Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Iniciação Científica

**João Calixto Garcia**
Colégio Gradual
Cerquilho, SP
klixg@yahoo.com.br.

# O trapézio e suas bases intermediárias

The trapezium and its intermediate bases

**Resumo**

Entre as diversas propriedades que os trapézios possuem, estudamos algumas que envolvem suas bases intermediárias, em particular, as que têm como medidas as médias clássicas das medidas de suas bases. O objetivo desse trabalho consiste em explorar tais bases sob três enfoques, destacando o valor didático que trazem consigo: o geométrico (pela natureza do objeto de estudo e pelas construções geométricas efetuadas), o algébrico (na criação de sequências numéricas de suas medidas) e o aritmético (com a obtenção de medidas inteiras).

**Palavras-chave:** Trapézio. Bases intermediárias. Médias. Construções geométricas. Sequências numéricas. Medidas inteiras.

**Abstract**

Among the various properties that trapeziums have, we studied some that involve their intermediate bases, in particular, those that have as measures the classical averages of the measures of their bases. The objective of this work is to explore such bases under three approaches, highlighting the didactic value they bring with them: the geometric (by to the nature of the object of study and the geometric constructions made), the algebraic (in the creation of numerical sequences of its measures) and the arithmetic (with obtaining integer measures).

**Keywords:** Trapezium. Intermediate bases. Averages. Geometric constructions. Numerical sequences. Integer measures.

Artigo recebido em nov. 2022 e aceito em abr. 2023

# 1 Introdução

Quando tratamos sobre trapézios na escola, é comum darmos especial atenção à *base média*, destacando a peculiaridade de sua medida e explorando aplicações decorrentes de suas propriedades. Ao considerarmos outras bases intermediárias, também notáveis, diversas questões igualmente interessantes se fazem presentes, compreendendo assuntos como médias, construções geométricas, regularidades numéricas, além de números inteiros.

Neste texto são apresentadas relações entre medidas em trapézios envolvendo suas bases bem como as alturas e as áreas dos trapézios determinados por certa base intermediária. Também, são efetuadas construções geométricas e estudadas as sequências numéricas que as medidas de tais bases, alturas e áreas podem gerar. Por fim, buscamos por valores inteiros de medidas das bases de um trapézio, juntamente com as de certas bases intermediárias especiais.

# 2 Base intermediária, alturas e áreas de trapézios

Dado um trapézio com bases medindo $a$ e $b$ ($a < b$) e uma base intermediária de medida $m$, vamos construir uma relação entre $m$ e as medidas $A$ e $B$ das áreas dos trapézios separados por tal base intermediária. Além disso, a partir dessa relação, vamos obter expressões para as razões entre $A$ e $B$ e entre as medidas das respectivas alturas $h_1$ e $h_2$ dos trapézios com tais áreas.

Na *figura 1*, sendo $S$ a área do triângulo de base $a$, de semelhança entre triângulos, temos:

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{A+S}{S} = \frac{A}{S}+1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{A+B+S}{S} = \frac{A+B}{S}+1$$

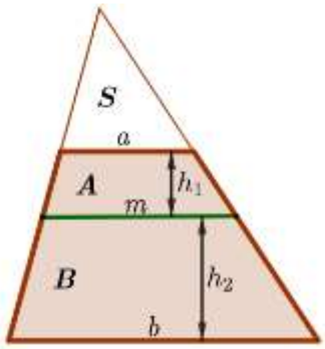


**Figura 1** – Ilustração de apoio à obtenção da base intermediária de medida $m$.

Eliminando $S$, obtemos: $m^2 = \dfrac{Ab^2 + Ba^2}{A+B}$ (*) , ou , $\dfrac{A}{B} = \dfrac{m^2 - a^2}{b^2 - m^2}$ (**).

Ainda, por meio de fórmulas de área (ou de semelhança entre triângulos), não é difícil chegarmos também à razão: $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{m-a}{b-m}$ (***).

A expressão (*) diz que a medida da base intermediária de um trapézio é *média quadrática ponderada* entre as medidas das bases deste, sendo $A$ e $B$ os pesos dessa média.

Considerando as bases intermediárias $m$ como médias clássicas entre as bases $a$ e $b$, a partir das expressões (**) e (***), mediante manipulação algébrica ou com aplicação de propriedades geométricas, calcula-se, sem dificuldades, as razões entre as medidas das alturas e das áreas dos referidos pares de trapézios. Organizamos essas informações na *tabela 1*:

**Tabela 1** – Razões entre alturas e áreas envolvendo bases intermediárias especiais**.**

| **base intermediária** $m$ (***descrição da média***) | $r = \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{m-a}{b-m}$ | $\rho = \dfrac{A}{B} = \dfrac{m^2-a^2}{b^2-m^2}$ |
|---|---|---|
| $m_A = \dfrac{a+b}{2}$ (*média aritmética*) | $r_A = 1$ | $\rho_A = \dfrac{3a+b}{3b+a}$ |
| $m_G = \sqrt{ab}$ (*média geométrica*) | $r_G = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ | $\rho_G = \dfrac{a}{b}$ |
| $m_H = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ (*média harmônica*) | $r_H = \dfrac{a}{b}$ | $\rho_H = \dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{3b+a}{3a+b}$ |
| $m_Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (*média quadrática*) | $r_Q = \dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}-a+b}{a+b}$ | $\rho_Q = 1$ |

## 2.1 Apontamentos

● As razões $r_G$ e $\rho_G$ indicam que a base de medida $m_G$, divide trapézios em dois semelhantes. Já $\rho_Q$ atesta que a base de medida $m_Q$, divide trapézios em dois de mesmas áreas.

● Há uma propriedade entre as médias que também é válida para $r$ e $\rho$. Trata-se da relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica: a média geométrica entre dois reais positivos coincide com a média geométrica entre suas médias aritmética e harmônica. É verdade, então, que $m_G = \sqrt{m_A \cdot m_H}$ , assim como $r_G = \sqrt{r_A \cdot r_H}$ e $\rho_G = \sqrt{\rho_A \cdot \rho_H}$ .

● A *figura 2* ilustra um trapézio com suas bases intermediárias especiais, evidenciando um fato consagrado sobre as desigualdades entre as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática. Um estudo aprofundado desse tema encontra-se em [1].

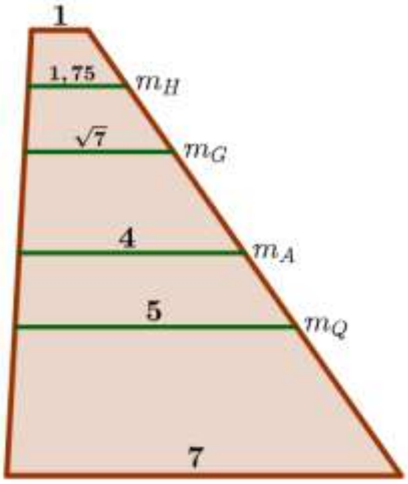


**Figura 2** – Comparativo entre medidas de bases intermediárias como médias clássicas das medidas das bases de um trapézio dado.

# 3 Construção geométrica de bases intermediárias em trapézios

A *figura 3* exibe os passos para a construção da base intermediária em um trapézio, conhecida sua medida $m$. Basta observar que: no passo 1, $AE = m$; no passo 2, $EF // AD$; no passo 3, $FG // AB$ e, no passo 4, por $AEFG$ ser paralelogramo, $GF = m$.

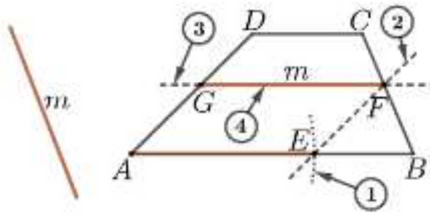


**Figura 3** – **"**Transporte" do segmento de medida *m* como base intermediária em um trapézio dado.

A seguir são expostos, em passos, construções geométricas das bases intermediárias em certo trapézio, com medidas $m_A$, $m_G$, $m_H$ e $m_Q$, tais como descritas na *tabela 1*. Fundamentos teóricos e técnicas utilizadas nas construções são encontrados em [2].

## 3.1 Construção geométrica da base de medida $m_A$

Mais simples que construir a *base média* via média aritmética das medidas das bases do trapézio, é efetuar sua construção a partir de suas extremidades, pontos médios dos lados não paralelos, como ilustra a *figura 4*. Trata-se de acepções equivalentes, de fácil comprovação.

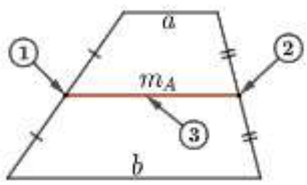


**Figura 4** – Construção geométrica da *base média* a partir de suas extremidades.

## 3.2 Construção geométrica da base de medida $m_G$

Na *figura 5*, temos $BD \perp AB$, com $D$ pertencente à semicircunferência de diâmetro $AC$ medindo $a + b$, sendo $AB = a$ e $BC = b$. Da relação métrica $BD^2 = ab$, no triângulo retângulo $ADC$, conclui-se que $BD = \sqrt{ab}$ . Finaliza-se a construção com os passos exibidos na *figura 3*.

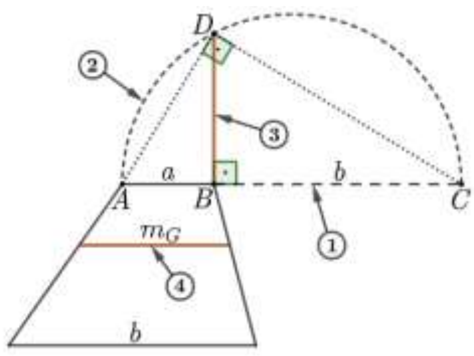

**Figura 5** – Construção geométrica da base de medida $m_G$.

## 3.3 Construção geométrica da base de medida $m_H$

Consideremos a base intermediária à qual pertence o ponto comum das diagonais de um trapézio. Tal ponto é médio dessa base intermediária, e mais: a medida desta é igual à média harmônica das medidas das bases desse trapézio. De fato, na *figura 6*, verifica-se, pela semelhança entre os triângulos *ABD* e *EGD* e entre os triângulos *ABC* e *GFC*, que $\frac{h_1 + h_2}{h_2} = \frac{a}{x} = \frac{a}{y}$, isto é, que $x = y$. Já, da semelhança entre os triângulos *ABG* e *CDG*, temos $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$, equivalente a $\frac{h_1 + h_2}{h_2} = \frac{a+b}{b}$. Com isso: $\frac{a}{x} = \frac{a+b}{b}$, de onde se chega à medida $EF = 2x = \frac{2ab}{a+b}$, média harmônica entre *a* e *b*.

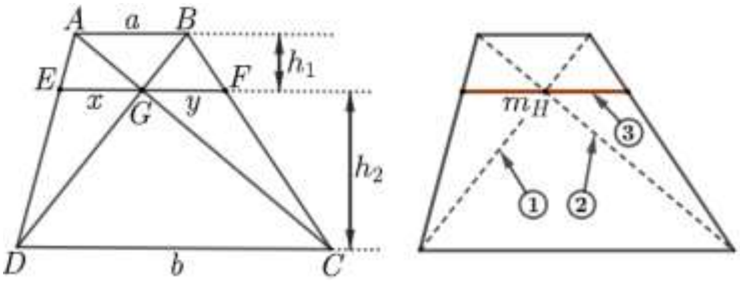


**Figura 6** – Obtenção e construção geométrica da base de medida $m_H$.

A construção da base intermediária em questão é efetivada em face dos resultados vistos acima, resumindo-se, portanto, ao traçado das diagonais e da paralela às bases, da qual faz parte a intersecção daquelas diagonais.

## 3.4 Construção geométrica da base de medida $m_Q$

A *figura 7* mostra os passos para a construção da base de medida $m_Q$ de um trapézio dado.

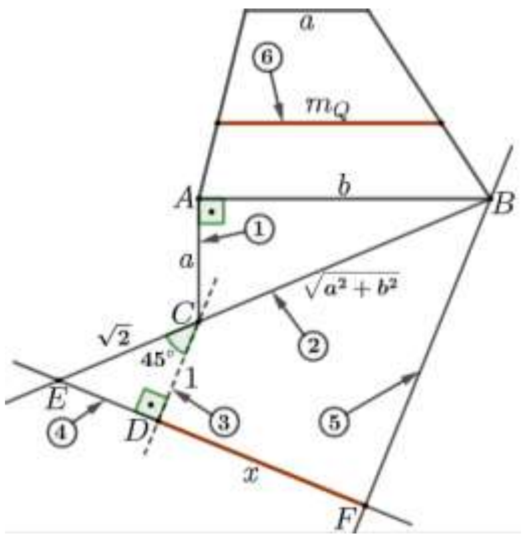

**Figura 7** – Construção geométrica da base de medida $m_Q$.

A medida $x = m_Q$, é a quarta proporcional entre as medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ e 1 de outros três segmentos, já que $m_Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Nos dois primeiros passos, obtemos $BC = \sqrt{a^2+b^2}$ do triângulo retângulo *ABC* ali construído. No passo 3 é construído o segmento unitário *CD* em 45° com o prolongamento do segmento *BC*. No passo 4 traça-se por *D* uma perpendicular a *CD*, determinando o ponto *E*, comum com a reta *BC*. Dessa construção, tem-se $DE = 1$ e $CE = \sqrt{2}$. No passo 5 traça-se a reta à qual pertence *B*, paralela à reta C*D*, que determina o ponto *F* de intersecção com a reta *DE*. Do teorema de Tales: $DF = m_Q$. A última passagem refere-se ao "transporte" de *DF*, tal como apresentado na *figura 3*.

# 4 Sequências de medidas de bases, de alturas e de áreas

Por meio de prolongamento dos lados não paralelos de um trapézio, ao se prosseguir com a construção de bases com respeito a certa média, criamos uma coleção de medidas de bases, de alturas e de áreas. Seguem abaixo resultados dessa abordagem.

## 4.1 Bases, alturas e áreas com medidas em progressão aritmética

É progressão aritmética a sequência de medidas das bases $b_1$, $b_2$, $b_3$, … da sucessão de trapézios presentes na *figura 8*, à esquerda, em que a sequência $h_1$, $h_2$, $h_3$, … de suas alturas é constante. Assim também ocorre com a sequência das áreas $A_1$, $A_2$, $A_3$,…, ali indicadas. Nesta figura, à direita, está uma ideia para a justificativa visual desses fatos (embora seja igualmente simples comprová-los mais formalmente).

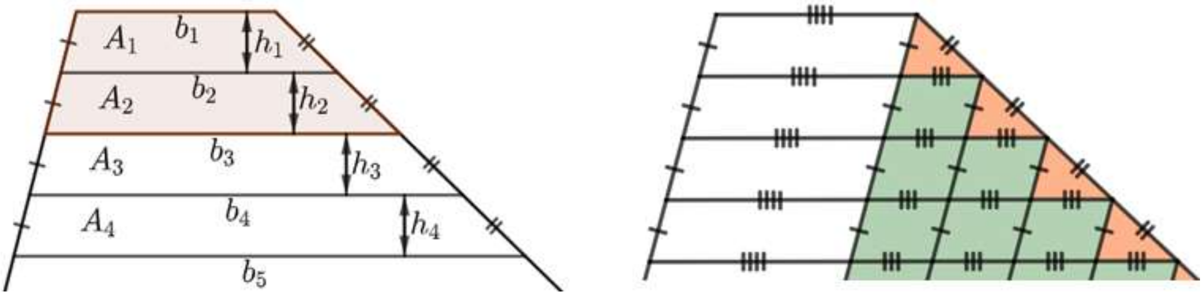


**Figura 8** – Sucessão de trapézios com medidas de bases, alturas e áreas em progressão aritmética.

## 4.2 Bases, alturas e áreas com medidas em progressão geométrica

Se a base intermediária de um trapézio divide-o em dois semelhantes, é claro que sua medida é a média geométrica entre as medidas de suas bases.

Pela natureza da média envolvida, é progressão geométrica a sequência das medidas das bases, $b_1$, $b_2$, $b_3$, …, assim como a das alturas, $h_1$, $h_2$, $h_3$, …, e a das áreas, $A_1$, $A_2$, $A_3$, …, observadas na *figura 9*, onde há uma sucessão de trapézios semelhantes. E, por ser a razão das duas primeiras sequências igual a $\dfrac{b_2}{b_1}$, então, $\left(\dfrac{b_2}{b_1}\right)^2$ é a razão da terceira.

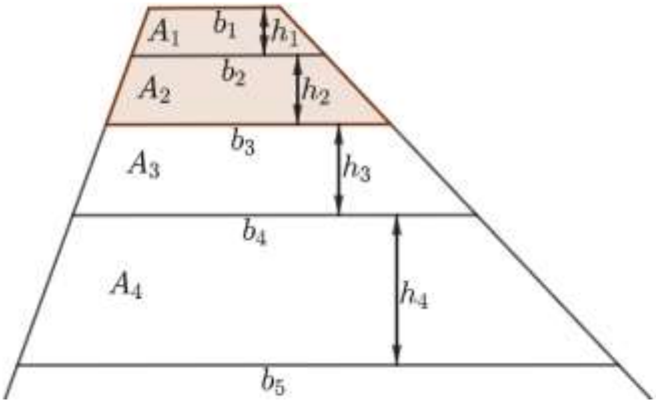


**Figura 9** – Sucessão de trapézios com medidas de bases, alturas e áreas em progressão geométrica.

## 4.3 Bases com medidas em progressão harmônica

O conhecimento dos fatos expostos no *item 3.3* facilita a elaboração da *figura 10*, em que se verifica a chamada *progressão harmônica*: $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , … Nesta sequência, para $k$ inteiro, com $k > 1$, $b_k = \dfrac{2}{\dfrac{1}{b_{k-1}} + \dfrac{1}{b_{k+1}}}$, ou $\dfrac{1}{b_k} = \dfrac{\dfrac{1}{b_{k-1}} + \dfrac{1}{b_{k+1}}}{2}$. Daí, os recíprocos de seus termos, $\dfrac{1}{b_1}, \dfrac{1}{b_2}, \dfrac{1}{b_3}, \ldots$, estão em progressão aritmética. Porém, o mesmo não ocorre com as progressões formadas pelas alturas e pelas áreas, embora existam, ainda que "maljeitosas", afinidades algébricas entre estas e ($b_n$), a saber:

$$h_n = \frac{h_1}{b_1 b_2} \cdot b_n \cdot b_{n+1} \quad \text{e} \quad A_n = \frac{h_1}{2 b_1 b_2} \cdot b_n \cdot b_{n+1} \cdot (b_n + b_{n+1}),$$

onde as constantes $h_1$ , $b_1$ e $b_2$ são, nessa ordem, a altura e as bases do trapézio de área $A_1$.

A primeira é oriunda do produto das igualdades $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{b_1}{b_3}$; $\dfrac{h_2}{h_3} = \dfrac{b_2}{b_4}$; …; $\dfrac{h_{n-1}}{h_n} = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n+1}}$ (provenientes de semelhança entre triângulos), e a segunda, decorre da fórmula da área do $n$-ésimo trapézio.

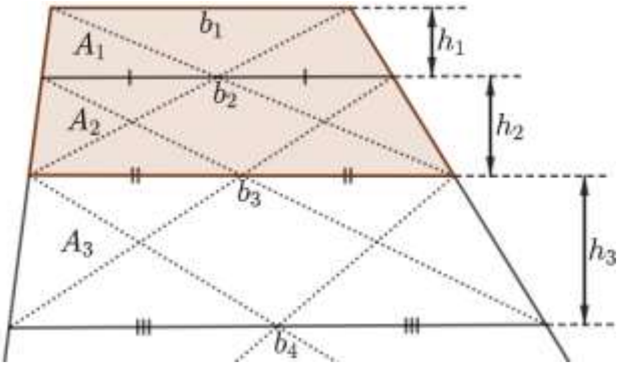


**Figura 10** – Sucessão de trapézios com medidas de bases em progressão harmônica.

É oportuno destacar que, para ($b_n$) crescente, além do trapézio inicial, de área $A_1$, há uma quantidade limite de trapézios que assim podem ser construídos. Essa quantidade é dependente do número de termos positivos da progressão aritmética $\left(\frac{1}{b_n}\right)$, uma vez que esta é decrescente. Esse número deve ser o maior inteiro, estritamente menor do que $\frac{b_1}{b_2 - b_1}$. De fato, deve ser positivo o termo geral dessa sequência, relativo à construção da terceira base em diante, ou seja, deve-se ter $\frac{1}{b_1} + (n+1)\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1}\right) > 0$, de onde decorre aquela condição.

Assim, por exemplo, se $b_1 = 9$ e $b_2 = 11$, esse quociente resulta em 4,5. Portanto, com base no primeiro, independentemente de sua altura, podemos construir mais 4 trapézios. E, se $b_1 = 12$ e $b_2 = 16$, tal quociente vale 3. Daí, além do primeiro, é possível construir mais 2 trapézios.

Para $\frac{b_1}{b_2 - b_1} \leq 1$ (ou, $b_2 \geq 2b_1$), não há possibilidade de construção de mais trapézios, além do inicial, porque as extremidades da base menor do trapézio são os únicos pontos em comum entre o par de semirretas com essas origens, contendo seus lados não paralelos, e o par de retas às quais pertence o ponto médio da base maior, como se pode observar na *figura 11*. E, se $b_2 > 2b_1$, tais retas intersectam as semirretas opostas àquelas, determinando extremidades de um segmento, paralelo às bases, com medida oposta ao valor do terceiro termo da progressão harmônica em questão, como se virtual fosse essa terceira base, por assim dizer.

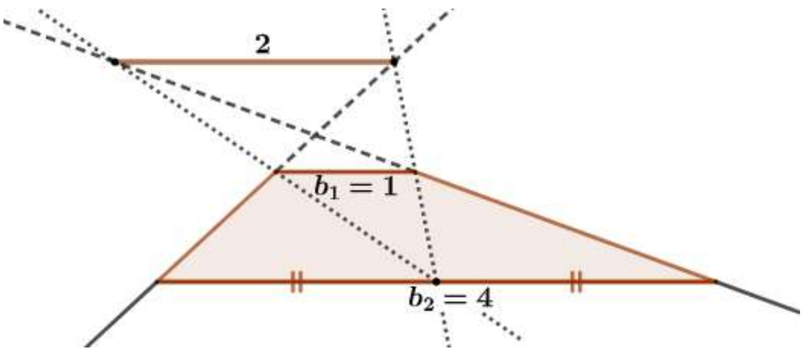


**Figura 11** – Construção geométrica de uma base "imaginária", concebida da progressão harmônica: 1, 4, –2.

## 4.4 Bases com medidas em progressão quadrática

A última linha da *tabela 1* revela que a medida da base intermediária de um trapézio, que o divide em dois equivalentes, é igual à média quadrática entre as medidas de suas bases.

Com o prosseguimento da construção dessas bases, como indicado na *figura 12*, há também a criação de uma regularidade numérica: a *progressão quadrática* $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , $b_4$ , … Nesta sequência, para $k$ inteiro, com $k > 1$, $b_k^2 = \frac{b_{k-1}^2 + b_{k+1}^2}{2}$ e, por isso, os quadrados de seus termos, $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \ldots$, estão em progressão aritmética. Nesse caso, sendo a sequência das áreas a constante $A$, a sequência das alturas é dada pela expressão $h_n = \frac{2A}{b_n + b_{n+1}}$, advinda da fórmula da área do $n$-ésimo trapézio.

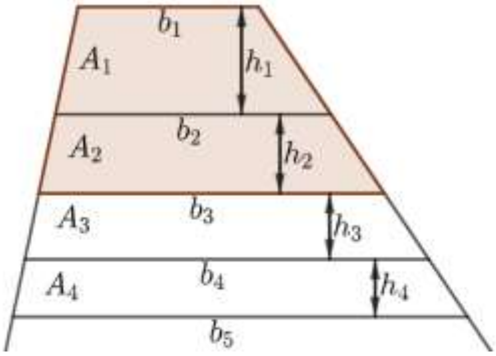


**Figura 12** – Sucessão de trapézios com medidas de bases em progressão quadrática.

Embora ($h_n$) convirja para zero, a extensão vertical dessa construção é tão grande quanto se queira. É razoável esperar que, assim como ocorre com a área, a altura dessa figura cresça sem limites. Algebricamente, equivale a dizer que a série $\sum h_n = \sum \frac{2A}{b_n + b_{n+1}}$ é divergente.

De fato, por ser ($b_n^2$) uma progressão aritmética de razão $r = b_2^2 - b_1^2 > 0$, então:

$$b_n + b_{n+1} = \sqrt{b_1^2 + (n-1)r} + \sqrt{b_1^2 + nr} < 2\sqrt{b_1^2 + nr} \le 2\sqrt{nb_1^2 + nr} = 2\sqrt{b_1^2 + r} \cdot \sqrt{n} = 2b_2\sqrt{n}$$

Com isso, $h_n = \frac{2A}{b_n + b_{n+1}} > \frac{A}{b_2\sqrt{n}}$. Assim, já que $\frac{A}{b_2} \cdot \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente (*), então, $\sum h_n$ também o é, devido ao critério da comparação entre séries (cuja teoria, demonstrações e exemplos são encontrados em [3]).

(*) $\sum \frac{1}{n^t}$ é divergente para $0 < t < 1$, pois, $\frac{1}{n^t} > \frac{1}{n}$, e a série harmônica, $\sum \frac{1}{n}$, diverge.

# 5 Bases de um trapézio com medidas inteiras

Dado um trapézio, procuremos por ternas ($x$, $z$, $y$) de medidas inteiras de suas bases para cada uma das quatro situações abordadas acima, sendo $z$ a medida da base intermediária. Nos dois primeiros casos essas medidas são de imediata obtenção. Nos dois últimos, é utilizado um método pouco usual para obtê-las.

## 5.1 Bases com medidas inteiras e em progressão aritmética

Basta que $x$ e $y$, com $x \neq y$, sejam inteiros positivos de mesma paridade para que a *base média* do referido trapézio tenha medida inteira, visto que $z = \frac{x+y}{2}$.

## 5.2 Bases com medidas inteiras e em progressão geométrica

É suficiente que $x$ e $y$, com $x \neq y$, sejam inteiros com produto quadrado perfeito para que a base intermediária do tal trapézio, que o divide em dois semelhantes, tenha medida inteira, já que $z = \sqrt{x \cdot y}$. Assim, a partir do conhecimento de uma decomposição de $x$ em produto de potências, valendo-se de completamento de quadrados, pode-se criar uma medida $y$.

## 5.3 Bases com medidas inteiras e em progressão harmônica

No caso de $z$ ser a média harmônica entre $x$ e $y$, a relação entre essas variáveis pode ser escrita assim: $\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=2$. Pondo $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, tem-se: $\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=2$, ou, $Y = \frac{X}{2X-1}$ (*).

Trata-se da lei de uma função cujo gráfico (hipérbole) possui, por exemplo, o ponto (1, 1).

Consideremos, agora, o feixe de retas ao qual esse ponto pertence, tendo como coeficiente angular o racional $q \neq 0$. Sua equação é $Y - 1 = q(X - 1)$ (**).

Do sistema das equações (*) e (**) encontram-se as coordenadas racionais $X$ e $Y$ das intersecções entre esse feixe de retas e a hipérbole. De fato, na resolução, o racional $X \neq 1$ é obtido da equação quadrática $2qX^2 - (3q - 1)X + q - 1 = 0$ e vale $\frac{q-1}{2q}$. Associado a este, $Y = \frac{1-q}{2}$.

Sendo $q = \frac{m}{n}$, $X$ e $Y$ ficam, nessa ordem, dados pelos quocientes $\frac{m-n}{2m}$ e $\frac{n-m}{2n}$, ou assim: $X = \frac{n(m-n)}{2mn}$ e $Y = \frac{m(n-m)}{2mn}$, com mesmos denominadores, da mesma forma como foram postos acima, em termos de $x$, $y$ e $z$. A *figura 13* mostra, além do ponto (1, 1), o ponto $P$ de coordenadas racionais ambas positivas, comum a esses gráficos.

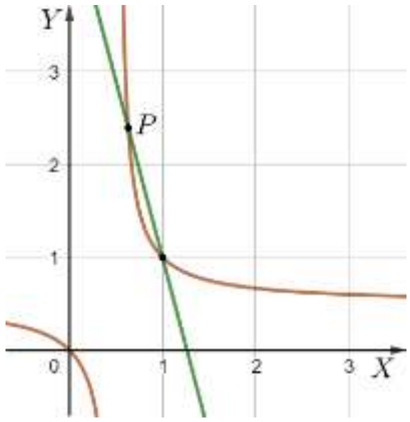


**Figura 13** – O ponto $P$ de intersecção entre certa hipérbole e a reta à qual pertence o ponto (1, 1).

Nessa situação, com $q < 0$, cada par de inteiros $(m, n)$ de sinais opostos (com $|m| \neq |n|$, para descartar paralelogramos), gera os inteiros negativos, em progressão harmônica, $x = n(m - n)$, $z = 2mn$ e $y = m(n - m)$. É claro que seus opostos, $n^2 - mn$; $-2mn$ e $m^2 - mn$, também estão em progressão harmônica, servindo estes como medidas inteiras das bases do trapézio em questão. A *tabela 2* exibe exemplos com essas medidas. (Na situação que inclui $q > 0$, há criação de bases "virtuais", como visto na *figura 11*, caso em que se aplicam os valores $m = 2$ e $n = 1$)

**Tabela 2** – Medidas inteiras $x$, $z$ e $y$ de bases de trapézios, em progressão harmônica.

| $m$ | $n$ | $x = n^2 - mn$ | $z = -2mn$ | $y = m^2 - mn$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | – 1 | 3 | 4 | 6 |
| – 3 | 2 | 10 | 12 | 15 |
| 4 | – 3 | 21 | 24 | 28 |
| – 5 | 2 | 14 | 20 | 35 |
| – 6 | 1 | 7 | 12 | 42 |

## 5.4 Bases com medidas inteiras e em progressão quadrática

No caso de $z$ ser a média quadrática entre $x$ e $y$, temos que encontrar soluções para a equação diofantina $x^2 + y^2 = 2z^2$, ou equivalentemente, de $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 2$. Trata-se, esta última, da equação de uma circunferência nas variáveis racionais $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, qual seja, $X^2 + Y^2 = 2$, que, ademais, tem o par (1, 1) como uma solução.

Assim como procedemos com o caso anterior, consideramos o feixe de retas contendo o ponto (1, 1) e possuindo como coeficiente angular o racional $q$. Na resolução do sistema formado por sua equação, $Y - 1 = q(X - 1)$, e pela equação da referida circunferência, o racional $X \neq 1$ é obtido da equação quadrática $(1 + q^2)X^2 - 2q(q - 1)X + q^2 - 2q - 1 = 0$ e vale $\frac{q^2 - 2q - 1}{q^2 + 1}$. Associado a este, $Y = \frac{-q^2 - 2q + 1}{q^2 + 1}$.

Sendo $q = \frac{m}{n}$, $X$ e $Y$ ficam, nessa ordem, assim dados: $\frac{m^2 - n^2 - 2mn}{n^2 + m^2}$ e $\frac{n^2 - m^2 - 2mn}{n^2 + m^2}$.

A *figura 14* mostra, além do ponto (1, 1), o ponto $P$, de coordenadas racionais, comum a esses gráficos.

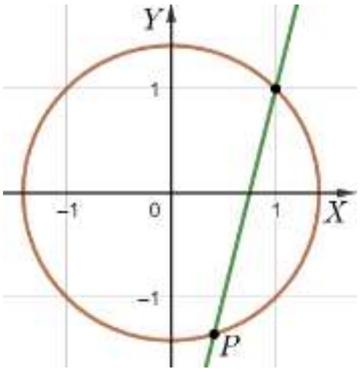


**Figura 14** – O ponto $P$ de intersecção entre certa circunferência e a reta que contém o ponto (1, 1).

Devido a simetrias em relação aos eixos e à origem, é claro que qualquer ponto com as coordenadas de $P$, ambas em módulo, pertence a essa circunferência. Portanto, para cada dupla de inteiros $m$ e $n$ (com $0 \neq |m| \neq |n|$, para descartar paralelogramos), conseguimos medidas inteiras $x$, $z$ e $y$, das bases do trapézio em questão, em progressão quadrática, ao considerarmos: $x = |m^2 - n^2 - 2mn|$; $z = m^2 + n^2$ e $y = |n^2 - m^2 - 2mn|$. Na *tabela 3* há exemplos com essas medidas.

**Tabela 3** – Medidas inteiras $x$, $z$ e $y$ de bases de trapézios, em progressão quadrática.

| $m$ | $n$ | $x = \lvert m^2 - n^2 - 2mn \rvert$ | $z = m^2 + n^2$ | $y = \lvert n^2 - m^2 - 2mn \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 5 | 7 |
| 2 | – 3 | 7 | 13 | 17 |
| 4 | 1 | 7 | 17 | 23 |
| – 3 | – 4 | 17 | 25 | 31 |
| 5 | 2 | 1 | 29 | 41 |

# 6 Considerações finais

O saudoso professor Elon Lages Lima preconizava reiteradamente a importância de se procurar conhecer um assunto com maior profundidade do que a exigida em seu ensino. São patentes os benefícios didáticos que o professor consegue com essa conduta, entre os quais, de ser capaz de aprimorar a estruturação de um tema, sobretudo, em resposta à instigação dos aprendizes. Igualmente importante é desenvolver nestes a cultura da investigação do objeto de estudo, ainda que não se configure em pesquisa incomum.

Nesse texto, é exposta uma situação exemplar com esse duplo propósito: de ensejar uma abordagem alternativa ao conteúdo apresentado, assim como de fornecer sugestões ao se propor uma atividade de pesquisa sobre temas afins.

Devido à natureza da Matemática, não é raro que essas iniciativas conduzam a resultados inusitados, a aplicações interessantes ou a conexões entre os diferentes tópicos dessa Ciência, indícios de que essa ação tenha produzido bons frutos.

# 7 Referências

[1] LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, c2006. v. 2.

[2] WAGNER, E. **Construções geométricas.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, c2007.

[3] LIMA, E. L. **Análise real:** funções de uma variável. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, c2011. v. 1.