Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Pesquisa

Juan López Linares
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo
jlopez@usp.br

Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis: cinco problemas resolvidos propostos para olimpíadas internacionais de matemática

Cyclic and tangential quadrilaterals: five solved problems proposed for international mathematics olympiads

Resumo

Cinco problemas propostos para olimpíadas internacionais de Matemática são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais quanto por professores que atuam no ensino e interessam-se em desafios olímpicos. Além dos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, a fundamentação teórica é baseada numa combinação de conceitos: semelhança, base média, incentro e ortocentro, arco capaz, potência de ponto, eixo e centro radical, e os teoremas de Reim e Pitot.

Palavras-chave: Quadriláteros. Circunferência. GeoGebra. Olimpíadas internacionais de matemática. Ensino médio e universitário. Geometria.

Abstract

Five proposed problems for international Mathematical Olympiads are discussed in detail. The demonstrations involved in the solutions are complemented by the availability of the respective links of the interactive figures using GeoGebra. It is hoped that the article can be appreciated both by students who are preparing for the final stages of national or international competitions and by professors who work in teaching and are interested in Olympic challenges. In addition to cyclic and tangential quadrilaterals, the theoretical foundation is based on a combination of concepts: similarity, mean base, incenter and orthocenter, power of a point, radical axis and center, and Reim's and Pitot's theorems.

Keywords: Quadrilaterals. Circumference. GeoGebra. International mathematics olympics. High school and university. Geometry.

Artigo recebido em jan. 2023 e aceito em jul. 2023

1 Introdução

O presente texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso "Geometria Olímpica com GeoGebra" para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis aparecem na resolução de muitos problemas olímpicos.

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, *International Mathematical Olympiad*) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Os objetivos são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (*LongList*, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (*ShortList*, SL). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

As resoluções neste artigo complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focou-se na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores conseguissem acompanhar o desenvolvimento do problema. Como complemento, uma versão interativa de cada uma das figuras do texto está disponibilizada no site do GeoGebra.

2 Conceitos básicos

Para fins didáticos, esta seção aborda alguns dos mais importantes fundamentos teóricos e construtivos que serão utilizados na próxima. O leitor especialista na área pode pular para a discussão dos problemas olímpicos.

2.1 Construção do arco capaz

Exercício 1. *Construir o Arco Capaz dado um segmento AB e um $\angle CDE = \alpha$. Isto é, encontrar os pontos do plano que são visto sob o mesmo ângulo α desde AB.*

Será construído a parte do Arco Capaz que fica acima da reta AB (Figura 1). A parte que fica abaixo é encontrada de maneira análoga.

1. Transportar para o vértice A e o semiplano inferior determinado pela reta AB o ângulo α. Um dos lados do mesmo é denotado pela semirreta i.

2. Construir a mediatriz m dos pontos A e B. Denotar por M o ponto médio entre A e B. Marcar $L = m \cap i$.

3. Passando por A construir uma perpendicular à semirreta AL. Marcar a o ponto O, interseção desta com m. Como $\angle LAO = \angle AML = \angle OMA = 90°$, segue que $\angle LAM = \angle AOM = \alpha$.

4. Construir o arco c, maior de AB, com centro em O e raio OA. Como O está na mediatriz de AB tem-se que $OA = OB$, o $\triangle AOB$ é isósceles e $\angle AOM = \angle BOM = \alpha$. De LA ser tangente a c em A o ângulo LAB é chamado de segmento e $\angle LAB = \frac{1}{2}\angle AOB$. O $\angle AOB$ define-se como central. Em palavras, o ângulo de segmento mede a metade do central correspondente.

5. Qualquer ponto X ou Y no arco c, maior da corda AB (Arco Capaz), é visto com o mesmo ângulo. Vale que $\angle AXB = \angle AYB = \alpha$ e estes são chamados de ângulos inscritos. Em palavras, os ângulos inscritos medem a metade do central correspondente (Figura 1).

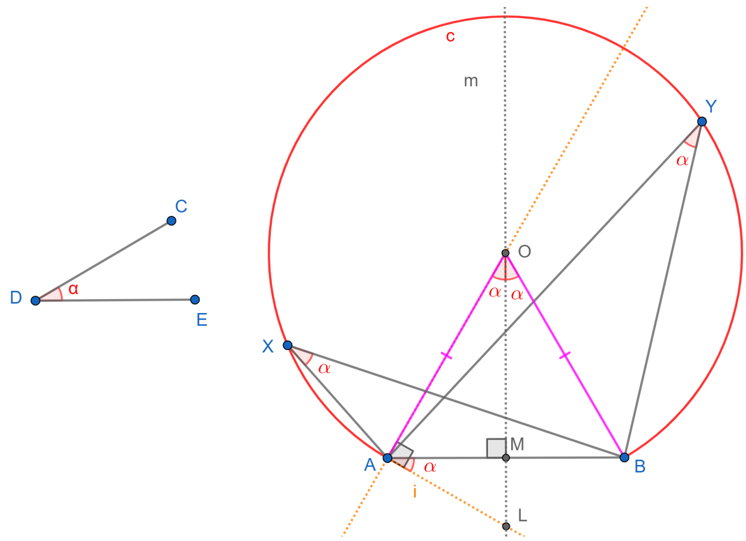

Figura 1: Construção do Arco Capaz no semiplano superior do segmento AB.

2.2 Quadrilátero inscritível ou cíclico

Definição 2. *Um quadrilátero é dito inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.*

Proposição 3 (Critério I)**.** *Um quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é* 180° :

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

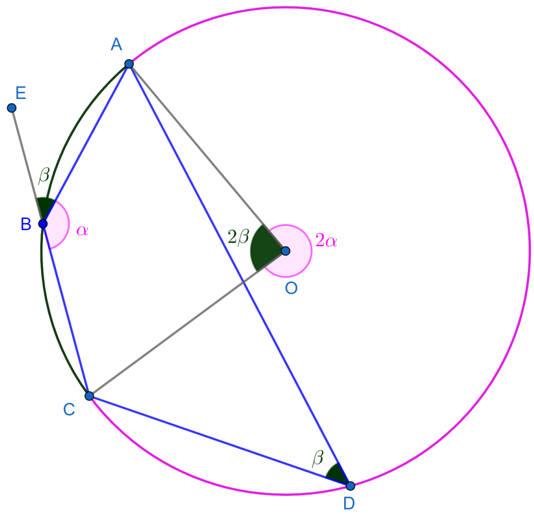

Figura 2: Guia para a ida da Proposição 3.

Demonstração. Inicialmente, suponha-se que $ABCD$ seja inscritível na circunferência de centro O (Figura 2). Considera-se o arco $\widehat{ADC}$ de medida 2α. Um ângulo inscrito correspondente ao mesmo é $\angle ABC = \alpha$. Por outro lado, seja o arco $\widehat{ABC}$ de medida 2β. Um ângulo inscrito correspondente será $\angle ADC = \beta$. Logo, uma volta completa em torno de O permite calcular:

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ,$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Isto é,

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ.$$

Seja E um ponto na prolongação do segmento CB, além de B. Vale que:

$$\angle EBA = \angle ADC = \beta.$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Para a recíproca (Figura 3), por hipótese, a soma dos ângulos opostos no quadrilátero convexo $ABCD$ é 180° :

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ.$$

Seja $\angle BCD = \alpha$, logo:

$$\angle DAB = 180^\circ - \alpha.$$

Suponha-se, por absurdo, que o quadrilátero $ABCD$ não seja inscritível e o ponto C esteja fora da circunferência k, circunscrita ao $\triangle ABD$. Traça-se a reta CB e marca-se o ponto E na interseção com k. Por construção, $ABED$ é inscritível e segue que:

$$\angle DAB + \angle BED = 180^\circ.$$

Logo, $\angle BED = \angle BCD = \alpha$. Contradição, pois o ângulo externo em E, do $\triangle DEC$, pode ser escrito como:

$$\angle BED = \angle BCD + \angle CDE.$$

No caso em que C está no interior de k a demonstração é análoga. □

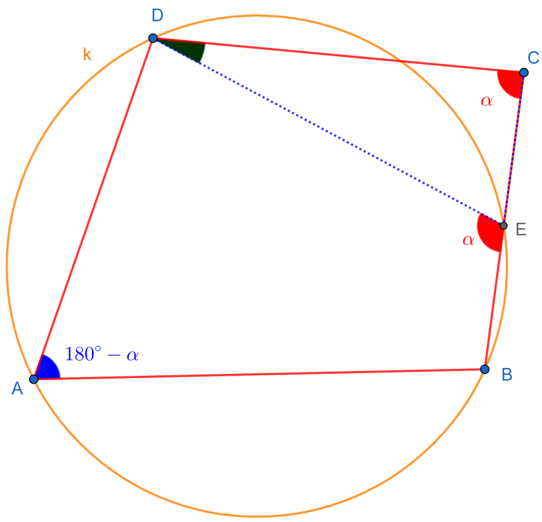

Figura 3: Guia para a volta da Proposição 3.

Proposição 4 (Critério II)**.** *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

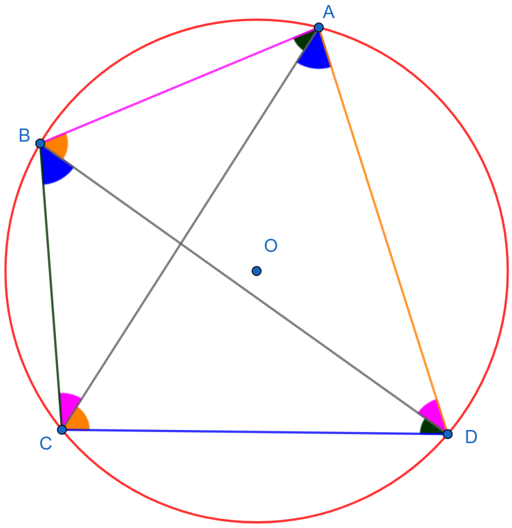

Figura 4: Guia para a ida da Proposição 4.

Demonstração. Inicialmente, suponha-se que $ABCD$ seja inscritível na circunferência de centro O (Figura 4). A prova segue do Exercício 1 (Construção do Arco Capaz). Para a recíproca (Figura 5), por hipótese, no quadrilátero convexo $ABCD$ vale que $\angle BDA = \angle BCA$. Suponha-se, por absurdo, que $ABCD$ não seja inscritível e o ponto C esteja no interior da circunferência k, circunscrita ao $\triangle ABD$. A semirreta BC intercepta k no ponto E. Por construção, $ABED$ é inscritível. Logo, $\angle BDA = \angle BEA$. Segue que $\angle BCA = \angle BEA$. Absurdo, pois no $\triangle ACE$ tem-se:

$$\angle BCA = \angle BEA + \angle EAC.$$

O caso em que C está fora de k é demonstrado de forma análoga. □

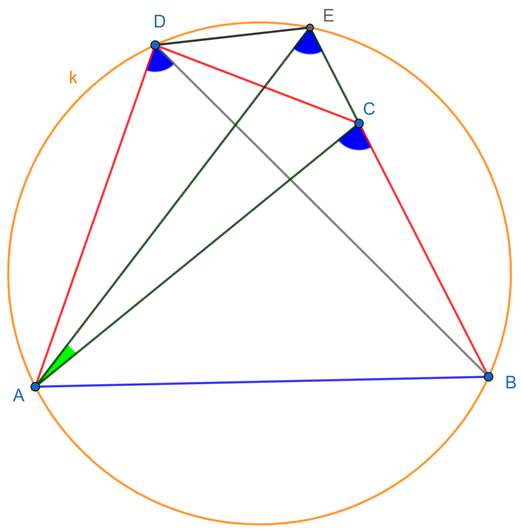

Figura 5: Guia para a volta da Proposição 4.

2.3 Teorema de Reim

Teorema 5. *Suponha-se que as circunferências w_1 e w_2 interceptam-se nos pontos A e B. Sejam os pontos $A_1, B_1 \in w_1$ e $A_2, B_2 \in w_2$ e os trios A, A_1, A_2 e B, B_1, B_2 colineares. Então as retas A_1B_1 e A_2B_2 são paralelas (Figura 6).*

Demonstração. Seja $\angle B_2A_2A = \alpha$. Como o quadrilátero ABB_2A_2 é inscritível, então

$$\angle ABB_2 = 180^\circ - \alpha.$$

Segue que $\angle B_1BA = \alpha$. Por outro lado, o quadrilátero AA_1B_1B é cíclico, então

$$\angle AA_1B_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Seja o ponto A_0 na semirreta AA_1, além A_1 ou a esquerda de A_1. Com isto, $\angle B_1A_1A_0 = \alpha$. Da igualdade $\angle B_1A_1A_0 = \angle B_2A_2A = \alpha$ e a recíproca de ângulos correspondentes entre paralelas encontra-se:

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2.$$

□

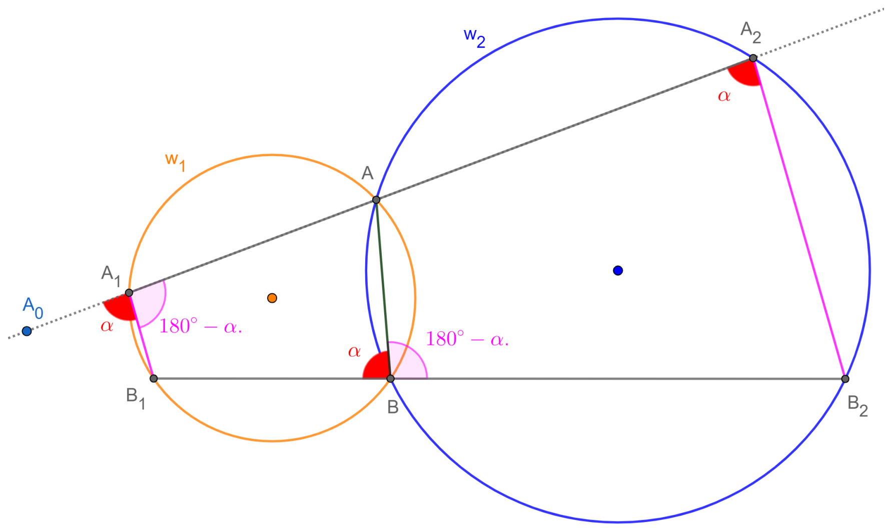

Figura 6: Guia para o Teorema 5.

2.4 Quadrilátero circunscritível ou tangencial

Definição 6. *Um quadrilátero (convexo ou não) é dito circunscritível ou tangencial quando é possível construir no interior deste uma circunferência que tangencia os quatro lados ou suas prorrogações.*

Na Figura 7 sejam as interseções das retas AB e CD e BC e AD os pontos J e I, respetivamente. Os quadriláteros $ABCD$ e $AJCI$ circunscrevem k ou k está inscrita em $ABCD$ e $AJCI$.

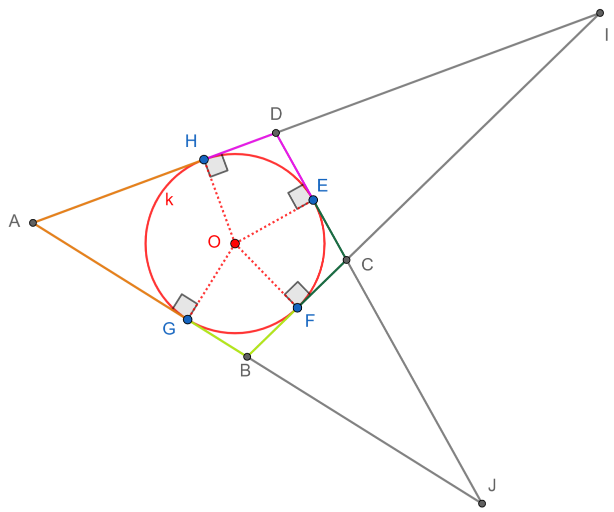

Figura 7: Guia para a Definição 6 e o Teorema 7.

Teorema 7 (Ida do teorema de Pitot)**.** *Com referência a Figura 7, se $ABCD$ for um quadrilátero circunscrito a uma circunferência k, então*

$$AB + CD = BC + AD.$$

Alternativamente, se $AJCI$ for um quadrilátero circunscrito a k, então

$$AJ + CI = AI + JC.$$

Demonstração. Sejam G, F, E e H os pontos de tangência da circunferência k com os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente (Figura 7). Tem-se:

$$AB + CD = (AG + GB) + (CE + ED).$$

Utilizando a igualdade dos segmentos tangentes $AG = HA$, $GB = BF$, $CE = FC$ e $ED = DH$ encontra-se:

$$AB + CD = (HA + BF) + (FC + DH),$$
$$AB + CD = (BF + FC) + (DH + HA),$$
$$AB + CD = BC + AD.$$

Analogamente,

$$AJ + CI = (AG + GJ) + (IF - FC).$$

Adicionalmente, $GJ = JE$ e $IF = HI$. Logo,

$$AJ + CI = (AH + JE) + (HI - EC),$$
$$AJ + CI = (AH + HI) + (JE - EC),$$
$$AJ + CI = AI + JC.$$

□

Teorema 8 (Volta do teorema de Pitot)**.** *Se $ABCD$ for um quadrilátero tal que*

$$AB + CD = BC + AD,$$

então $ABCD$ está circunscrito a uma circunferência k. Ou seja, $ABCD$ é circunscritível.

Demonstração. A demonstração é feita por redução ao absurdo. Suponha-se que o centro I da circunferência k encontra-se na interseção das bissetrizes dos ângulos CDA e DAB. Ou seja, k é tangente aos lados CD, DA e AB. Mas não é tangente ao lado BC (Figura 8).

Seja o ponto $E \in AB$ tal que CE é tangente a k. Considera-se o caso em que BC não intercepta k. Pelo Teorema 7 (Ida de Pitot) vale que:

$$AE + CD = CE + AD.$$

Por hipótese tem-se:

$$AB + CD = BC + AD.$$

Da diferença das duas últimas equações encontra-se:

$$AB - AE = EB = BC - CE.$$

Ou seja:

$$CE + EB = BC.$$

Mas a última igualdade está em contradição com a desigualdade triangular aplicada no $\triangle BCE$. O estudo do caso em que BC e k interceptam-se em dois pontos é análogo. □

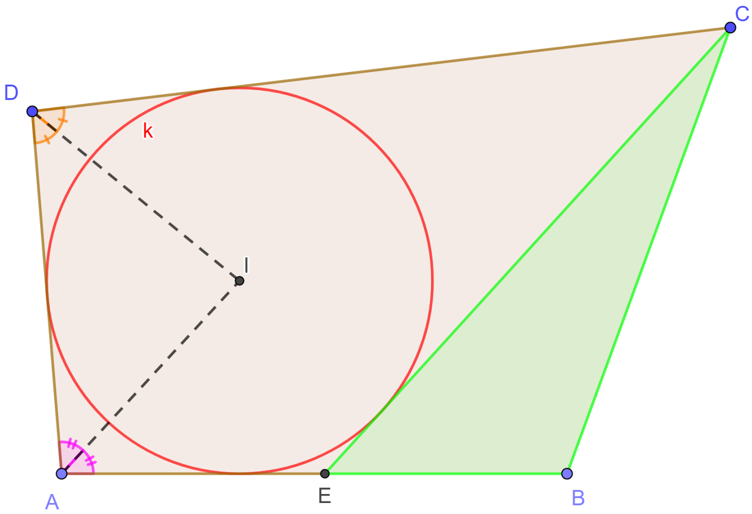

Figura 8: Guia para o Teorema 8.

3 Problemas olímpicos resolvidos

3.1 Quadriláteros cíclicos, triângulo circunscrito e desigualdades. P4 IMO 1967.

Problema 1. *São dados dois triângulos acutângulos: $\triangle A_0B_0C_0$ e $\triangle A'B'C'$. Descrever como construir um $\triangle ABC$, semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e circunscrito ao $\triangle A_0B_0C_0$, de tal forma que A, B e C correspondam a A', B' e C' e AB passe por C_0, BC por A_0 e CA por B_0. Entre os $\triangle ABC$ possíveis, descrever e provar qual é o de área maior.*

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, Montenegro (Antiga Iugoslávia). Problema 29 da lista longa e escolhido como P4 da competição, proposto pela delegação da Itália (DJUKIC *et al*, 2011).

3.1.1 Resolução do Problema 1

Construir o Arco Capaz l_a do $\angle A' = \alpha$ no lado de B_0C_0 oposto com A_0 (Exercício 1). Seja S_a o centro da circunferência k_a, do qual o arco l_a faz parte. Isto é, $l_a \subset k_a$ (Figura 9). Analogamente, construir os arcos capazes l_b e l_c dos $\angle B' = \beta$ e $\angle C' = \gamma$ no lado de C_0A_0 oposto com B_0 e no lado de A_0B_0 oposto com C_0. Sejam S_b e S_c os centros das circunferências k_b e k_c, dos quais os arcos l_b e l_c fazem parte. Ou seja, $l_b \subset k_b$ e $l_c \subset k_c$.

Posicionar $A \in l_a$, construir as semirretas AC_0 e AB_0 e marcar os pontos $B = AC_0 \cap l_b$ e $C = AB_0 \cap l_c$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ e $B_0 \in CA$. Seja o ponto $S = k_a \cap k_b \neq C_0$. Tem-se $\angle B_0AC_0 = \alpha$, $\angle C_0BA_0 = \beta$ e $\angle A_0CB_0 = \gamma$. Dos quadriláteros B_0AC_0S e C_0BA_0S serem inscritíveis encontra-se que $\angle B_0SC_0 = 180° - \alpha$ e $\angle C_0SA_0 = 180° - \beta$. Logo, $\angle A_0SB_0 = \alpha + \beta$. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ segue que o quadrilátero A_0CB_0S é cíclico e $S \in k_c$. A Figura 9 mostra uma construção geométrica inicial.

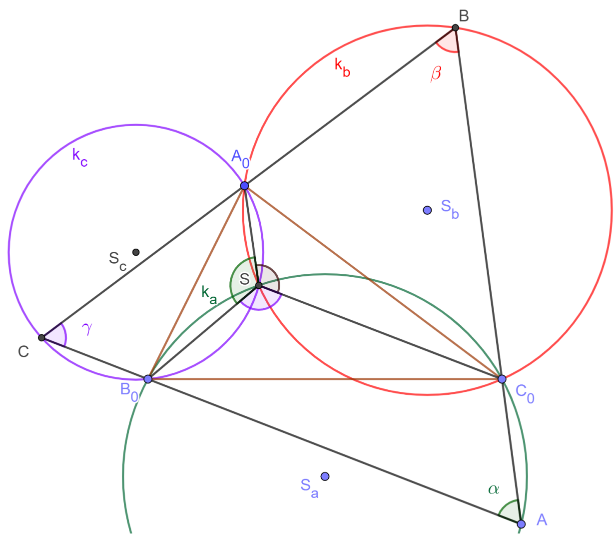

Figura 9: Uma construção geométrica inicial para o Problema 1.

Construir os pontos simétricos de S com respeito a S_a, S_b e S_c e chama-los de A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Como SB_1 e SC_1 são diâmetros de k_b e k_c segue que $\angle SA_0B_1 = \angle SA_0C_1 = 90°$ e $A_0 \in B_1C_1$. Analogamente, $B_0 \in C_1A_1$ e $C_0 \in A_1B_1$. Ou seja, o $\triangle A_1B_1C_1$ satisfaz as condições do problema. Provar-se-á que entre os triângulos $\triangle ABC$ o triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área.

Mostra-se primeiro que $BC \leq B_1C_1$. Sejam S'_b e S'_c as projeções de S_b e S_c sobre BC. Os triângulos S_bBA_0, S_cCA_0, $S_bB_1A_0$ e $S_cC_1A_0$ são isósceles. Logo, $BC = 2S'_bS'_c$ e $B_1C_1 = 2S_bS_c$. No trapézio retângulo $S_bS'_bS'_cS_c$ tem-se $S'_bS'_c \leq S_bS_c$ e consequentemente $BC \leq B_1C_1$. De forma semelhante mostra-se que $CA \leq C_1A_1$ e $AB \leq A_1B_1$. Isso demonstra que o $\triangle A_1B_1C_1$ é o de maior área. A Figura 10 ilustra uma construção geométrica com o problema resolvido.

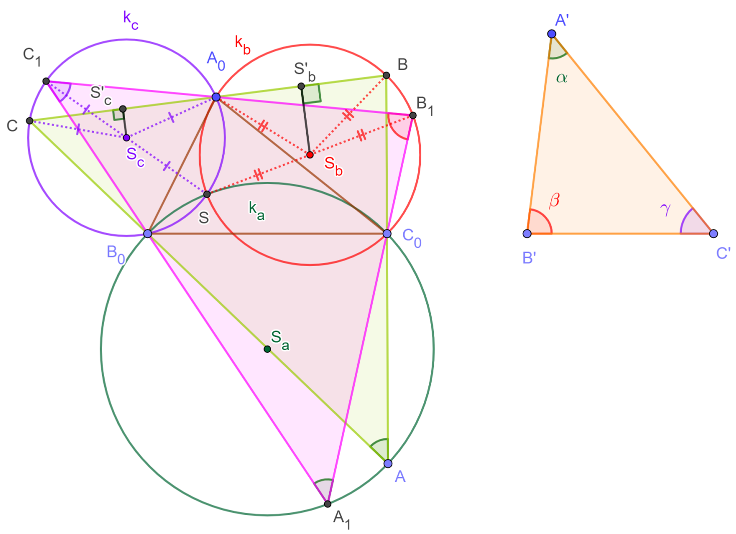

Figura 10: Construção geométrica da resolução do Problema 1.

3.2 Eixo e centro radical, quadriláteros cíclicos, ângulos. P5 IMO 1985.

Problema 2. *Um círculo de centro O passa pelos vértices A e C de um triângulo ABC e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N, respectivamente. Os círculos circunscritos aos triângulos ABC e KBN intersectam-se em exatamente 2 pontos distintos B e M. Provar que $\angle OMB = 90°$.*

A IMO 1985 foi realizada na cidade de Joutsa, Finlândia. Problema 22 da lista curta e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da Rússia (DJUKIC *et al*, 2011).

3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 11 mostra uma construção geométrica inicial.

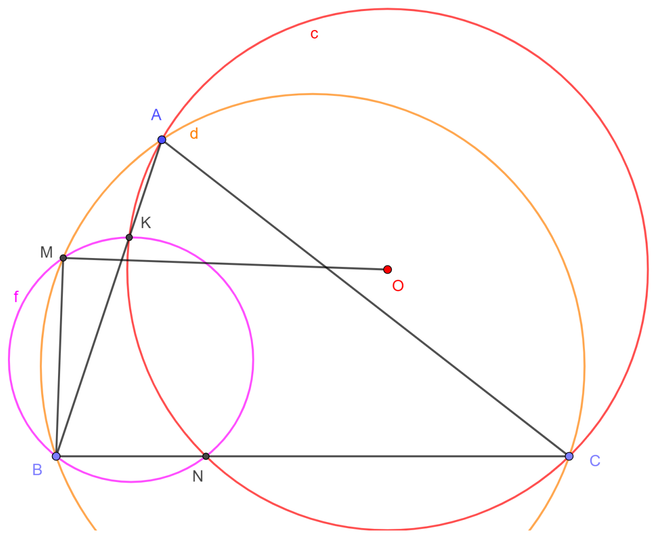

Figura 11: Construção geométrica inicial para o Problema 2.

Sejam c, d e f a circunferência de centro O, a circunscrita ao $\triangle ABC$ e ao $\triangle KBN$, respectivamente. As retas AC, KN, e MB são eixos radicais das circunferências c, e d, c e f e d e f, respectivamente (MUNIZ NETO, 2013). Seja P o centro radical das três circunferências anteriores (Figura 12). Isto é,

$$P = AC \cap KN \cap MB.$$

Como os quadriláteros $BNKM$ e $NCAK$ são cíclicos tem-se:

$$180° = \angle PMK + \angle BMK = \angle BNK + \angle CNK = \angle CAK + \angle PAK.$$

Logo, o quadrilátero $PMKA$ é cíclico. Seja E a segunda interseção da linha MA com a circunferência c. Como o quadrilátero $KNEA$ é cíclico:

$$\angle MEN = \angle AEN = \angle AKP = \angle AMP.$$

Segue que $BP \parallel MP \parallel NE$ e bastará mostrar que $OM \perp EN$. Mas também tem-se:

$$\angle MNE = \angle BMN = \angle BKN = \angle MEN.$$

Os triângulos MEN e OEN são isósceles com a mesma base EN, segue que $ME = MN$ e $OE = ON$. Os pontos O e M pertencem a mediatriz do segmento EN, disto é concluído que $OM \perp EN$. A Figura 12 mostra uma construção geométrica.

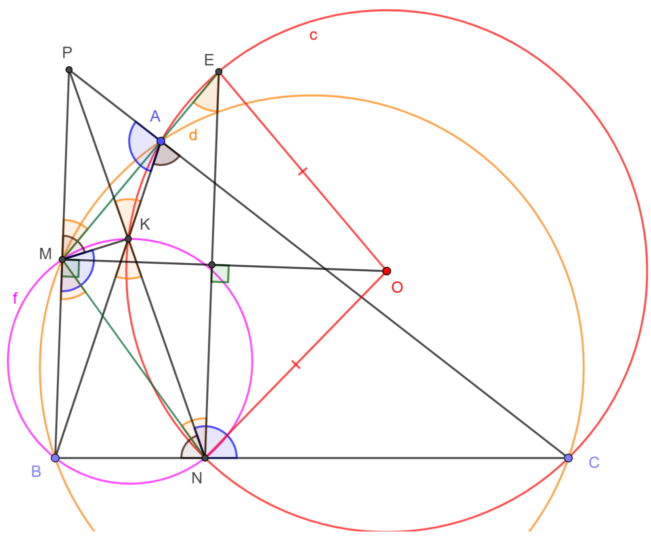

Figura 12: Construção geométrica para o Problema 2.

3.3 Potência de ponto relativo a circunferência, base média, semelhança. P2 IMO 2009.

Problema 3. *Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Sejam P e Q pontos no interior dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e seja Γ o círculo que passa por K, L e M. Se PQ é tangente a Γ, provar que $OP = OQ$.*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Problema 17 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação da Rússia (DJUKIC *et al*, 2011).

3.3.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial. Seja c a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e O' o centro de Γ. No $\triangle PQB$ tem-se que M e K são pontos médios (Figura 14). Logo, $MK \parallel QB \parallel AB$ e

$$\frac{MK}{QB} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente, no $\triangle PQC$ tem-se que M e L são pontos médios. Segue que $ML \parallel PC \parallel AC$ e

$$\frac{ML}{PC} = \frac{1}{2}.$$

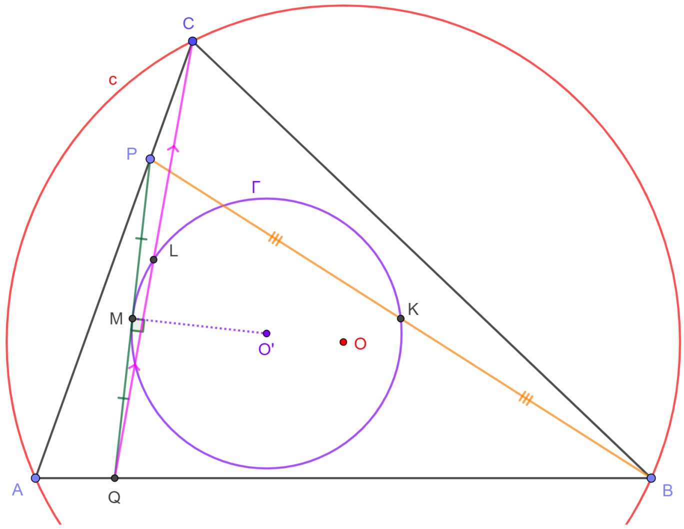

Figura 13: Construção geométrica inicial para o Problema 3.

Por serem ângulos formados de segmentos mutuamente paralelos encontra-se:

$$\angle KML = \angle BAC.$$

Adicionalmente, vale que:

$$\frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}. \tag{1}$$

Por ângulos alterno entre paralelas $\angle AQP = \angle KMQ$. Como PQ é tangente a Γ, referente a corda KM, tem-se a igualdade de um ângulo de segmento com um inscrito $\angle KMQ = \angle MLK$. Segue que $\triangle AQP \sim \triangle MLK$,

$$\frac{AQ}{ML} = \frac{AP}{MK} = \frac{QP}{LK}. \tag{2}$$

De (1) e (2) tem-se:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{PC}{QB}.$$

Logo,

$$AQ \cdot QB = AP \cdot PC. \tag{3}$$

A equação (3) indica que a potência de Q e P em relação a circunferência c é a mesma:

$$Pot_c(Q) = OA^2 - OQ^2 = OA^2 - OP^2 = Pot_c(P).$$

Isto é, $OQ = OP$. A Figura 14 mostra uma construção geométrica.

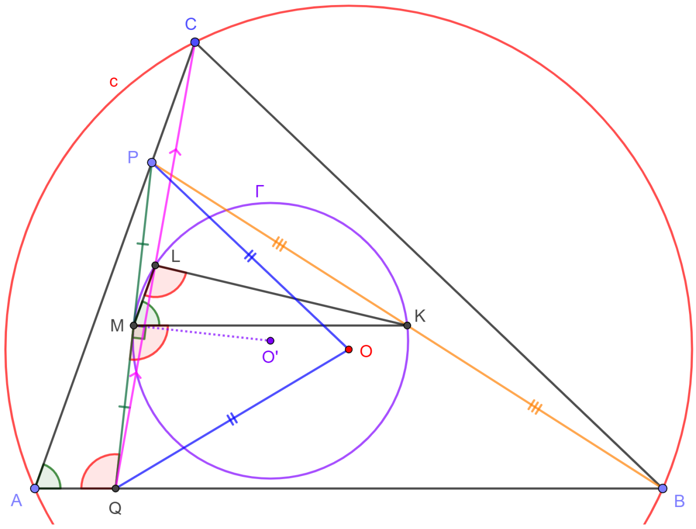

Figura 14: Construção geométrica para o Problema 3.

3.4 Quadrilátero circunscritível, teorema de Pitot, incentro e ortocentro. P23 SL IMO 2009.

Problema 4. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Seja g uma reta que passa por A e encontra as retas BC e CD em M e N, respectivamente. Denotar por I_1, I_2, e I_3 os incentros dos $\triangle ABM$, $\triangle MNC$ e $\triangle NDA$, respectivamente. Mostrar que o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$ está sobre g.*

A IMO 2009 foi realizada na cidade de Brémen, Alemanha. Problema 23 da lista curta, proposto pela delegação da Bulgária (DJUKIC *et al*, 2011).

3.4.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 15 mostra uma construção geométrica inicial. A circunferência c ilustra que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Pelo Teorema 7 (ida de Pitot) vale que:

$$AB + CD = AD + BC. \tag{4}$$

Sejam k_1, k_2 e k_3 os incírculos dos triângulos ABM, MNC, e NDA, respectivamente (Figura 16). É construída a reta tangente h de C a k_1, diferente de CB. Será mostrado que h também é tangente a k_3.

Seja o ponto $X = g \cap h$. Nota-se que os lados (ou suas extensões) do quadrilátero $ABCX$, são tangentes a k_1. Pelo Teorema 7 (ida de Pitot) vale:

$$AB + CX = BC + AX. \tag{5}$$

Somando e subtraindo AB e das equações (4) e (5) segue que:

$$CD - CX = (AB + CD) - (AB + CX) =$$

$$= (AD + BC) - (BC + AX) = AD - AX.$$

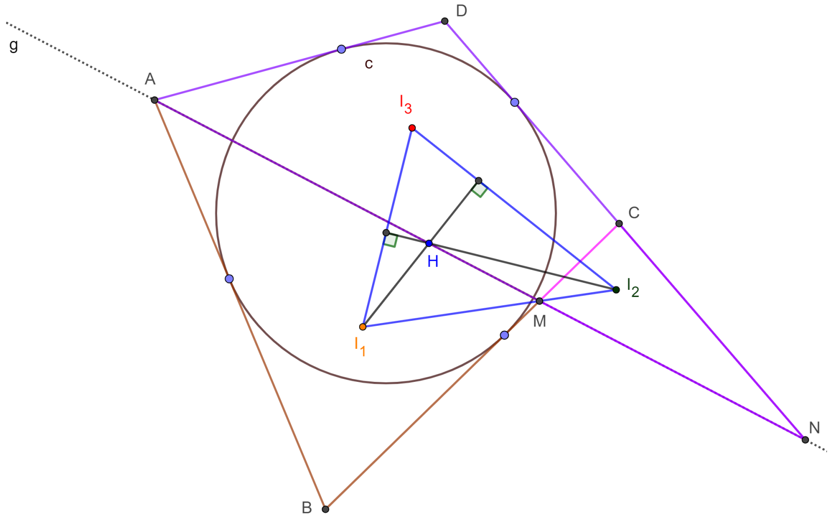

Figura 15: Construção geométrica inicial para o Problema 4.

Isto é,

$$CD + AX = AD + CX.$$

Pelo Teorema 8 (volta de Pitot), o quadrilátero $ADCX$ também é circunscritível, assim como h é tangente à k_3. Adicionalmente, como I_3C, I_2C, I_1C, I_3N e I_1I_2 são bissetrizes, encontra-se:

$$\angle I_3CI_1 = \angle I_3CX + \angle XCI_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle DCX + \angle XCB) = \frac{1}{2}\angle DCB =$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MCN) = 180^\circ - \angle MI_2N = \angle I_3I_2I_1.$$

O anterior permite concluir que os pontos C, I_1, I_2 e I_3 pertencem a uma mesma circunferência d.

Sejam L_1 e L_3 as reflexões do ponto C em relação as retas I_2I_3 e I_1I_2, respectivamente. Como I_2I_3 é bissetriz do $\angle CNM$ e I_1I_2 do $\angle CMN$ segue que $L_1 \in g$ e $L_3 \in g$.

Seja H o ortocentro do $\triangle I_1I_2I_3$. Tem-se:

$$\angle I_2L_3I_1 = \angle I_1CI_2 = \angle I_1I_3I_2 = 180^\circ - \angle I_1HI_2.$$

Isto significa que o quadrilátero $I_2HI_1L_3$ é cíclico. Analogamente, $I_3HL_1I_2$ é inscritível. Na configuração da Figura 16 encontra-se:

$$\angle L_3HI_2 = \angle L_3I_1I_2 = \angle I_2I_1C =$$

$$= \angle I_2I_3C = \angle L_1I_3I_2 = \angle L_1HI_2.$$

Portanto, L_1, L_3 e H são colineares. Como $L_1 \neq L_3$, o problema fica demonstrado.

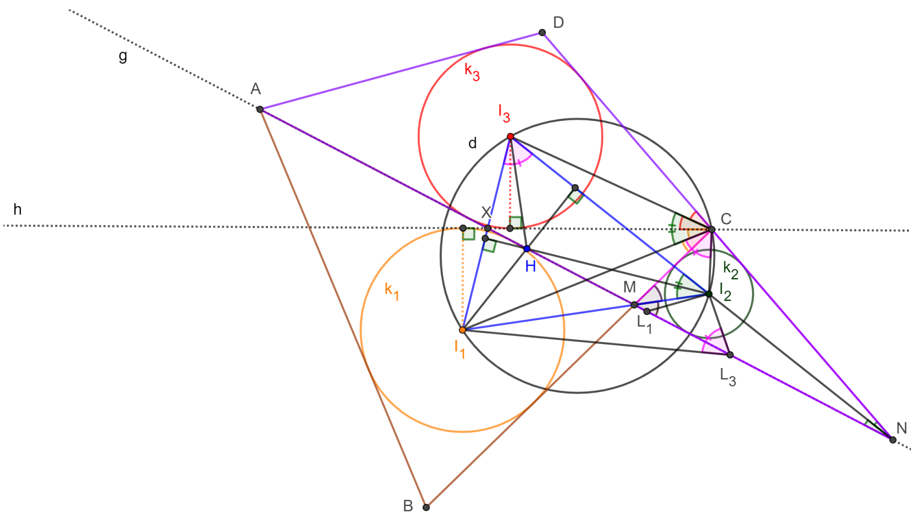

Figura 16: Construção geométrica para o Problema 4.

3.5 Quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulo isósceles. P1 NA IGO 2015.

Problema 5. *Dois círculos w_1 e w_2 (com centros O_1 e O_2, respectivamente) intersectam-se em A e B. Sejam os pontos $X \in w_2$ e $Y \in w_1$ tal que $\angle XBY = 90°$. Sejam ainda X' o segundo ponto de interseção da reta O_1X e w_2 e K o segundo ponto de interseção de $X'Y$ e w_2. Provar que X é o ponto médio do arco AK.*

Problema 1 (Nível Avançado) da 2 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Davood Vakili.

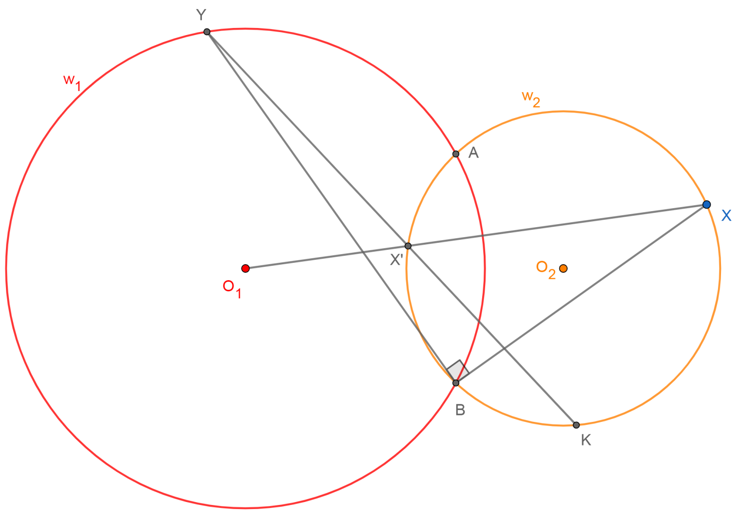

Figura 17: Uma construção geométrica inicial para o Problema 5.

3.5.1 Resolução do Problema 5

A Figura 17 mostra uma construção geométrica inicial para o problema. Seja Z o ponto de interseção do prolongamento de BX e w_1 (Figura 18). Como $\angle YBZ = 90°$, então os pontos Y, O_1 e Z são colineares. Do quadrilátero cíclico $YZBA$ segue:

$$\angle O_1YA = \angle ZYA = \angle ABX.$$

Tem-se $\angle AX'X = \angle ABX$, pois enxergam o mesmo arco AX de w_2. Como $\angle AX'X = \angle O_1YA$, o quadrilátero $YO_1X'A$ também é cíclico, circunferência w_3. De $O_1Y = O_1A$ encontra-se:

$$\angle O_1AY = \angle O_1YA.$$

Adicionalmente, $\angle YAO_1 = \angle YX'O_1$, pois enxergam o mesmo arco YO_1 de w_3. Por ângulos opostos pelo vértice $\angle YX'O_1 = \angle KX'X$. Como $\angle AX'X = \angle KX'X$ os arcos menores AX e XK de w_2 tem a mesma medida. Isto é, X é o ponto médio do arco AXK. A Figura 18 mostra uma construção geométrica com o problema resolvido.

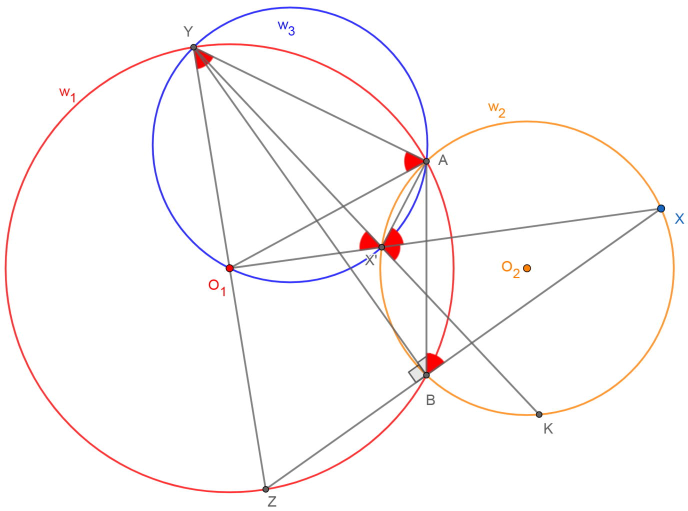

Figura 18: Construção geométrica da resolução do Problema 5.

4 Comentários finais

Foram discutidos em detalhe cinco problemas propostos para olimpíadas internacional de Matemática. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas no GeoGebra.

No Problema 1, P4 da IMO 1967, foram dados dois triângulos acutângulos e foi pedido descrever a construção de um terceiro semelhante ao segundo e circunscrito no primeiro. Ainda solicitou-se indicar e justificar qual desses triângulos possíveis é o de maior área. O uso do conceito de Arco Capaz, quadriláteros inscritíveis e projeções solucionou o desafio.

O Problema 2, P5 da IMO 1985, iniciou com a construção de três circunferências e requereu determinar um ângulo. Foram utilizadas as definições de eixo e centro radical e quadriláteros cíclicos.

No Problema 3, P2 da IMO 2009, um conjunto de construções foram feitas em um triângulo e pediu-se provar que a tangência a uma circunferência implica na igualdade de dois segmentos. Foram utilizados na resolução a potência de ponto, o teorema da base média e propriedades de semelhança.

O Problema 4, P23 da lista curta da IMO 2009, partiu de um quadrilátero circunscritível e os incentros de três triângulos. Solicitou-se provar uma propriedade do ortocentro do triângulo formado pelos incentros. Na solução utilizou-se o Teorema de Pitot.

No Problema 5, P1 do nível avançado da IGO 2015, uma construção geométricas com duas circunferências foi dada e pedido provar que determinado ponto divide um arco a metade. Foram utilizadas as propriedades de quadriláteros cíclicos, ângulos na circunferência e triângulos isósceles.

5 Bibliografia

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. 2nd ed. New York: Springer, 2011.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção ProfMat).