Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Iniciação Científica

A inversa generalizada de uma matriz e a sua obtenção através de algoritmos

The generalized inverse of a matrix and its obtainment through algorithms

José Norberto Reinprecht
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
norberto.reinprecht@unesp.br

Marta Cilene Gadotti
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mc.gadotti@unesp.br

Resumo

O conceito de inversa generalizada de uma matriz é um assunto relativamente recente e nas últimas décadas este conceito encontrou uma série de aplicações em muitas áreas da ciência e tornou-se uma ferramente útil para matemáticos aplicados, engenheiros e físicos que trabalham, por exemplo, com análise de dados, problemas de otimização, solução de equações integrais lineares e outras.

O tema inversa generalizada de uma matriz é pouco explorado em trabalhos de conclusão de curso de graduação e dissertação de mestrado, talvez pelo assunto não ser ministrado no curso regular de graduação em matemática.

Neste trabalho exploraremos os algoritmos que permitem a obtenção da inversa generalizada de matrizes reais e, em especial, a inversa de Moore-Penrose conhecida também como pseudoinversa que é uma das mais importantes inversa generalizada de uma matriz.

Palavras-chave: Inversa Generalizada. Inversa de Moore-Penrose. Pseudoinversa. Algoritmos.

Abstract

The concept of generalized inverse of a matrix is a relatively recent subject and in the last decades this concept has found a number of applications in many areas of science and has become a useful tool for applied mathematicians, engineers and physicists who work, for example, with data analysis, optimization problems, solution of linear integral equations and others.

The generalized inverse theme of a matrix is litte explored in undergraduate course conclusion works and master's dissertations, perhaps because the subject is not taught in the regular undergraduate course in mathematics.

In this work we will explore the algorithms that allow obtaining the generalized inverse of real matrices and, in particular, the Moore-Penrose inverse, also known as pseudoinverse, which is one of the most important generalized inverses of a matrix

Keywords: Generalized Inverse. Moore-Penrose Inverse. Pseudoinverse. Algorithms

Artigo recebido em dez. 2022 e aceito em jun. 2023

1 Introdução

A definição clássica de inversa de uma matriz estabelece que uma matriz quadrada A de ordem n admite inversa, quando existir uma outra matriz A^{-1} também quadrada de ordem n tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \ , \tag{1}$$

sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Assim, a existência da inversa está restrita somente às matrizes quadradas e não-singulares, isto é, matrizes que possuem posto igual a n (posto completo). A partir desta definição verifica-se que são válidas as seguintes propriedades:

P_1. Se A^{-1} existe, então ela é única. P_2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
P_3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. P_4. $(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$.
P_5. $det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$.

Em situações problemas, como por exemplo, que envolvam a solução de sistemas lineares do tipo $Ax = b$, sendo A uma matriz quadrada de ordem n e não-singular. Sabendo que, se o sistema é consistente, sua solução é única e é dada por

$$x = A^{-1}b \ . \tag{2}$$

Entretanto, existem situações que esses requisitos não se cumprem, ou seja, quando a matriz A não é quadrada, ou mesmo sendo quadrada apresenta posto incompleto. Uma abordagem para tratar destas situações envolverá a utilização do conceito de inversa generalizada de uma matriz.

Uma matriz A, não quadrada, do tipo $m \times n$ não possui inversa nas condições que vimos anteriormente. Mas, pode admitir uma matriz A_D^- do tipo $n \times m$, tal que $AA_D^- = I_m$, ou uma outra matriz A_E^- também do tipo $n \times m$ tal que $A_E^- A = I_n$. Estas matrizes A_D^- e A_E^- recebem os nomes de inversa generalizada de A à direita, e inversa generalizada de A à esquerda, respectivamente. As propriedades acima e mais detalhes, o leitor pode consultar a referência [1].

Exemplo 1 *A matriz* $A_D^- = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ *é uma inversa generalizada à direita da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

De fato, $A.A_D^- = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = I_2$.

Convém destacar que uma matriz pode admitir mais de uma inversa generalizada à direita (ou à esquerda). A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ também é uma inversa generalizada à direita de A.

2 A inversa generalizada de uma matriz

Da definição da inversa clássica de uma matriz A que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, temos que

$$AA^{-1}A = A \ , \tag{3}$$

e desta igualdade iniciamos a ideia de inversa generalizada de uma matriz qualquer.

2.1 Caracterização da inversa generalizada

Definição 2 *(Ver referências [2] e [3]) Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Dizemos que a matriz A^- de ordem $n \times m$ é uma inversa generalizada de A ou g-inversa de A, quando*

$$AA^-A = A \ . \tag{4}$$

A inversa generalizada também é conhecida com a denominação de inversa condicional.

Exemplo 3 *A matriz* $A^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ *é uma inversa generalizada da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

De fato, $AA^-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A.$

Toda matriz A, quadrada ou retangular, possui uma inversa generalizada, e não é única, exceto quando A é não singular, neste caso $A^- = A^{-1}$.

O leitor poderá verificar que a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{29}{45} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{45} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ também é uma inversa generalizada de A denominada de Moore-Penrose como veremos mais adiante.

Proposição 4 *(Ver referência [2]) Seja $Ax = b$ um sistema linear consistente. Então, $x_0 = A^-b$ é uma solução do sistema se, e somente se, $AA^-b = b$.*

Demonstração. Seja $x_0 = A^-b$ uma solução do sistema $Ax = b$. Multiplicando por AA^- ambos os membros da equação $Ax = b$ temos $AA^-Ax = AA^-b$, então $Ax = AA^-b$. Portanto, $b = AA^-b$.

Por outro lado, considerando $x_0 = A^-b$, então $Ax_0 = AA^-b$. Mas, por hipótese $AA^-b = b$. Assim, $Ax_0 = b$. Portanto, $x_0 = A^-b$ é solução do sistema $Ax = b$.

Proposição 5 *(Ver referência [2]) Considere um sistema consistente $Ax = b$. Se $x_0 = A^-b$ é uma solução particular do sistema, então a sua solução geral é dada por*

$$x^* = A^-b + (I_n - A^-A)h \ , \tag{5}$$

sendo A^- qualquer inversa generalizada de A, I_n a matriz identidade de ordem n e h um vetor coluna n-dimensional chamado de parâmetro.

Demonstração. Mostremos inicialmente que x_0 dado em (5) é solução do sistema $Ax = b$. De fato, $Ax_0 = A[\ A^-b + (I_n - A^-A)h\ ] = AA^-b + A(I_n - A^-A)h = AA^-b + (AI_n - AA^-A)h$. Pelo fato do sistema $Ax = b$ ser consistente, então $AA^-b = b$ (Proposição 4) e como $AA^-A = A$ (Definição 2), então $Ax_0 = b + (A - A)h$. Logo, $Ax_0 = b$. Portanto, x_0 é solução de $Ax = b$.

Agora, mostremos que toda solução do sistema $Ax = b$ é da forma dado em (5). Seja x_1 uma solução do sistema $Ax = b$. Assim, $Ax_1 = b$, então $A^-Ax_1 = A^-b$. Logo, $0 = A^-b - A^-Ax_1$. Somando-se x_1 a ambos os membros desta última igualdade, temos: $x_1 = A^-b + x_1 - A^-Ax_1 = A^-b + (I - A^-A)x_1$. Portanto, x_1 é da forma de x_0.

Se $AA^- = I_n$, o sistema tem solução única, caso contrário o sistema possui infinitas soluções parametrizadas pelo vetor h.

3 Métodos de obtenção da inversa generalizada

3.1 Obtenção da inversa generalizada

Podemos obter a inversa generalizada de uma matriz de forma análoga à obtenção da inversa clássica.

Exemplo 6 *Determinemos a inversa generalizada da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{L_3 \to L_3 - 5L_2}{\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Logo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Portanto, $A^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ é uma inversa generalizada da matriz A.

3.2 Algoritmo de Searle

Em [2] observamos que a inversa generalizada de uma matriz A pode ser obtida através do algoritmo descrito a seguir, denominado de Algoritmo de Searle, apresentado em 1971.

1. Encontre uma submatriz B de A de posto igual ao da matriz A.
2. Obtenha a matriz transposta da inversa da matriz B, isto é. $(B^{-1})^T$.
3. Construa a matriz C substituindo a matriz B escolhida em A pela matriz $(B^{-1})^T$ e complete com ”zeros” o restante da matriz até chegar na dimensão da matriz A.
4. A transposta da matriz C é a inversa generalizada de A, ou seja, $A^- = C^T$.

Exemplo 7 *Determinemos a inversa generalizada da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, *utilizando o algoritmo de Searle.*

Como $det\ A = 0$, e o determinante da submatriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, então, $posto\ A = 2$.

Escolhendo a submatriz B cujo posto é igual ao da matriz A, calculemos $(B^{-1})^T$.

$$B^{-1} = \frac{1}{detB}.adjB = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad \text{Logo,} \quad (B^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Substituindo $(B^{-1})^T$ na matriz A no lugar da submatriz B e completando com zeros os demais elementos, obtemos a matriz $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A inversa generalizada de A é dada pela transposta de C, ou seja,

$$A^- = C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A proposição a seguir garante que uma matriz sempre admite infinitas inversas generalizadas.

Proposição 8 *(Ver referência [3]) Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e A^- de ordem $n \times m$ uma inversa generalizada qualquer de A. Então,*

$$A^- + M - A^- AMAA^- \tag{6}$$

é uma inversa generalizada de A, sendo M uma matriz arbitrária de ordem $n \times m$.

Demonstração. De fato, seja $B = A^- + M - A^- AMAA^-$, então

$ABA = A(A^- + M - A^- AMAA^-)A = AA^-A + AMA - AA^-AMAA^-A = A + AMA - AMA = A$. Portanto, $B = A^- + M - A^- AMAA^-$ é uma inversa generalizada de A.

4 A Inversa de Moore-Penrose

O conceito de inversa generalizada, denominação dada a inversa de matrizes quadradas singulares ou matrizes não quadradas, surgiu em 1920 nos trabalhos de Eliakim H. Moore. Pouco se fez nos anos seguintes, até aproximadamente 1950, quando surgiram alguns trabalhos envolvendo relações entre inversa generalizada e solução de problemas de mínimos quadrados. Em 1955, o britânico Sir Roger Penrose, físico, matemático e filosófo da ciência (ganhador do prêmio Nobel de Física de 2020) define a inversa generalizada de maneira diferente de Moore, prova que toda matriz admite uma única inversa generalizada desde que satisfaça alguns critérios, denominados de condições de Penrose. Mostra também que sua definição de inversa generalizada coincide com a de Moore, daí hoje ser conhecida como inversa de Moore-Penrose, ou simplesmente pseudoinversa [5].

4.1 Caracterização da inversa de Moore-Penrose

Definição 9 *(Ver referência 3) Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz denotada por $A^\dagger$ é chamada de inversa de Moore-Penrose de A, ou simplesmente pseudoinversa de A, se os critérios a seguir, denominados de condições de Penrose, forem satisfeitos:*

(1) $AA^\dagger A = A$.
(2) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
(3) $AA^\dagger$ *é simétrica, ou seja,* $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$.
(4) $A^\dagger A$ *é simétrica, ou seja,* $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$.

Embora, $AA^\dagger$ desempenha o papel de matriz identidade na pré multiplicação por A e na pós-multiplicação por $A^\dagger$, respectivamente, nas propriedades (1) e (2), estas matrizes só serão iguais à identidade em situações especiais, no caso da matriz A ser quadrada e não-singular. E nestes casos, $A^{-1} = A^\dagger$.

A inversa generalizada de Moore-Penrose é bastante útil em demonstrações matemáticas e nas resoluções aproximadas de sistemas inconsistentes.

Exemplo 10 *A matriz* $A^\dagger = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *é a inversa de Moore-Penrose ou pseudoinversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *pois satisfaz as 4 condições da Definição 9.*

Proposição 11 *(Ver referência 3) A inversa de Moore-Penrose ou pseudoinversa de uma matriz A é única.*

Demonstração: Suponhamos que X e Y sejam pseudoinversas de A. Logo, satisfazem as condições de Penrose. Em particular temos que:

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad AYA = A \ \ e \ \ YAY = Y.$$

Dessas igualdades segue que:

$AX = (AX)^T = X^T A^T = X^T (AYA)^T = X^T A^T Y^T A^T = (AX)^T (AY)^T = (AX)(AY) = (AXA)Y = AY$. Logo, $AX = AY$.

Por outro lado, temos:

$XA = (XA)^T = A^T X^T = (AYA)^T X^T = A^T Y^T A^T X^T = (YA)^T (XA)^T = (YA)(XA) = Y(AXA) = YA$. Logo, $XA = YA$.

Então, $X = XAX = XAY = YAY = Y$. Portanto, a pseudoinversa de A é única.

4.2 Obtenção da inversa de Moore-Penrose

(Ver referência [4]) Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a sua inversa de Moore-Penrose $A^\dagger$ de ordem $n \times m$ pode ser obtida da seguinte da forma:

(a) Se posto de A é igual a n (posto completo coluna), então $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$.

(b) Se posto de A é igual a m (posto completo linha), então $A^\dagger = A^T (AA^T)^{-1}$.

(c) Se $m = n$ e posto de A é igual n (matriz quadrada de posto completo), então $A^\dagger = A^{-1}$.

(d) Se o posto de A é igual 1, então $A^\dagger$ pode ser obtida como sendo $\frac{1}{tr(A^T A)} A^T$, em que $tr(A^T A)$ representa o traço da matriz $A^T A$.

(e) No caso do posto de A ser menor que o $min\{m, n\}$, a inversa de Moore-Penrose pode ser obtida através de um dos algoritmo que mostraremos na Seção 5.

Exemplo 12 *Determinemos a inversa de Moore-Penrose da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz A é de ordem 3×2 e o $posto(A) = 2 = n$, então $A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{50-9} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, $A^{\dagger} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 12 \\ -3 & 20 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 13 *Determinemos a inversa de Moore-Penrose da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

A matriz A é de ordem 2×3 e o $posto(A) = 2 = m$, então $A^{\dagger} = A^T (A A^T)^{-1}$.

$$A A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A A^T)^{-1} = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A^{\dagger} = A^T (A A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Portanto, $A^{\dagger} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Exemplo 14 *Determinemos a inversa de Moore-Penrose da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Como a 2ª linha é múltipla da 1ª, então todas as submatrizes quadradas de ordem 2 possuem determinantes iguais a zero. Logo, posto da matriz A é igual a 1 e $A^{\dagger} = \frac{1}{tr(A^T A)} A^T$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 20 & 30 \\ 15 & 30 & 45 \end{bmatrix}. \quad \text{Logo,} \quad tr(A^T A) = 70.$$

Portanto, $A^{\dagger} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

5 Algoritmos de obtenção da inversa de Moore-Penrose

Apresentamos nesta seção dois algoritmos bem conhecidos para a obtenção da inversa de Moore-Penrose. A implementação computacional e a análise dos algoritmos não são objetos de investigação neste artigo. O objetivo é apenas introduzir e ilustrar com simplicidade esses algoritmos. O leitor interessado na implementação pode buscar referências adequadas, inclusive estudar novos métodos, sugerimos [1] e [6].

5.1 Algoritmo de Penrose

(Ver referência 3) Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$ e posto igual a r, $r \leq min\{\, m, n \,\}$. A inversa de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ pode ser obtida através de um algoritmo cujos passos estão descritos a seguir:

1. Calculamos a matriz $B = A^T A$.
2. Definimos de $C_1 = I_n$.
3. A partir daí, inicia-se um processo iterativo de $r-1$ passos, calculando-se $C_2, C_3, \ldots, C_r$ utilizando-se da expressão:

$$C_{i+1} = \frac{tr(C_i B)}{i}.I_n - C_i B\ , \quad para \ \ i = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{7}$$

4. A inversa generalizada da matriz A é dada por $A^\dagger = \frac{r}{tr(C_r B)}.C_r A^T$.

Exemplo 15 *Utilizando-se do algoritmo de Penrose, determinemos a inversa de Moore-Penrose (pseudoinversa) da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Observamos que o determinante de A é nulo e o determinante da submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$. Então, $r = posto(A) = 2$. Logo, a obtenção da inversa de Moore-Penrose de A através do algoritmo de Penrose é dada por

$$A^\dagger = \frac{r}{tr(C_r B)}.C_r A^T = \frac{2}{tr(C_2 B)}.C_2 A^T$$

.

Calculemos $B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$.

Iniciando o processo de iteração temos:

$C_1 = I_3$, então $C_1.B = B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$ e $tr(C_1 B) = 21$.

Logo, $C_2 = \frac{tr(C_1 B)}{1}.I_3 - C_1 B = \frac{21}{1}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$. Então, $C_2 = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -4 \\ -2 & 19 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Assim, $C_2 B = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -4 \\ -2 & 19 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 36 & 12 \\ 36 & 30 & -18 \\ 12 & -18 & 78 \end{bmatrix}$ e $tr(C_2 B) = 168$.

Como, $A^\dagger = \frac{2}{tr(C_2 B)}.C_2 A^T$, então, $A^\dagger = \frac{2}{168}.\begin{bmatrix} 16 & -2 & -4 \\ -2 & 19 & 2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Portanto, $A^\dagger = \frac{1}{84}.\begin{bmatrix} 8 & 26 & -10 \\ 2 & 17 & -13 \\ 10 & 1 & 19 \end{bmatrix}$.

Exemplo 16 *Determinemos a inversa de Moore-Penrose da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *utilizando o algoritmo de Penrose,*

Como o determinante da submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é diferente de 0, então $r = posto(A) = 3$. Logo, a inversa de Moore-Penrose A através do algoritmo de Penrose é dada por

$$A^{\dagger} = \frac{r}{tr(C_r B)}.C_r A^T = \frac{3}{tr(C_3 B)}.C_3 A^T. \tag{8}$$

Calculemos $B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Iniciando o processo de iteração temos:

$C_1 = I_3$, então $C_1.B = B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $tr(C_1 B) = 13$.

Logo, $C_2 = \frac{tr(C_1 B)}{1}.I_3 - C_1 B = \frac{13}{1}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -2 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix}$.

Então, $C_2 B = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -2 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 12 \\ 6 & 29 & -3 \\ 12 & -3 & 23 \end{bmatrix}$ e $tr(C_2 B) = 64$.

Assim, $C_3 = \frac{tr(C_2 B)}{2}.I_3 - C_2 B = \frac{64}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 6 & 12 \\ 6 & 29 & -3 \\ 12 & -3 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -6 & -12 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Logo, $C_3 B = \begin{bmatrix} 20 & -6 & -12 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $tr(C_3 B) = 18$.

Como, $A^{\dagger} = \frac{3}{tr(C_3 B)}.C_3 A^T = \frac{3}{18}.\begin{bmatrix} 20 & -6 & -12 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$.

Portanto, $A^{\dagger} = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$.

5.2 Algoritmo de Greville

(Ver referência [4]) O algoritmo Greville é um outro processo iterativo desenvolvido em 1965 que permite calcular a pseudoinversa de uma matriz A a partir das matrizes pseudoinversas correspondentes a algumas de suas submatrizes.

$$\text{Seja} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{1k} & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{sendo}$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad k\text{-ésima coluna de } A.$$

Consideremos A_k a submatriz formada pelas primeiras k colunas da matriz A. Então,

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}. \quad \text{Então,} \quad A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & \alpha_k \end{bmatrix}.$$

A condição inicial da iteração é dada como sendo

Se $\alpha_1 = 0$ (coluna nula), então $A_1^\dagger = 0$.

Se $\alpha_1 \neq 0$, então $A_1^\dagger = (\alpha_1^T.\alpha_1)^{-1}.\alpha_1^T$.

Definimos os vetores colunas δ_k e γ_k como sendo:

$$\delta_k = A_{k-1}^\dagger.\alpha_k \qquad \text{e} \qquad \gamma_k = \alpha_k - A_{k-1}\delta_k.$$

E um outro vetor B_k dado por:

Se $\gamma_k \neq 0$, então $B_k = \gamma_k^\dagger = (\gamma_k^T.\gamma_k)^{-1}.\gamma_k^T$.

Se $\gamma_k = 0$, então $B_k = (1 + \gamma_k^T.\delta_k)^{-1}.\delta_k^T A_{k-1}$.

Então, a matriz $A_k^\dagger$ da matriz A_k é calculada como sendo $A_k^\dagger = \begin{bmatrix} A_{k-1}^\dagger - \delta_k.B_k \\ B_k \end{bmatrix}$.

E o processo continua para $k = 2, 3 \ldots, n$.

Exemplo 17 *Determinemos a pseudoinversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *utilizando o algoritmo de Greville .*

As matrizes colunas α_i são: $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ *e* $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1ª iteração:

$$A_1 = \begin{bmatrix}\alpha_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{então,} \quad A_1^{\dagger} = (\ \alpha_1^T\alpha_1\ )^{-1}\alpha_1^T.$$

$$A_1^{\dagger} = \left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Portanto, $\quad A_1^{\dagger} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

$$\delta_2 = A_1^{\dagger}.\alpha_2 = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \alpha_2 - A_1\delta_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí,} \quad B_2 = \gamma_2^{\dagger} = (\ \gamma_2^T.\gamma_2\ )^{-1}.\ \gamma_2^T = \left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}3\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{então,} \quad B_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

$$\text{Mas,} \quad A_2^{\dagger} = \begin{bmatrix}A_1^{\dagger} - \delta_2 B_2\\ B_2\end{bmatrix}, \quad \text{e como} \quad \delta_2 B_2 = \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

$$A_1^{\dagger} - \delta_2 B_2 = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}. \quad \text{Portanto,} \quad A_2^{\dagger} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

2ª iteração:

$$\delta_3 = A_2^{\dagger}\alpha_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11}{6}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

$$\gamma_3 = \alpha_3 - A_2\delta_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\frac{11}{6}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{11}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí,} \quad B_3 = \gamma_3^{\dagger} = \left(\gamma_3^T.\gamma_3\right)^{-1}.\ \gamma_3^T = \left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}. \quad \text{Então,} \quad B_3 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\text{Mas,} \quad A_3^{\dagger} = \begin{bmatrix}A_2^{\dagger} - \delta_3 B_3\\ B_3\end{bmatrix}.$$

$$\delta_3 B_3 = \begin{bmatrix}\frac{11}{6}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{11}{3} & \frac{11}{6} & \frac{11}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

$$A_2^{\dagger} - \delta_3 B_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{11}{3} & \frac{11}{6} & \frac{11}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Portanto, $\quad A_3^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_2^{\dagger} - \delta_3 B_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

3ª iteração:

$$\delta_4 = A_3^{\dagger}.\alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\gamma_4 = \alpha_4 - A_3.\delta_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí, $\quad B_4 = \left(1 + \gamma_4^T.\delta_4\right)^{-1} \delta_4^T.A_3.$

$$B_4 = \left(1 + \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)^{-1} . \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(1 + \begin{bmatrix} 62 \end{bmatrix}\right)^{-1} . \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Então, $\quad B_4 = \begin{bmatrix} \frac{5}{63} & \frac{1}{63} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$

Mas, $\quad A_4^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_3^{\dagger} - \delta_4 B_4 \\ B_4 \end{bmatrix}.$

$$\delta_4 B_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{5}{63} & \frac{1}{63} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{10}{63} & \frac{2}{63} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$A_3^{\dagger} - \delta_4 B_4 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{10}{63} & \frac{2}{63} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{21} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{25}{9} \\ \frac{53}{63} & -\frac{2}{63} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{37}{21} & \frac{22}{21} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\quad A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{31}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{25}{9} \\ \frac{53}{63} & -\frac{2}{63} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{37}{21} & \frac{22}{21} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{63} & \frac{1}{63} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{31}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{25}{3} \\ \frac{53}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{37}{7} & \frac{22}{7} & 4 \\ \frac{5}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é a pseudoinversa da matriz A.

Exemplo 18 *Determinemos a pseudoinversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *utilizando o algoritmo de Greville.*

As matrizes colunas α_i são: $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

1ª iteração:

$$A_1 = \left[\alpha_1\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad \text{Então, } A_1^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Assim, } \delta_2 = A_1^\dagger.\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 - A_1\delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } B_2 = \gamma_2^\dagger = \left(\gamma_2^T.\gamma_2\right)^{-1}.\gamma_2^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Então, } B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mas, } A_2^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^\dagger - \delta_2 B_2 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_2 B_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_1^\dagger - \delta_2 B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } A_2^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2ª iteração:

$$\delta_3 = A_2^\dagger \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\gamma_3 = \alpha_3 - A_2\delta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } B_3 = \gamma_3^\dagger = \left(\gamma_3^T.\gamma_3\right)^{-1}.\gamma_3^T = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Então, } B_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mas, } A_3^\dagger = \begin{bmatrix} A_2^\dagger - \delta_3 B_3 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_3 B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$A_2^\dagger - \delta_3 B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\quad A_3^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_2^{\dagger} - \delta_3 B_3 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

3ª iteração:

$$\delta_4 = A_3^{\dagger}.\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\gamma_4 = \alpha_4 - A_3.\delta_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $\quad B_4 = \left(\gamma_4^T.\gamma_4\right)^{-1} \gamma_4^T$.

$$B_4 = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} =$$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. $\quad$ Então, $\quad B_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Mas, $\quad A_4^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_3^{\dagger} - \delta_4 B_4 \\ B_4 \end{bmatrix}.$

$$\delta_4 B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$A_3^{\dagger} - \delta_4 B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\quad A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a pseudoinversa da matriz A.

6 Aplicações da inversa de Moore-Penrose na resolução de sistemas lineares

Os exemplos a seguir mostram a utilização da inversa generalizada de Moore-Penrose na resolução de sistemas lineares da forma $AX = b$ com coeficientes constantes.

Exemplo 19 *Consideremos o sistema linear* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 \ = 1 \end{cases}$.

Temos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $A^- = A^\dagger = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ (Exemplo 16).

Condição de consistência: $AA^-b = b$ (Proposição 4).

$$AA^-b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

Logo, o sistema é consistente e a solução geral é dada por

$$x^* = A^-b + (I_3 - A^-A)h \ \text{(Proposição 5).}$$

Como $A^-A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = I_3$, então

$$x^* = A^-b = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}.\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 20 *Consideremos o sistema linear* $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ = 2 \\ -x_2 + 3x_3 \ = 0 \end{cases}$.

Temos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A^- = A^\dagger = \frac{1}{84}.\begin{bmatrix} 8 & 26 & -10 \\ 2 & 17 & -13 \\ 10 & 1 & 19 \end{bmatrix}$ (Exemplo 15).

Condição de consistência: $AA^-b = b$ (Proposição 4).

$$AA^{-}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} . \frac{1}{84} . \begin{bmatrix} 8 & 26 & -10 \\ 2 & 17 & -13 \\ 10 & 1 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$$

Logo, o sistema é consistente e a solução geral é dada por

$$x^{*} = A^{-}b + (I_3 - A^{-}A)h \quad \text{(Proposição 5).}$$

Como $A^{-}A = \frac{1}{84} . \begin{bmatrix} 8 & 26 & -10 \\ 2 & 17 & -13 \\ 10 & 1 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & -\frac{13}{14} \end{bmatrix} \neq I_3$, então o sistema admite infinitas soluções.

$$I_3 - A^{-}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & -\frac{13}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{9}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}.$$

Então, $x^{*} = \frac{1}{84} . \begin{bmatrix} 8 & 26 & -10 \\ 2 & 17 & -13 \\ 10 & 1 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{9}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{7}h_1 - \frac{3}{7}h_2 - \frac{1}{7}h_3 \\ -\frac{3}{7}h_1 + \frac{9}{14}h_2 + \frac{3}{14}h_3 \\ -\frac{1}{7}h_1 + \frac{3}{14}h_2 + \frac{1}{14}h_3 \end{bmatrix}.$

Portanto, $x^{*} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7}h_1 - \frac{3}{7}h_2 - \frac{1}{7}h_3 \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}h_1 + \frac{9}{14}h_2 + \frac{3}{14}h_3 \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{7}h_1 + \frac{3}{14}h_2 + \frac{1}{14}h_3 \end{bmatrix}$, sendo h_1, h_2 e h_3 números reais.

7 Considerações Finais

A inversa generalizada de uma matriz é de grande utilidade na estatística experimental em problemas relacionados à busca de soluções de sistemas lineares. Existem vários tipos de inversas generalizadas, sendo a mais restritiva a de Moore-Penrose que exige quatro condições; outras inversas generalizadas exigem menos condições, tais como, a inversa condicional ou g-inversa, a inversa de quadrados mínimos e a inversa reflexiva ou g2-inversa. Para cada tipo de problema é utilizado a inversa generalizada mais adequada.

Este trabalho teve por objetivo apresentar de modo didático e ilustrado com exemplos a obtenção da inversa generalizada de matrizes reais e, em particular, a inversa de Moore-Penrose através do uso de algoritmos. O leitor poderá encontrar estudo análogo envolvendo inversas generalizadas de matrizes complexas nas referências [3] e [4].

8 Bibliografia

[1] BEN-ISRAEL, Adi; GREVILLE, Thomas N. E. **Generalized inverses:** theory and aplications. Rutcor-Rutgers Rd, New Jersey, 2001.

[2] GRAYBILL, Franklin A. **Introduction to matrices with applications in statistics.** Belmont, CA: Wadsworth Pub. Co., [1969].

[3] FERNÁNDEZ, Adelmo. **Inversa generalizada.** [Caracas]: Universidad Católica Andrés Belo, 2021. 1 video (24 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=MQOyc8eAjCw. Acesso em: 16 set. 2022.

[4] THOME, Néstor. **La inversa generalizada de Moore-Penrose y aplicaciones.** Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana, 2019. (Publicaciones Eletrónicas Sociedad Matemática Mexicana, Serie: Textos, v. 21).

[5] REINPRECHT, José N. **A inversa generalizada de uma matriz e aplicações.** [Rio Claro]: IGCE-UNESP, 2022. (Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

[6] TOUTOUNIAN, Faezeh; ATAEI Alireza. **A new method for computing Moore-Penrose inverse matrices.**fc 2009. (Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 228, p. 412-417).