de ferramentas da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (EDOs), investigaremos modelos epidemiológicos dos tipos SIS, SIR e suas variações, que são expressos como sistemas de equações diferenciais ordinárias e são utilizados para modelar a propagação de doenças como a gripe comum. Vamos trabalhar com diferentes modelos de compartimentos. Ao sistema de compartimentos, associamos um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas, que chamamos de sistema autônomo e que será o modelo matemático para a descrição da dinâmica das soluções.

Palavras-chave: Análise. Epidemiologia. Hiperbolicidade. Estabilidade.

Abstract

In this work, using tools from the qualitative theory of ordinary differential equations (ODEs), we will investigate epidemiological models of the SIS and SIR types and their variations, which are expressed as systems of ordinary differential equations and are used to model the spread of diseases such as influenza common. Let's work with different models of compartments. To the compartment system, we associate a system of autonomous ordinary differential equations, which we call an autonomous system and which will be the mathematical model for the description of the dynamics of the solutions.

Keywords: Analysis. Epidemiology. Hyperbolicity. Stability.



1 Introdução

As equações diferenciais tem uma capacidade notável de descrever o mundo que nos rodeia. Elas nos auxiliam a entender fenômenos que envolvem taxas de variação. Algumas destas equações podem ser resolvidas fazendo uso dos métodos de integração do cálculo diferencial, mas a maioria delas exigem ferramentas mais sofisticadas. As equações diferenciais podem ser encontradas, entre outras áreas, em:

- medicina, para modelar o crescimento do câncer ou a propagação de uma doença;
- engenharia, para descrever o movimento da eletricidade;
- química, para modelagem de reações químicas;
- economia, para encontrar melhores estratégias de investimento;
- física, para descrever o movimento de ondas, pêndulos ou sistemas caóticos.

Em especial, através de ferramentas da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (EDOs) a serem exploradas, vamos investigar modelos epidemiológicos dos tipos SIS e SIR, proposto primeiramente por Kermack e McKendrick em 1927 [1], que são expressos como sistemas de equações diferenciais ordinárias e são utilizados para modelar a propagação de diversos tipos de doenças.

Vamos trabalhar com diferentes modelos de compartimentos retirados de [2]. Ao sistema de compartimentos, associamos um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas, que chamamos de sistema autônomo e que será o modelo matemático para a descrição da dinâmica das soluções. Vale observar que as siglas para modelos de epidemiologia são frequentemente baseados nos padrões de fluxo entre as classes em que a população é dividida.

Ao longo do texto, daremos uma atenção maior às soluções de equilíbrio e ao Número de Reprodução Básico da Doença, denotado por R_0 , que é definido como sendo o número de infecções produzidas por um indivíduo infectado, em uma população totalmente suscetível. Este número permite estimar o impacto de uma infecção.

2 Resultados preliminares

Nesta seção apresentamos de forma sucinta alguns resultados fundamentais da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que se aplicam a sistemas lineares planares e sistemas não lineares do tipo $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, autônomos (que não dependem explicitamente da variável t). Estamos interessados no que se refere a estabilidade dos pontos de equilíbrio de tais sistemas e na existência de órbitas periódicas. Neste sentido, apresentamos alguns resultados envolvendo sistemas planares e damos algumas definições e relembramos resultados importantes em equações diferenciais ordinárias como o Teorema de Hartman-Grobman e o Teorema de Poincaré-Bendixson.

2.1 Resultados de EDO's

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

é dita *equação diferencial ordinária autônoma de primeira ordem*.

- O termo “primeira ordem” se refere ao fato de só existirem primeiras derivadas e não existirem derivadas mais altas.
- O termo “autônoma” significa que a derivada depende apenas do estado do sistema x e não depende do tempo t .
- O termo “ordinária” remete ao fato de só existirem derivadas ordinárias e não existirem derivadas parciais.

Uma equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ em \mathbb{R}^n , com $n > 1$, escrita na forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

é denominada *sistema de equações diferenciais*.

Para usar a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ para realizar previsões sobre o que acontecerá, ou seja, para prever $x(t)$, é necessário resolver o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = p.$$

Nem sempre é possível encontrar a solução analítica de tal problema. Mas, em muitos problemas de aplicação não se faz necessário saber a expressão algébrica da solução da equação diferencial, é suficiente saber se a equação admite solução, para posteriormente estudar suas propriedades qualitativas.

Definição 1 x_0 é ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, se $f(x_0) = 0$.

Teorema 2 [2, Teorema 1.1] Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e $p \in D$.

(i) Então, o problema do valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = p$$

tem solução única.

(ii) Se $x(t)$ permanecer em um conjunto compacto (fechado e limitado) de D quanto t aumentar (e diminuir), então $x(t)$ estará definido para $t_0 \leq t < \infty$ (respectivamente, para $-\infty < t \leq t_0$).

As equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ com as quais trabalharemos terão sempre funções f continuamente diferenciáveis, portanto o Teorema 2 sempre se aplicará.

Definição 3 Denominamos fluxo qualquer família de transformações $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $t \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi_0 = Id$ e

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e cada problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = p \end{cases} \quad (2)$$

tem uma solução única $x(t, p)$ que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, então a família de transformações definidas por

$$\varphi_t(p) = x(t, p) \quad (3)$$

é um fluxo.

Demonstração 1 Dado $s \in \mathbb{R}$, consideremos a função $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$y(t) = x(t + s, p).$$

Note que $y(0) = x(s, p)$ e

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t + s, p) = f(x(t + s, p)) = f(y(t))$$

para $t \in \mathbb{R}$. Assim, $y(t)$ também é solução de (2). Mas como, por hipótese, cada problema de valor inicial tem solução única, podemos inferir que

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, p)),$$

ou seja,

$$x(t + s, p) = x(t, x(s, p)) \quad (4)$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Usando a definição de φ_t dada em (3) em (4), obtemos

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t \circ \varphi_s(p),$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^n$.

Adicionalmente, como $\varphi_0(p) = x(0, p) = p$, concluímos que a família de transformações φ_t é um fluxo.

Definição 5 Se $x(t)$ é uma solução de (1) com intervalo maximal I_x (máximo domínio conexo da solução), então o conjunto $\gamma = \{x(t) : t \in I_x\} \subset D$ diz-se uma órbita do sistema.

Definição 6 Dado $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que

$$\gamma^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^+\}$$

é a semiórbita positiva de x e que:

$$\gamma^-(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^-\}$$

é a semiórbita negativa de x .

Definição 7 Uma órbita $\gamma = \{x(t) : t \in]a, b[\}$ que não é ponto de equilíbrio diz-se:

- periódica se existe $\tau > 0$ tal que $x(t + \tau) = x(t)$, sempre que $t, t + \tau \in]a, b[$;

- homoclínica se existe um ponto de equilíbrio p tal que $x(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow a^+$ e quando $t \rightarrow b^-$;
- heteroclínica se existem pontos de equilíbrios p e q tais que $x(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow a^+$ e $x(t) \rightarrow q$ quando $t \rightarrow b^-$.

Definição 8 Retrato de Fase da equação (1) é obtido representando as órbitas no conjunto D , juntamente com a indicação do sentido de movimento.

Definição 9 Para o sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

a x_j -nuloclina é um conjunto de pontos onde $\dot{x}_j = 0$, ou seja, $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$.

As x_j -nuloclina separa \mathbb{R}^n em uma coleção de regiões nas quais as componentes x_j do campo vetorial apontam na direção positiva ou negativa. A determinação de todas as nuloclina nos permitirá decompor \mathbb{R}^n em uma coleção de conjuntos abertos, em cada um dos quais o campo vetorial apontará em uma certa direção. Cabe observar que as interseções das x_j -nuloclina representam os pontos de equilíbrio do sistema.

Definição 10 Um ponto de equilíbrio x_0 de um sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

é estável quando, para toda vizinhança O de x_0 , existe uma vizinhança O_1 de x_0 tal que toda solução $x(t)$ do sistema autônomo com $x(0) \in O_1$ está definida e contida em O para todo $t \geq 0$. Se, além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$, então x_0 é assintoticamente estável.

Definição 11 Considere o sistema de classe C^1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

associado ao campo vetorial $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$, com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

é a linearização do campo f em x . A matriz $Df(x)$ é chamada matriz Jacobiana.

Se x_0 for um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$, dizemos que

$$\dot{y} = Df(x_0)y$$

é o sistema linearizado aplicado em x_0 .

Definição 12 Um ponto de equilíbrio x_0 é dito hiperbólico se todos os autovalores de Df_{x_0} possuem parte real diferente de zero.

Definição 13 Sejam D_1 e D_2 abertos em \mathbb{R}^n e $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções, tais que os sistemas de equações

$$\dot{x} = f_1(x), \quad \dot{x} = f_2(x),$$

geram fluxos $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Dizemos que f_1 é topologicamente conjugado a f_2 quando existe um homeomorfismo $h : D_1 \rightarrow D_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$$

para todo $x \in D_1$.

A seguir, enunciamos um teorema que sobre determinadas hipóteses garante que um sistema não linear possui o mesmo comportamento de um sistema linearizado em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio.

Teorema 14 (Hartman-Grobman) [3, Teorema 8.2] Suponha que o sistema n -dimensional $\dot{x} = f(x)$ tenha um ponto de equilíbrio x_0 que é hiperbólico. Então, o fluxo do sistema não linear é topologicamente conjugado ao fluxo do sistema linearizado em uma vizinhança de x_0 .

Uma vez que estivermos analisando um sistema autônomo bidimensional de equações diferenciais, uma abordagem natural é encontrar os pontos de equilíbrio do sistema e sabendo que são hiperbólicos calcular as respectivas linearizações para determinar, em cada caso, sua estabilidade. Assim, conforme [3], analisando o traço e o determinante da matriz Jacobiana calculada no ponto de equilíbrio da equação (1), com $A = Df(x_0)$, é possível classificar a estabilidade do ponto de equilíbrio:

- Se $\det(A) < 0$, o ponto de equilíbrio é do tipo sela;
- Se $\det(A) = 0$, então:
 - Para $Tr(A) < 0$, encontramos linhas estáveis;
 - Para $Tr(A) > 0$, encontramos linhas instáveis;
- Se $\det(A) > 0$, então precisamos analisar o traço de A :
 - $Tr(A) > 0$, o ponto de equilíbrio é repulsor;
 - $Tr(A) < 0$, o ponto de equilíbrio é atrator;
 - $Tr(A) = 0$, o ponto de equilíbrio é do tipo centro.

Disso, podemos concluir que pontos de equilíbrio do tipo:

- Atrator e foco atrator são assintoticamente estáveis;
- Centro são estáveis;
- Repulsor e foco repulsor são instáveis.

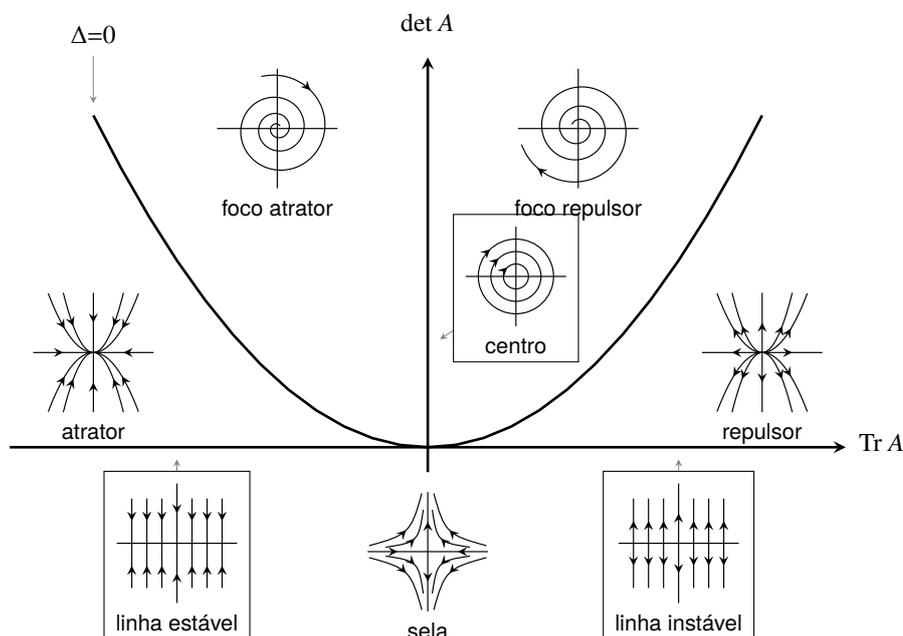


Figura 1: Plano Determinante de Traços

Um resumo visual baseado na figura apresentada em [3] (pag. 64) de todos os diferentes tipos de sistema lineares pode ser analisado na figura (1) onde o plano determinante de traços é apresentado.

Definição 15 Considere a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ em \mathbb{R}^n . Seja $x(t)$ uma solução e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Então, $V(x(t))$ da o valor de V ao longo da solução em função de t . De acordo com a regra da cadeia, a taxa de variação de V ao longo da solução é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x(t))\dot{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x(t))\dot{x}_n(t) \\ &= \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)),\end{aligned}$$

onde $\nabla V(x)$ é o gradiente de V no ponto x e \cdot o produto interno.

Teorema 16 [2, Teorema 2.1] Suponha que sempre que $V(x) = c$ se tenha $\nabla V(x) \neq 0$ e $\dot{V}(x) = 0$. Então, o conjunto $V(x) = c$ é invariante sobre $\dot{x} = f(x)$, ou seja, uma solução de $\dot{x} = f(x)$ que começa no conjunto $V(x) = c$ permanece no conjunto $V(x) = c$.

Nos resultados anteriores nos concentramos nas soluções de equilíbrio de sistemas de equações diferenciais. Mas, existem outros tipos de soluções que são importantes para um sistema. Soluções periódicas ocorrem para $\dot{x} = f(x)$ se temos um ponto x regular (que não é de equilíbrio) e um tempo τ para o qual $\varphi_\tau(x) = x$. Disso, se $\varphi_{\tau+t}(x) = \varphi_t(x)$ para todo t , então φ_t é uma *solução periódica* (órbita periódica) de período τ . Assim como pontos de equilíbrio, soluções periódicas podem atrair outras soluções.

Definição 17 Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k < \infty$, definido no aberto D e $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a órbita de f passando por p e definida no seu intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_-(p) = -\infty$ e $\omega_+(p) = +\infty$, definimos os conjuntos ω -limite e α -limite de p por

- $\omega(p) = \{q \in D : \exists(t_n), \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$;
- $\alpha(p) = \{q \in D : \exists(t_n), \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$.

Teorema 18 (Poincaré-Bendixson) [4, Teorema 7.11] Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 . Para a equação $\dot{x} = f(x)$, se a semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ de um ponto x é limitada e $\omega(x)$ não contém pontos de equilíbrio, então $\omega(x)$ é uma órbita periódica.

A seguir temos um resultado que generaliza o Teorema 18 para o caso em que $\omega(x)$ contém pontos de equilíbrio.

Teorema 19 [4, Teorema 7.15] Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 . Para o sistema (1), se a semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ de um ponto x está contida num compacto onde existe apenas um número finito de pontos de equilíbrio, então temos uma das seguintes alternativas:

- a) $\omega(x)$ é um ponto de equilíbrio;
- b) $\omega(x)$ é uma órbita periódica;
- c) $\omega(x)$ é a união de um número finito de pontos de equilíbrio e órbitas homoclínicas e heteroclínicas.

Em geral, não é possível determinar se um sistema possui órbitas periódicas ou não, mas existem alguns critérios que permitem excluir a existência de órbitas periódicas.

Definição 20 Consideremos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases},$$

com $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, um campo vetorial definido em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. O divergente de f , denotado por $\nabla \cdot f$, é definido por

$$\nabla \cdot f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

Teorema 21 (Critério de Dulac) [5, Teorema 2] Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 . Suponha que

- i) D seja uma região simplesmente conexa em \mathbb{R}^2 ;
- ii) existe uma função $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , sempre positiva em D , tal que $\nabla \cdot gf$ é sempre positivo em D , ou sempre negativo em D .

Então, o sistema $\dot{x} = F(x)$ não possui órbitas periódicas em D .

3 Modelo SIS

Sabe-se que na população humana uma doença infecciosa, como a gripe ou a Covid-19, propaga-se devido à combinação de características patogênicas e ao comportamento humano. As características patogênicas determinam as circunstâncias sob as quais uma pessoa contagiosa pode infectar outra. O comportamento humano determina a frequência com que essas circunstâncias ocorrem.

Um indivíduo infectado pode ser ou não capaz de transmitir a doença; caso seja capaz, é chamado contagioso, infectante ou infeccioso.

Vamos considerar uma doença infecciosa, para a qual ninguém tem, nem ganha imunidade. Como exemplo, podemos citar o resfriado comum.

Consideremos uma população de pessoas de tamanho N (constante), que pode ser dividida em dois compartimentos:

- S - *Suscetíveis*: indivíduos que não possuem a doença e podem contraí-la.
- I - *Infectados*: indivíduos que possuem a doença e podem contaminar outra pessoa.

Um indivíduo suscetível pode contrair a doença de uma pessoa infectada. O indivíduo suscetível torna-se infectado e mantém-se infectado até ficar curado. Posteriormente, o infectado volta a ser suscetível, haja vista que não existe imunidade a essa doença.

Vamos supor que:

- a taxa com a qual os suscetíveis ficam doentes é proporcional ao produto da fração de suscetíveis pela fração de infectados;
- a taxa com a qual os infectados ficam bem é proporcional a fração de infectados.

Seja $S(t)$ a fração da população que é suscetível no instante t e $I(t)$ a fração da população que está infectada no instante t . Temos que $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $S(t) + I(t) = 1$. Por simplicidade, vamos adotar $S(t) = S$ e $I(t) = I$. Podemos entender tal situação no fluxograma abaixo:

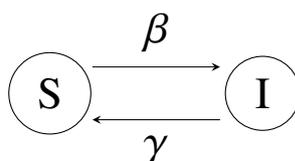


Figura 2: Fluxograma do modelo SIS.

Neste caso, β e γ são constantes de proporcionalidades positivas. Tal modelo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \gamma I \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \quad (5)$$

Somando as equações de (5), obtemos $\dot{S} + \dot{I} = 0$. Assim, se $S + I = 1$ inicialmente, então $S + I = 1$ posteriormente. Isto tem sentido dado que S e I são frações da população.

Além disso, como $S + I = 1$, temos $S = 1 - I$ e reescrevendo a segunda equação de (5), obtemos

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I = \beta(1 - I)I - \gamma I = (\beta - \gamma)I - \beta I^2. \quad (6)$$

3.1 A constante β

Em modelos epidemiológicos, a constante β é chamada coeficiente de transmissão e é a taxa de novas infecções quando todas as pessoas contatadas são suscetíveis. Simbolicamente:

$$\beta = \frac{\text{pessoas contatadas}}{\text{pessoa infectada} \cdot \text{dia}} \cdot \text{probabilidade de transmissão}.$$

Por definição, β é o produto de dois termos, no qual o primeiro depende do modo de vida da população e pode ser mais alto para pessoas que moram na zona urbana, onde indivíduos entram em contato com mais pessoas. Já o segundo é uma propriedade da própria doença, o quão contagiosa ela é. Neste caso, para o modelo (5) a unidade de β é $\frac{1}{\text{dia}}$.

3.2 A constante γ

Sabemos que o fenômeno associado a γ é a recuperação dos infectados. Inicialmente, vamos supor que toda população esteja infectada, ou seja:

$$\dot{I} = -\gamma I, \quad I(0) = 1. \quad (7)$$

A solução da equação acima é $I(t) = e^{-\gamma t}$.

$\dot{I} = -\gamma e^{-\gamma t}$ é a taxa com a qual I varia, sendo negativa por conta das pessoas estarem se curando. Com isso, podemos pensar ao contrário e considerar $-\dot{I} = \gamma e^{-\gamma t}$ como sendo a taxa com a qual as pessoas se curam, que é positiva.

No fim, todos se curam:

$$\int_0^{\infty} -\dot{I} dt = \int_0^{\infty} \gamma e^{-\gamma t} dt = \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dt = \gamma \left(\frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma} \right)_0^{\infty} = -(e^{-\gamma t})_0^{\infty} = 1.$$

Então, pelo valor da integral acima sabemos que $-\dot{I}$ é uma função densidade de probabilidade. Como as pessoas que ficam curadas no tempo t estiveram doentes durante um tempo t , podemos calcular o tempo médio que as pessoas ficam doentes no intervalo $0 \leq t \leq \infty$ que é dado por:

$$\int_0^{\infty} -t \dot{I} dt = \int_0^{\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt = \gamma \left(\int_0^{\infty} t e^{-\gamma t} dt \right) = \frac{\gamma}{\gamma^2} (-\gamma e^{-\gamma t} t - e^{-\gamma t})_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma}.$$

Assim $\frac{1}{\gamma}$ indica o tempo médio que as pessoas ficam doentes. Da mesma forma, a unidade de γ para esse modelo é $\frac{1}{\text{dia}}$.

3.3 Dedução do modelo SIS

Definimos $s(t)$ como o número de indivíduos suscetíveis e $i(t)$ como o número de infectados no instante t , de modo que $s(t) + i(t) = N$.

A taxa de novas infecções na população inteira no instante t é obtida da seguinte forma:

$$\frac{\text{novas pessoas infectadas}}{\text{dia}} = \beta \cdot \frac{s(t)}{N} \cdot i(t).$$

A infecção se alastra a uma taxa proporcional ao produto entre o número das populações de infectados e suscetíveis. Cabe mencionar que essa suposição advém da Lei da Ação das Massas da Química. A taxa com a qual os infectados se recuperam é proporcional a $i(t)$, com constante de proporcionalidade γ . Com isso, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{-\beta}{N}si + \gamma i \\ \dot{i} = \frac{\beta}{N}si - \gamma i \end{cases} \quad (8)$$

Fazendo $s = SN$ e $i = IN$ em (8), obtém-se (5).

3.4 Equilíbrios do modelo SIS

Fazendo $\dot{I} = 0$ em (6), encontramos:

$$(\beta - \gamma)I - \beta I^2 = (\beta - \gamma - \beta I)I = 0,$$

ou seja, $I = 0$ ou $I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ são equilíbrios do modelo.

3.5 Linha de fase

Vamos ver o que se passa com as soluções desenhando a linha de fase do modelo, representada pelo eixo I , com pontos que representam os equilíbrios e setas mostrando onde as soluções crescem e decrescem. O gráfico de (6) é uma parábola e podemos utilizá-lo para desenhar a linha de fase e ter uma melhor visualização da variação de I .

Restringindo nossa linha de fase no intervalo $\mathcal{I} = \{I : 0 \leq I \leq 1\}$, lembrando que γ e β são constantes positivas e reescrevendo (6) como:

$$\dot{I} = (\beta - \gamma - \beta I)I = \beta \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} - I\right) I,$$

vemos que existem dois casos:

- Se $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ não está em \mathcal{I} e todas as soluções em \mathcal{I} tendem a 0 quando $t \rightarrow \infty$, pois $\dot{I} < 0$;
- Se $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ está em \mathcal{I} e interpretamos a linha de fase da seguinte forma:
 - Todas as soluções em \mathcal{I} com $0 < I(0) < 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ tendem a $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ quando $t \rightarrow \infty$, pois $\dot{I} > 0$. Por outro lado, se $t \rightarrow -\infty$, todas as soluções nesse intervalo tendem a 0;
 - Todas as soluções em \mathcal{I} com $1 - \frac{\gamma}{\beta} < I(0) \leq 1$ tendem a $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ quando $t \rightarrow \infty$, pois $\dot{I} < 0$. Por outro lado, se $t \rightarrow -\infty$, todas as soluções nesse intervalo tendem a 1;

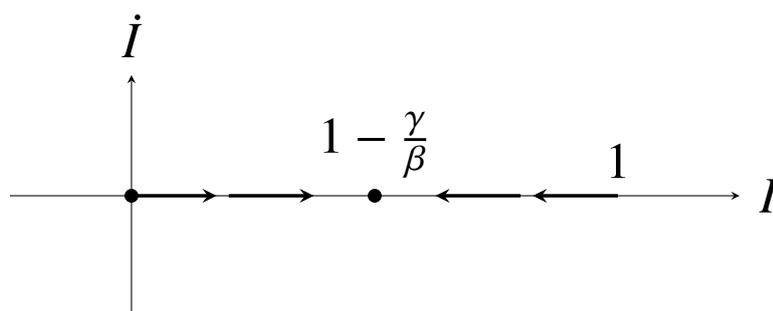


Figura 3: Linha de fase para $\frac{\gamma}{\beta} < 1$.

3.6 O número de reprodução básico R_0

O número básico de reprodução, R_0 , é o número médio de indivíduos infectados por cada indivíduo infectado quando uma doença é introduzida em uma população, pressupondo que todos os indivíduos que se encontram com indivíduos infectados são suscetíveis à doença. No modelo SIS, R_0 representa o número de novas infecções causadas por dia por cada indivíduo infectado vezes o tempo médio de dias que um indivíduo permanece infectado. Desse modo, temos:

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

A seguir, vamos mostrar o comportamento das soluções de (6) em função de R_0 .

Teorema 22 Considerando a equação (6), pode-se atestar que:

- i) Se $R_0 < 1$, o equilíbrio $I = 0$ é um atrator;
- ii) Se $R_0 > 1$, o equilíbrio $I = 0$ é um repulsor, e $I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}$ é um atrator.

Demonstração 2 Seja $\dot{I} = f(I) = (\beta - \gamma)I - \beta I^2$. Utilizando a linearização, temos $f'(I) = \beta - \gamma - 2\beta I$. Podemos verificar que $f'(0) = \beta - \gamma$ e $f'\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) = -(\beta - \gamma)$. Portanto,

- se $R_0 < 1$, então $\beta < \gamma$ e $f'(0) = \beta - \gamma < 0$. Dessa forma, pelo Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 14), o equilíbrio $I = 0$ é um atrator.
- Se $R_0 > 1$, então $\beta > \gamma$ e $f'(0) = \beta - \gamma > 0$. Logo, pelo Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 14), o equilíbrio $I = 0$ é um repulsor. Além disso, $1 - \frac{\gamma}{\beta} \in \mathcal{I}$ e $f'\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) = -(\beta - \gamma) < 0$, de onde segue que o equilíbrio $1 - \frac{\gamma}{\beta}$ é um atrator.

3.7 Soluções do modelo SIS

Para a maioria das equações diferenciais é difícil escrever a forma explícita de suas soluções. No entanto, podemos escrever explicitamente a solução do modelo SIS para entender seu comportamento.

Vamos considerar a equação (6) com $\beta = 2$ e $\gamma = 1$. Assim, $R_0 = \frac{2}{1} = 2 > 1$. Escrevendo $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$, temos:

$$\frac{dI}{dt} = I - 2I^2. \quad (9)$$

No intervalo $0 < I(t) < \frac{1}{2}$, vamos encontrar a solução geral da equação acima usando separação de variáveis e frações parciais. Escolhemos um intervalo onde os argumentos dos logaritmos que vão aparecer são positivos, não necessitando tomar os valores absolutos. Resolvendo (9), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= I - 2I^2 \\ \frac{dI}{I - 2I^2} &= dt \\ \int \frac{dI}{I - 2I^2} &= \int dt \\ \int \frac{dI}{I - 2I^2} &= t + c_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Decompondo o integrando $\frac{1}{I - 2I^2}$ em frações parciais, obtemos

$$\frac{1}{I - 2I^2} = \frac{1}{I(1 - 2I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{1 - 2I} = \frac{A(1 - 2I) + BI}{I(1 - 2I)} = \frac{A - 2AI + BI}{I(1 - 2I)}.$$

Daí, pela igualdade acima

$$I(-2A + B) + A = 1,$$

o que implica $A = 1$ e $B = 2$.

Pelo primeiro membro de (10):

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{I - 2I^2} &= \int \left(\frac{1}{I} + \frac{2}{1 - 2I} \right) dI \\ &= \int \frac{1}{I} dI + \int \frac{2}{1 - 2I} dI \\ &= \ln I - \ln(1 - 2I) + c_2. \end{aligned}$$

Portanto, resolver a equação (10) equivale a resolver a equação

$$\ln I - \ln(1 - 2I) + c_2 = t + c_1,$$

cujas solução é

$$I(t) = \frac{A}{e^{-t} + 2A}, \quad (11)$$

com $A = e^c > 0$ e $c = c_1 - c_2$.

Por substituição na equação diferencial, vamos verificar que todas as funções da forma (11) são soluções do sistema. A constante A é determinada pela condição inicial $I(0) = I_0$. Pois bem, substituindo (11) em (9), temos do lado esquerdo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-A(-e^{-t})}{(e^{-t} + 2A)^2} = \frac{Ae^{-t}}{(e^{-t} + 2A)^2}.$$

Em contrapartida, do lado direito temos

$$\begin{aligned} I - 2I^2 &= \frac{A}{e^{-t} + 2A} - 2 \left(\frac{A}{e^{-t} + 2A} \right)^2 \\ &= \frac{A}{e^{-t} + 2A} - 2 \frac{A^2}{(e^{-t} + 2A)^2} \\ &= \frac{A(e^{-t} + 2A) - 2A^2}{(e^{-t} + 2A)^2} \\ &= \frac{Ae^{-t} + 2A^2 - 2A^2}{(e^{-t} + 2A)^2} \\ &= \frac{Ae^{-t}}{(e^{-t} + 2A)^2}. \end{aligned}$$

Usando a expressão (11), podemos calcular o limite quando o tempo aumenta e retrocede, para ver o que acontece com a solução no intervalo $0 < I(t) < \frac{1}{2}$. Com efeito:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{e^{-t} + 2A} = \frac{A}{2A} = \frac{1}{2}$;
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{A}{e^{-t} + 2A} = 0$.

Esses limites são observados na linha de fase (veja a Figura (3)) do modelo.

3.8 Discussão dos resultados

Estudando o modelo qualitativamente, verificamos que dada uma condição inicial, a doença vai extinguir-se ou o número de infectados poderá tender a uma constante positiva (tornando-se endêmica), dependendo do valor de R_0 . Se $R_0 < 1$ o número de infectados decresce e a doença extingue-se, mas, se $R_0 > 1$, o número de infectados cresce ou decresce (dependendo da condição inicial) até um equilíbrio com $I \neq 0$. Pelos resultados, basta um único indivíduo contrair a doença para que esta se espalhe até o equilíbrio endêmico ser atingido. É claro que na prática devemos pensar na probabilidade de um único indivíduo infectar alguém, podem ser necessários algumas pessoas. Modelos Estocásticos quantificam essa probabilidade da doença se espalhar para um número pequeno desses indivíduos.

Mudanças no comportamento da população interferem diretamente no valor de R_0 , pois podemos controlar o valor de β através de medidas de controle, como o uso de máscaras e quarentena que ajudam a diminuir o número de pessoas contatadas por pessoa infectada.

Exemplos de soluções para diferentes condições iniciais são mostrados nas figuras (4) e (5).

4 Modelo SIR

Consideremos uma doença infecciosa da qual as pessoas se recuperam e ficam com imunidade completa, como exemplo a Hepatite A. Assumindo que a imunidade é permanente e a população é constante, vamos dividi-la em três compartimentos:

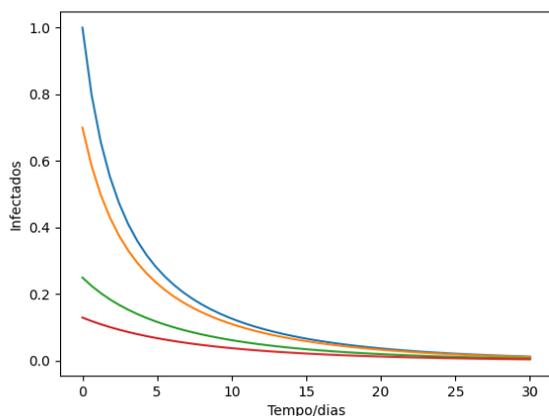


Figura 4: $R_0 < 1$, ($\beta = 0.3$, e $\gamma = 0.4$).

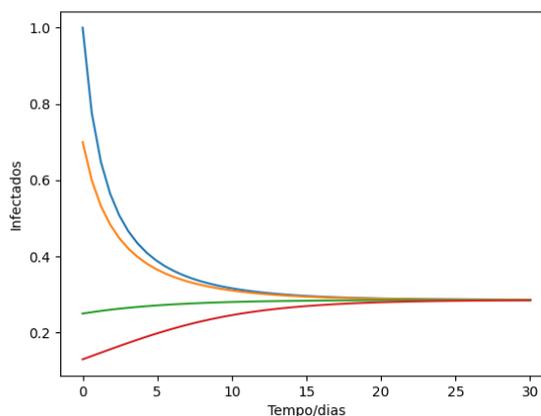


Figura 5: $R_0 > 1$, ($\beta = 0.7$ e $\gamma = 0.5$).

- S - *Suscetíveis*: sem doença e sem imunidade.
- I - *Infectados*: que possuem a doença e são contagiosos.
- R - *Recuperados*: sem a doença e imunes.

Quando alguma fração da população não é suscetível à doença por alguma razão genética, comportamental, imunológica etc, podemos incluir essa fração no compartimento de recuperados desde o início. Vamos representar o fluxograma do modelo SIR da seguinte forma:

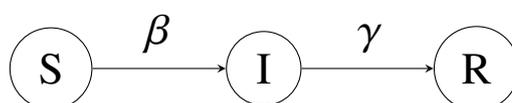


Figura 6: Fluxograma do modelo SIR.

O modelo SIR é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases} \quad (12)$$

As constantes β e γ têm o mesmo significado do modelo SIS. Portanto, podemos definir o número de reprodução básico, R_0 , como anteriormente:

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Temos que $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$ e $R(t) \geq 0$. Somando as três equações de (12), verificamos que $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$, portanto, se inicialmente $S + I + R = 1$, posteriormente a igualdade se mantém. Assim,

podemos reduzir o sistema (12) para duas equações, pois encontramos $R(t)$ por meio da equação $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$. Reescrevendo as equações, encontramos:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (13)$$

Isso faz com que possamos visualizar o retrato de fase do sistema no plano, ajudando-nos a entender o comportamento das soluções.

4.1 Retrato de fase

Vamos restringir o retrato de fase do sistema ao triângulo

$$\Delta = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\},$$

que é a nossa região de interesse. Para desenhar o retrato de fase, vamos utilizar as nulóclinas do sistema. Note que

- se $\dot{S} = 0$, então $S = 0$ ou $I = 0$;
- se $\dot{I} = 0$, então $S = \frac{\gamma}{\beta}$ ou $I = 0$.

Quando as taxas são nulas simultaneamente, encontramos os pontos de equilíbrio do sistema. Com isso, para $\dot{S} = \dot{I} = 0$, concluímos que a reta $I = 0$ representa os equilíbrios do modelo (13).

As nulóclinas dividem o plano em regiões abertas nas quais \dot{S} e \dot{I} têm sinal constante. Os sinais em cada região vão determinar em que quadrante os vetores se encontram. Para observar o comportamento do sistema, vamos reescrever (13) como:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \left(S - \frac{\gamma}{\beta}\right) I \beta \end{cases} \quad .$$

Considerando o espaço de fase Δ , há dois casos $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1$ e $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$. No primeiro caso, $\frac{\gamma}{\beta} > 1$ e no segundo $\frac{\gamma}{\beta} < 1$.

Para $\frac{\gamma}{\beta} > 1$, observamos que

- se $I > 0$ e $S = 0$, então $\dot{I} < 0$ e $\dot{S} = 0$;
- se $I > 0$ e $S > 0$, então $\dot{I} < 0$ e $\dot{S} < 0$.

Agora, considerando $\frac{\gamma}{\beta} < 1$, vemos que

- se $I > 0$ e $S = 0$, então $\dot{I} < 0$ e $\dot{S} = 0$;
- se $I > 0$ e $0 < S < \frac{\gamma}{\beta}$, então $\dot{I} < 0$ e $\dot{S} < 0$;

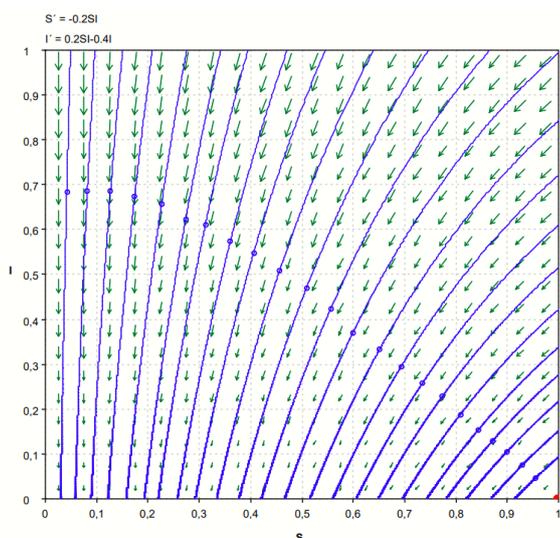


Figura 7: $R_0 < 1$, ($\gamma = 0.4$ e $\beta = 0.2$)

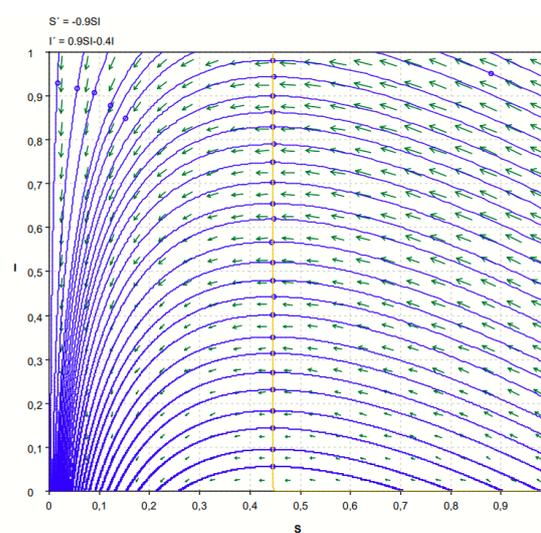


Figura 8: $R_0 > 1$, ($\gamma = 0.4$ e $\beta = 0.9$)

- se $I > 0$ e $\frac{\gamma}{\beta} < S \leq 1$, então $\dot{I} > 0$ e $\dot{S} < 0$.

Analisemos o campo vetorial de (13) para $R_0 < 1$ e $R_0 > 1$.

- Se $R_0 < 1$, todas as soluções (S, I) que começam em $\Delta^+ = \{(S, I) : S > 0, I > 0, S + I \leq 1\}$ tendem a linha de equilíbrio $I = 0$.
- Se $R_0 > 1$, Δ^+ é dividido em dois pela nulóclina $S = \frac{\gamma}{\beta}$. Podemos verificar que
 - se $S > \frac{\gamma}{\beta}$, a fração de infectados cresce e a de suscetíveis decresce;
 - se $S < \frac{\gamma}{\beta}$, a fração de infectados e suscetíveis decresce.

Podemos verificar o comportamento descrito acima nas Figuras (7) e (8).

4.2 Órbitas do modelo SIR

O comportamento de soluções próximas ao equilíbrio $(S, 0)$ é provado analiticamente neste caso, pois podemos calcular explicitamente uma função que é constante ao longo das curvas de solução. Inicialmente, escrevemos (13) como:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (14)$$

Observe que a inclinação do campo vetorial do espaço SI é encontrada dividindo a segunda equação de (14) pela primeira:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}. \quad (15)$$

Integrando ambos os lados de (15), encontramos:

$$I = I(S) = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Aqui, encontramos uma função que é constante ao longo das curvas de solução. As funções encontradas em (16) são chamadas curvas invariantes, pois uma solução que começa na curva permanece nela. Neste caso, as curvas invariantes são uniões das órbitas do modelo (13). Portanto, existe uma única curva conectando cada ponto de equilíbrio no intervalo $\frac{\gamma}{\beta} < S < 1$ a um equilíbrio no intervalo $0 < S < \frac{\gamma}{\beta}$.

4.3 Discussão dos resultados

Estudando qualitativamente o modelo, para $R_0 < 1$ todas as soluções do sistema tendem a linha estável de equilíbrio $I = 0$.

Se $R_0 > 1$, vamos supor que uma epidemia comece num estado populacional $(S, I) = (S_1, 0)$, com $\frac{\gamma}{\beta} < S_1 \leq 1$. S_1 é a fração inicial de suscetíveis. Quando a doença é introduzida, I se torna ligeiramente positivo, digamos I_1 , fazendo com que o número de infectados aumente e o número de suscetíveis diminua. Com o tempo, o número de suscetíveis se torna $\frac{\gamma}{\beta}$ e posteriormente cai abaixo desse valor. A fração populacional recuperada mais infectada quando $S = \frac{\gamma}{\beta}$ é chamada Imunidade de Rebanho e definida por:

$$R + I = 1 - \frac{\gamma}{\beta}.$$

Quando essa fração populacional já não é mais suscetível a doença, ela começa a extinguir-se. A partir daí, o número de suscetíveis cai abaixo de $\frac{\gamma}{\beta}$ e o número de infectados começa a cair também.

No final da epidemia, a fração da população suscetível é S_2 , com $0 < S_2 < \frac{\gamma}{\beta}$.

A figura (9) ilustra o comportamento descrito acima para $S_1 = 0.93$.

Analiticamente, se a curva (16) passa por $(S_1, 0)$, então:

$$\begin{aligned} 0 &= -S_1 + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_1 + c \\ c &= S_1 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_1. \end{aligned}$$

Como a curva também passa por $(S_2, 0)$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= -S_2 + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_2 + c \\ 0 &= -S_2 + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_2 + S_1 - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_1 \\ 0 &= -(S_2 - S_1) + \frac{\gamma}{\beta} (\ln S_2 - \ln S_1) = F(S_2). \end{aligned}$$

Logo, dado S_1 também podemos encontrar o valor de S_2 pela equação acima.

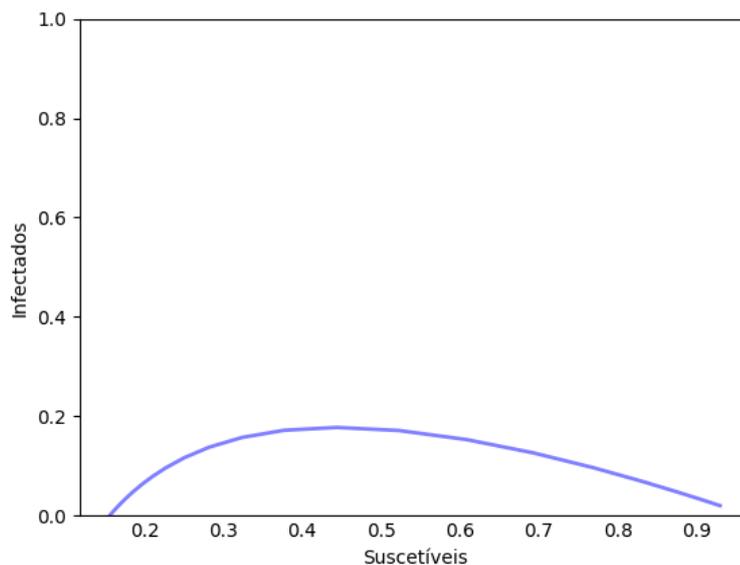


Figura 9: Uma órbita do modelo SIR

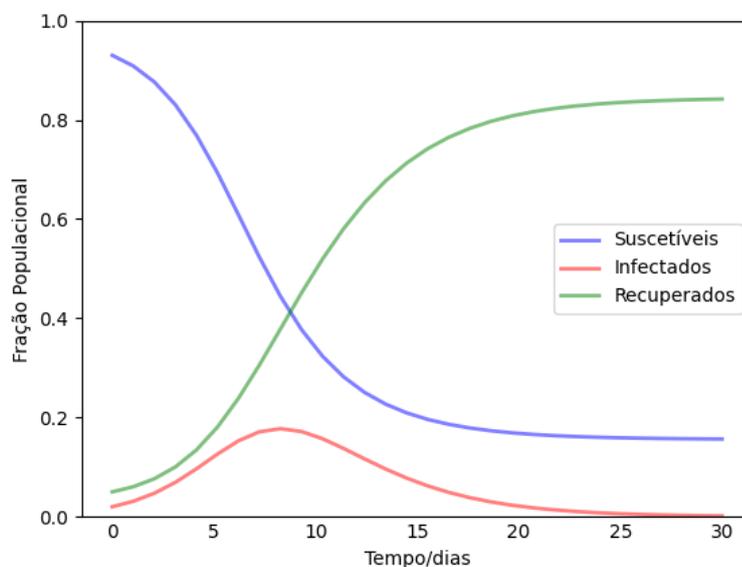


Figura 10: Variação de S , I e R do modelo SIR

Verifiquemos o comportamento das frações populacionais para $R_0 > 1$ com $\beta = 0.9$ e $\gamma = 0.4$ sob a condição inicial $(S, I, R) = (0.93, 0.02, 0.05)$, lembrando que R inicial contém a fração da população imune a doença por questões genéticas, imunológicas, etc. Pela figura (10), o valor de saída para a fração de suscetíveis é de $S_2 \approx 0,18$. Além disso, a imunidade de rebanho é dada por $1 - \frac{0.4}{0.9} \approx 0.55$. Quando $S = \frac{0.4}{0.9} \approx 0.45$, se repararmos na curva de I ela atinge seu pico e começa a cair. Neste caso, a vacinação é uma ótima medida de controle para controlar o número de infectados

de doenças modeladas pelo sistema (12), pois a fração de suscetíveis diminui e por consequência a imunidade de rebanho é atingida.

5 Modelo SIR com perda de imunidade

Consideremos uma doença infecciosa para a qual a imunidade pode ser perdida com o tempo, como exemplo podemos citar a Influenza A(H1N1). Neste capítulo, vamos utilizar o modelo SIR com alguns termos adicionais:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \rho R \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I - \rho R \end{cases} . \quad (17)$$

O fluxograma do modelo está representado abaixo:

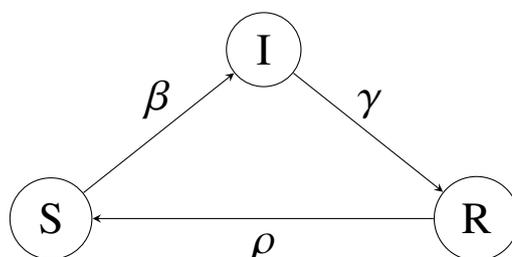


Figura 11: Fluxograma do modelo SIR com perda de imunidade.

Os novos termos indicam que os indivíduos se transferem do compartimento R (onde estão imunes) para o compartimento S a uma taxa proporcional a R . Aqui, $\frac{1}{\rho}$ representa o tempo médio antes da perda de imunidade.

É fácil verificar que $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$. Então, se $S + I + R = 1$ inicialmente, teremos $S + I + R$ sempre igual a 1. Logo, vamos reduzir o modelo para duas equações e obter $R(t)$ de $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$. Reescrevendo (17), temos

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI + \rho(1 - S - I) \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \end{cases} . \quad (18)$$

Assim como nos modelos SIS e SIR, definimos:

$$R_0 = \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

5.1 Retrato de fase

Vamos restringir o retrato de fase do sistema (18) ao triângulo

$$\Delta = \{(S, I) : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq 1\},$$

que é o nosso espaço de fase.

Começemos por encontrar as nulóclinas de (18). Temos:

- $\dot{S} = 0$ quando $I = \frac{\rho - \rho S}{\rho + \beta S}$;
- $\dot{I} = 0$ quando $I = 0$ ou $S = \frac{\gamma}{\beta}$.

No primeiro caso temos uma hipérbole com dois ramos, já no segundo, duas retas.

Há pontos de equilíbrio onde as nulóclinas se intersectam, ou seja, quando $\dot{S} = \dot{I} = 0$. Com isso, identificamos que $(1, 0)$ e $\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$ são equilíbrios do sistema.

Como estamos interessados na região Δ , devemos considerar $R_0 < 1$ com $\frac{\gamma}{\beta} > 1$ e $R_0 > 1$ com $\frac{\gamma}{\beta} < 1$.

Vamos analisar o campo vetorial de (18) para $R_0 < 1$ e $R_0 > 1$, respectivamente.

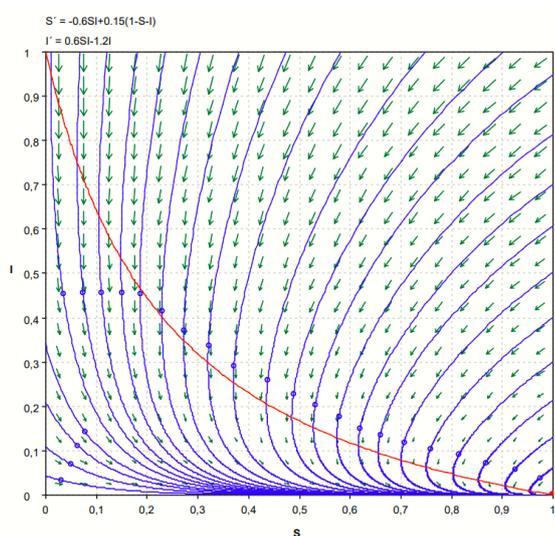


Figura 12: $\beta = 0.6$, $\gamma = 1.2$ e $\rho = 0.15$.

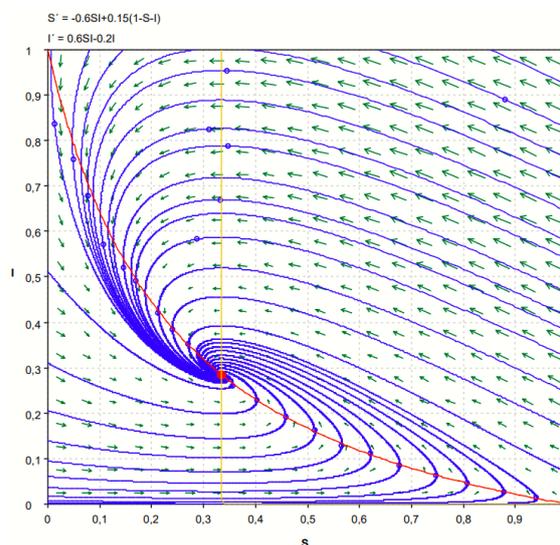


Figura 13: $\beta = 0.6$, $\gamma = 0.2$ e $\rho = 0.15$.

- Para o caso em que $R_0 < 1$, todas as soluções tem $\dot{I} < 0$ para $I > 0$. Todas estão tendendo para o equilíbrio $(1, 0)$. Neste caso, o equilíbrio $\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$ não está em Δ , pois $\frac{\gamma}{\beta} > 1$.
- Para o caso em que $R_0 > 1$, as soluções circulam em torno do equilíbrio $\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$ espiralando em direção a ele.

Vamos verificar, a seguir, a veracidade das últimas afirmações.

5.2 Equilíbrios do modelo SIR com perda de imunidade

Inicialmente, analisemos a estabilidade do ponto de equilíbrio $(1, 0)$ para o caso de $R_0 < 1$ e $R_0 > 1$.

Teorema 23 *O ponto de equilíbrio $(1, 0)$ do sistema (18) é do tipo*

i) Atrator, quando $R_0 < 1$;

ii) Sela, quando $R_0 > 1$.

Demonstração 3 Para o modelo SIR com perda de imunidade, a matriz de linearização é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - \rho & -\beta S - \rho \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Substituindo $(S, I) = (1, 0)$ em (19):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & -\beta - \rho \\ 0 & \beta - \gamma \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Os autovalores da matriz (20) são $\lambda_1 = -\rho$ e $\lambda_2 = \beta - \gamma$. Temos que λ_1 é negativo. Já λ_2 é negativo quando $R_0 < 1$, pois $\beta < \gamma$, e positivo se $R_0 > 1$, pois $\beta > \gamma$. Portanto, $(1, 0)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico e pelo teorema de Hartman-Grobman (Teorema 14), é atrator quando $R_0 < 1$ e sela quando $R_0 > 1$.

Agora, estudemos a estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico.

Teorema 24 O ponto de equilíbrio $\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$ do sistema (18) é atrator quando $R_0 > 1$.

Demonstração 4 Em $(S, I) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$, a matriz de linearização é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} - \rho & -\gamma - \rho \\ \rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Pelo plano determinante de traços, sabemos que a soma dos autovalores é o traço da matriz e a multiplicação dos autovalores o determinante. Assim, tem-se:

$$\text{tr} \begin{bmatrix} -\rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} - \rho & -\gamma - \rho \\ \rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} & 0 \end{bmatrix} = -\rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} - \rho \quad (22)$$

e

$$\det \begin{bmatrix} -\rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} - \rho & -\gamma - \rho \\ \rho \frac{\beta - \gamma}{\rho + \gamma} & 0 \end{bmatrix} = \rho(\beta - \gamma). \quad (23)$$

Se $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} > 1$, por (22) e (23) vemos que $\text{tr} < 0$ e $\det > 0$. Com isso:

- λ_1 e λ_2 são ambos negativos e pelo teorema de Hartman-Grobman (Teorema 14), o ponto de equilíbrio é atrator;
- λ_1 e λ_2 são um par conjugado complexo $\alpha \pm i\beta$, com $\alpha < 0$, e portanto, pelo teorema de Hartman-Grobman (Teorema 14), o ponto de equilíbrio representa um foco atrator.

Os teoremas acima fornecem informações sobre o comportamento das soluções do sistema (18) próximas a seus pontos de equilíbrio. Contudo, podemos analisar se mais soluções definidas em $\Delta^+ = \{(S, I) : S > 0, I > 0, S + I \leq 1\}$ possuem comportamento similar. É o que faremos na próxima seção.

5.3 Estabilidade global do modelo SIR com perda de imunidade

O triângulo Δ é um subconjunto fechado e limitado do plano. Para o sistema (18), as soluções que começam em Δ permanecem em Δ . Para ver isso, basta verificar se as soluções não podem escapar dos limites.

Uma solução que começa em $S + I = 1$ aponta para dentro de Δ . Para constatar esse fato, considere a função $V(S, I) = S + I$ e escreva o sistema (18) na forma vetorial

$$(\dot{S}, \dot{I}) = F(S, I) = (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I),$$

e calcule \dot{V} :

$$\begin{aligned} \nabla V(S, I) \cdot F(S, I) &= (1, 1) \cdot (-\beta SI + \rho(1 - S - I), \beta SI - \gamma I) \\ &= -\beta SI + \rho(1 - S - I) + \beta SI - \gamma I \\ &= \rho(1 - S - I) - \gamma I \\ &= -\rho(S + I - 1) - \gamma I \\ &= -\gamma I < 0, \text{ se } I > 0. \end{aligned}$$

Assim, a taxa de variação de $V(S, I)$ ao longo das soluções do sistema SIR diminui na região $I > 0$. Portanto, se uma solução começar em Δ^+ com $S + I = 1$, então $S + I$ vai diminuir imediatamente e a solução entrará em Δ .

Para o caso $I = 0$ (respectivamente $S = 0$), podemos considerar $V(S, I) = I$ (respectivamente $V(S, I) = S$) e pelo Teorema 16, $I = 0$ e $S = 0$ são invariantes, ou seja, qualquer solução que comece em $I = 0$ (respectivamente em $S = 0$) permanecerá em $I = 0$ (respectivamente em $S = 0$).

A seguir temos um resultado que nos garante a não existência de órbita periódica em Δ^+ .

Teorema 25 *O sistema (18) não possui órbita periódica.*

Demonstração 5 *Consideremos a função $g(S, I) = \frac{1}{I}$, para $I > 0$. Multiplicando o segundo membro das equações do sistema (18) por $g(S, I)$, encontramos:*

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S + \frac{\rho}{I}(1 - S - I) \\ \dot{I} = \beta S - \gamma \end{cases} \quad (24)$$

A divergência de (24) é dada por:

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial S}(S, I) + \frac{\partial \dot{I}}{\partial I}(S, I) = -\beta - \frac{\rho}{I},$$

que é negativa para $I > 0$. Logo, pelo critério de Dulac (Teorema 21), o sistema (18) não possui órbitas periódicas em Δ^+ .

Então, pela definição (7) não existem soluções homoclínicas e heteroclínicas e pelo teorema 19:

- todas as soluções do sistema (18) em Δ^+ se aproximam do equilíbrio $(1, 0)$, quando $R_0 < 1$ e $t \rightarrow \infty$;
- todas as soluções do sistema (18) em Δ^+ se aproximam do equilíbrio $\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\rho(\beta - \gamma)}{\beta(\rho + \gamma)}\right)$, quando $R_0 > 1$ e $t \rightarrow \infty$.

5.4 Discussão dos resultados

Analisando qualitativamente o sistema, foi estudado a estabilidade dos equilíbrios do modelo e o comportamento local (próximo aos pontos de equilíbrio) e global das soluções. Pensando no número de reprodução básico, se $R_0 < 1$ todas as soluções do sistema se aproximam do equilíbrio trivial $(1, 0)$ que é um atrator global. Para $R_0 > 1$, o ponto de equilíbrio endêmico existe e é globalmente assintoticamente estável. Isso indica que quando o coeficiente de transmissão β da doença é alto, o modelo epidemiológico tende a um valor constante de infectados $I > 0$ e a doença persiste na população. Por outro lado, se β for pequeno o suficiente para que $\beta < \gamma$, independente da condição inicial, o número de infectados cai até $I = 0$ e a doença desaparece. Na Figura 14, ilustramos o comportamento das frações populacionais para $R_0 > 1$, com $\beta = 0.6$, $\gamma = 0.2$ e $\rho = 0.15$, sob a condição inicial $(S, I, R) = (0.9, 0.02, 0.07)$.

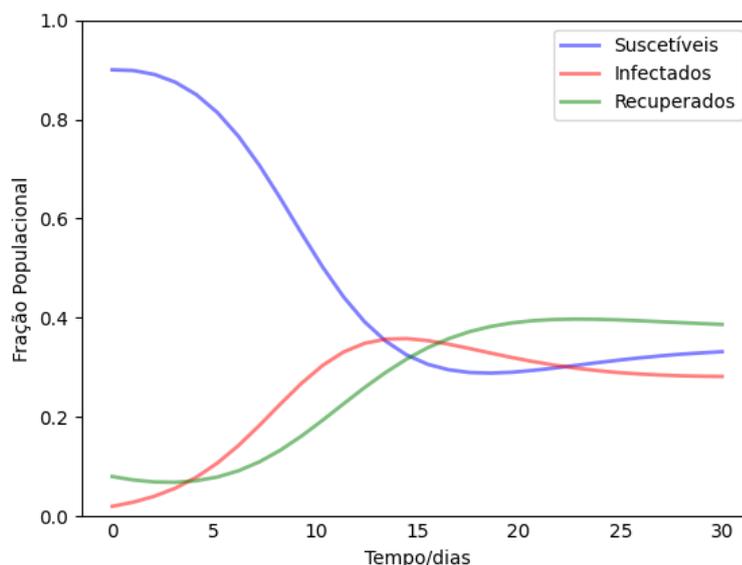


Figura 14: Variação de S , I e R do modelo SIR com perda de imunidade

Podemos observar que a fração de infectados depois de certo tempo se torna constante em $I \approx 0.3$.

6 Conclusão

A teoria qualitativa nos permitiu estudar o comportamento de três sistemas epidemiológicos de dinâmica populacional propostos por [2]. Cada um possui suas características próprias, e diante disso, utilizamos resultados e ferramentas diversas. Através da análise da estabilidade dos equilíbrios, encontramos o comportamento local próximos a esses pontos e global das soluções, além de mostrar a não existência de órbitas periódicas quando necessário. Utilizamos o Número Básico de Reprodução R_0 para avaliar a intensidade de transmissão de uma doença. Esse valor determina se epidemias se espalharão ou serão erradicadas no decorrer do tempo.

Referências

- [1] KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 115, n.772, p. 700-721, 1927.
- [2] LÓPEZ-FLORES, M. M.; MARCHESIN, D.; MATOS, V.; SCHECTER, S. **Equações diferenciais e modelos epidemiológicos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2021.
- [3] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 2015.
- [4] BARREIRA, L.; VALLS, C. **Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, c2012.
- [5] PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**. 3rd ed. New York: Springer, 2001.