Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Um passeio pela sequência repunidade

A walk through the repunit sequence

Eudes Antonio Costa
Câmpus de Arraias
Universidade Federal do Tocantins
eudes@uft.edu.br

Douglas Catulio dos Santos
Câmpus de Barreiras
Instituto Federal da Bahia
douglascatulio@ifba.edu.br

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma sequência formada apenas pelos números *repunidades* R_n, em que R_n indica os números formados pela repetição da unidade, tal abordagem ocorre em referência às propriedades das sequências de Lucas, conforme abordado por Jaroma (2007). Em destaque, para a sequência numérica das repunidades mostramos que também valem as Identidades de Catalan e Cassini. Em 1978 Yates afirmara que existe um fascínio pelos números *repunidades*, que advém da sua aplicação em vários problemas de recreação matemática. Aqui também exibimos algumas propriedades inerentes a classe numérica dos R_n, mostramos algumas relações entre *repunidades* e potências de *repunidades* com algum expoente natural; e mais, estudamos a relação de divisibilidade entre seus termos, em especial a característica do fator primo da *repunidade*. Ademais, provamos a conjectura proposta por Costa e Santos (2022) acerca do quociente de um tipo de repunidade.

Palavras-chave: Primo. Repunidade. Sequência.

Abstract

In this work, we consider a sequence formed only by *repunit* numbers R_n, where R_n denotes the numbers formed by repeating the digit 1. This approach has related to the properties of Lucas sequences, as discussed by Jaroma (2007). We highlight that for the numerical sequence of repunit numbers, the Catalan and Cassini identities also hold. In 1978, Yates claimed that there is a fascination with *repunit* numbers, which stems from their application in various recreational math problems. Here, we also exhibit some inherent properties of the numerical class of R_n, show some relationships between *repunit* numbers and powers of *repunit* numbers with natural exponents; furthermore, we study the divisibility relationship among its terms, particularly the prime factor characteristic of *repunit* numbers. Additionally, we prove the conjecture proposed by Costa and Santos (2022) regarding the quotient of a type of *repunit* number.

Keywords: Prime. Repunit. Sequence.

Artigo recebido em fev. 2023 e aceito em jun. 2023

1 Introdução

Sendo n um número inteiro não negativo ou natural, dizemos que n é uma *repunidade* quando sua representação num sistema numérico posicional de base $b > 1$, consiste apenas na repetição do algarismo ou dígito 1; por exemplo no sistema decimal, ou seja, base $b = 10$, os números 1, 11, 111, 111, 1111 e 11111 são exemplos de *repunidades*. O termo repunidade foi usado pela primeira em Beiler[1], no qual mostrou algumas *repunidades* primas, bem como apresentou a fatoração ou divisores para algumas *repunidades*. Em notação decimal, e de acordo com [1, 2, 3, 4, 5, 6], a Equação (1), à seguir, representa a fórmula de Binet para as repunidades:

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}, \text{ para todo } n \geq 1 \ . \tag{1}$$

Para todo natural $n \geq 1$, R_n denota a $n-$ésima repunidade, e mais,

$$R_n = 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{\text{n vezes}} \ .$$

Tomemos o seguinte problema motivador:

Problema 1. *[7] Mostre que a sequência de números* $49,\ 4489,\ 444889,\ \ldots$, *obtidos colocando o número 48 no meio do número anterior, são quadrados de números inteiros.*

Resolução: Observe as igualdades

$$\begin{aligned} 49 &= 48 + 1 = \ 4 \cdot 1 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 1 \\ 4489 &= 4488 + 1 = \ 4 \cdot 11 \cdot 10^2 + 8 \cdot 11 + 1 \\ 444889 &= 444888 + 1 = \ 4 \cdot 111 \cdot 10^3 + 8 \cdot 111 + 1 \ . \end{aligned}$$

De modo geral, para $n \geq 1$ seja a_n o termo geral da sequência, ou seja,

$$a_n = \underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9 = 4 \cdot 10^n(\underbrace{11\ldots1}_{n}) + 8(\underbrace{11\ldots1}_{n}) + 1 = 4 \cdot 10^n \cdot R_n + 8 \cdot R_n + 1 \ ,$$

segue da Equação (1) que:

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 10^n \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + 8\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + \frac{9}{9} \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n + 1}{9} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2 \ . \end{aligned}$$

Como o número $2 \cdot 10^n + 1$ é divisível por 3, visto que a soma dos algarismos é $2 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 3$, assim o número a_n é inteiro. Disto concluímos que cada a_n é um quadrado perfeito para todo n natural.

Nota 2. *Vale ressaltar que situação semelhante ao problema anterior é explorada por Tahan[8], na qual são apresentados alguns casos particulares como curiosidade, porém o autor não exibe nenhuma demonstração formal ou qualquer justificativa para este fato.*

Em geral, pode ser desafiador provar que uma razão entre dois números inteiros é, por si só, um número inteiro. Por exemplo, o problema apresentado em [9, Problema 1] exigia mostrar que a expressão abaixo é um número inteiro para todo q inteiro:

$$\frac{10^{18q11^{k-1}} + 10^{16q11^{k-1}} + \cdots + 10^{2q11^{k-1}} + 1}{10^{2q11^{k-1}} - 1}$$

Nosso resultado principal, como exposto no Teorema 35, mostra que tal problema tem uma solução inteira. Além disso, em [9, Teorema 3], demonstramos que se $p > 3$ é um número primo e R_p é composto, então qualquer divisor primo q de R_p deve ser da forma $2px + 1$, onde x é um número natural adequado. No entanto, aprimoramos esse resultado e mostramos que, na verdade, q deve ser da forma $6z \pm 1$, conforme descrito pelo Teorema 40.

Nestas notas, apresentamos uma parte do nosso estudo relacionado aos números repunidades. Nosso objetivo é destacar alguns resultados (novos) que obtivemos, os quais não possuem referências indicadas. Em destaque, na Seção 4 apresentamos o nosso principal resultado, o Teorema 35, conjecturado em [9, Problema 1], além de mostrarmos um critério de divisibilidade de $(R_n)^2$ para todo n natural. Ressaltamos que estes "novos" resultados podem não ser inéditos, visto que suas demonstrações não exigem recursos, técnicas ou ideias incomuns. Porém, apresentamos tais proposições e a "nossa" demonstração, uma vez que elas não foram encontradas nas referências consultadas.

2 Repunidades e sequências

Nesta seção apresentamos alguns resultados explorando relações interessantes que fornecem termos na sequência numérica das *repunidades*.

Em geral dizemos que uma sequência é *recorrente* de ordem k, quando o termo sucessor é determinado em relação (ou associado) a k termos antecessores dados, não todos nulos, veja [10, 11]. Por exemplo, as *sequências de Lucas* são aquelas sequências de números inteiros que satisfazem a relação de recorrência

$$L_{n+1} = pL_n - qL_{n-1} \ , \forall\, n \geq 1 \ . \tag{2}$$

em que p e q são fixos, L_n e L_{n-1} dados. Assim a *sequência de Lucas*, dada na Equação (2), é uma equação de *recorrência* de ordem 2. Por exemplo, considerando $p = q = 1$, $L_0 = 1$ e $L_1 = 2$ obtemos a sequência de Lucas $1, 2, 1, -1, -2, \ldots$.

A sequência de Lucas possui propriedades semelhantes às sequência de Fibonacci e de Pell, as quais não serão tratadas nestas notas. Para maiores detalhes acerca das mesmas consulte, por exemplo, [10, 11, 12]. Entretanto ainda é pouco explorada no ensino básico ficando restrita ao ensino superior, aos diletantes das recreações matemáticas e a alguns problemas olímpicos.

Jaroma [13] mostrou que em qualquer sistema posicional de base $b > 1$ os números *repunidades* formam uma sequência recorrente de Lucas de ordem 2. Na Equação (2), fixando os números inteiros $p = 11$ e $q = 10$, definimos recursivamente as repunidades por intermédio da recorrência:

$$R_0 = 0 \ , R_1 = 1 \ \text{ e } R_{n+1} = 11R_n - 10R_{n-1} \ , \tag{3}$$

em que R_n denota a n−ésima repunidade, e por conveniência usamos $R_0 = 0$.

O primeiro resultado exibe uma combinação linear de dois outros termos, a saber temos:

Proposição 3. *Para quaisquer m, n naturais, temos $R_{m+n} = R_m R_{n+1} - 10R_{m-1}R_n$.*

Demonstração. Segue da Equação (1) que

$$\begin{aligned}
&R_m R_{n+1} - 10R_{m-1}R_n = \\
&= \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9}\right) - 10\left(\frac{10^{m-1} - 1}{9}\right)\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) \\
&= \left(\frac{10^{n+m+1} - 10^m - 10^{n+1} + 1}{81}\right) - 10\left(\frac{10^{n+m-1} - 10^{m-1} - 10^n + 1}{81}\right) \\
&= \frac{10^{n+m+1} - 10^m - 10^{n+1} + 1 - 10^{n+m} + 10^m + 10^{n+1} - 1}{81} \\
&= 9\left(\frac{10^{m+n} - 1}{81}\right) = \frac{10^{m+n} - 1}{9} = R_{m+n}\ .
\end{aligned}$$

Disto obtemos o resultado. □

Como consequência direta da Proposição 3, temos:

Corolário 4. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, então:*

(a) $R_{2n-1} = R_n^2 - 10R_{n-1}^2$;

(b) $R_{2n} = 2R_n R_{n-1} - 11R_n^2$.

Demonstração. *(a)* Como $2n - 1 = n + (n-1)$, segue da Proposição 3 que

$$\begin{aligned}
R_{2n-1} &= R_{n+(n-1)} \\
&= R_n R_n - 10R_{n-1}R_{n-1} \\
&= R_n^2 - 10R_{n-1}^2\ .
\end{aligned}$$

(b) Veja que da Equação (3) temos que $R_{n+1} - 11R_n = -10R_{n-1}$, e da Proposição 3, segue que $R_{2n} = R_n R_{n+1} - 10R_{n-1}R_n$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
R_{2n} &= R_n R_{n+1} - 10R_{n-1}R_n \\
&= R_n R_{n+1} + (R_{n+1} - 11R_n)R_n \\
&= R_n R_{n+1} + R_n R_{n+1} - 11R_n^2 \\
&= 2R_n R_{n+1} - 11R_n^2\ .
\end{aligned}$$

□

De modo semelhante à Proposição 3 temos:

Proposição 5. *Sejam m, n naturais quaisquer. Para $m \geq n$ tem-se*

$$10^n R_{m-n} = R_n R_{m+1} - R_{n-1}R_m\ .$$

Demonstração. Usando novamente Equação (1) obtemos que

$$\begin{aligned} R_m R_{n+1} - R_{m+1} R_n &= \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)\left(\frac{10^{n+1} - 1}{9}\right) - \left(\frac{10^{m+1} - 1}{9}\right)\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) \\ &= \frac{10^{m+1} - 10^{n+1} - 10^m + 10^n}{81} = 9\left(\frac{10^m - 10^n}{81}\right) \\ &= \frac{10^m - 10^n}{9} = \frac{10^n(10^{m-n} - 1)}{9} = 10^n R_{m-n}\ , \end{aligned}$$

e temos a validade do resultado. □

Proposição 6 (Identidade de Catalan)**.** *Sejam m, n naturais quaisquer. Para $m \geq n$ tem-se*

$$R_m^2 - R_{m-n} R_{m+n} = \frac{10^{m+n} + 10^{m-n} - 2 \cdot 10^m}{81}\ .$$

Demonstração. Decorre da Equação (1) que

$$\begin{aligned} R_m^2 - R_{m-n} R_{m+n} &= \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)^2 - \left(\frac{10^{m-n} - 1}{9}\right)\left(\frac{10^{m+n} - 1}{9}\right) \\ &= \frac{10^{2m} - 2 \cdot 10^m + 1 - 10^{2m} + 10^{m+n} + 10^{m-n} - 1}{81} \\ &= \frac{10^{m+n} + 10^{m-n} - 2 \cdot 10^m}{81}\ . \end{aligned}$$

□

Fazendo $n = 1$, sem muito esforço, segue diretamente da Proposição 6 que:

Corolário 7 (Identidade de Cassini)**.** *Para todo $m \geq 1$, tem-se $R_m^2 - R_{m+1} R_{m-1} = 10^{m-1}$.*

Nota 8. *De acordo com Noronha e Alves [12], as igualdades (identidades) $S_m^2 - S_{m-n} S_{m+n} = X$ e $S_m^2 - S_{m-1} S_{m+1} = Y$ são conhecidas, respectivamente, por Identidade de Catalan e Identidade de Cassini para uma sequência S_n, em que X e Y são números inteiros. As quais nos motivaram a verificar a validade da tais identidades para as repunidades.*

Para finalizar esta seção apontamos a soma parcial de termos de R_n.

Proposição 9. *Seja $(R_n)_{n \geq 1}$ o n-ésimo número repunidade, então*

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \frac{R_{n+1} - (n+1)}{9}\ .$$

Demonstração. Aplicaremos a indução sobre n. Para n=1 é fácil obter que $R_1 = \dfrac{11 - 2}{9} = 1$. Isso garante a validade da sentença para $n = 1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a sentença $\sum_{k=0}^{n} R_k = \frac{R_{n+1} - (n+1)}{9}$ seja válida. Devemos mostrar a validade para $n+1$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} R_k &= \sum_{k=0}^{n} R_k + R_{n+1} \\
&= \frac{R_{n+1} - (n+1)}{9} + R_{n+1} \\
&= \frac{1}{9}(10R_{n+1} - n + 1) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+2} - 10 - 9n - 9}{9}\right) \\
&= \frac{R_{n+2} - (n+2)}{9} \ .
\end{aligned}$$

E temos a validade do resultado. □

Segue diretamente da Proposição 9 que

Corolário 10. *[2] Seja $(R_n)_{n\geq 1}$ um número repunidade, então*

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} \ .$$

Demonstração. Basta aplicar a Equação 1 na Proposição 9 que o resultado segue. □

3 MDC e potências de repunidades

Para o restante do texto seria interessante ou esperado que o leitor tenha alguma familiaridade (preliminares) com certos conceitos e propriedades de sistema de numeração, divisibilidade e congruência, caso precise consultar recomendamos [11, 14, 15]. Além disso, faremos uso de alguns fatos conhecidos (Lemas) que serão utilizados como arcabouço conceitual para as demonstrações dos resultados principais deste estudo; salientamos que as demonstrações para os mesmos podem ser consultadas nas referências indicadas em cada um deles.

Lembramos que, dados dois inteiros a e b, o maior divisor comum (mdc) entre eles é indicado por (a, b). A seguir, apresentamos o clássico resultado conhecido como *algoritmo do maior divisor comum* entre dois números inteiros.

Lema 11. *[14, Lema de Euclides] Dados os inteiros a, b, com $b = aq + r$ para q e $0 \leq r < |b|$ inteiros. O maior divisor comum entre a e b é dado por*

$$mdc(a, b) = mdc(a, r) \ .$$

Dados os números a e b, lembramos que a é relativamente primo com b, ou que são coprimos, se $(a, b) = 1$. Como aplicação do Lema 11, temos que:

Proposição 12. *[4, Teorema 3] Para quaisquer $m \geq n$, com m, $n \geq 1$ naturais, tem-se que $(R_m, R_n) = R_{(m,n)}$.*

Demonstração. Como $m \geq n$, então existem inteiros q, r_1 da divisão euclidiana de m por n, ou seja, $m = qn + r_1$ com $0 \leq r_1 < n$. De igual modo sejam $r_2, \ldots, r_s, r_{s+1} = 0$ os restos parciais no algoritmo de Euclides. Pelo Lema 11, temos que $r_s = (m, n)$. Veja que $R_m = 10^{r_1} R_n + R_{r_1}$ e, aplicando o Lema 11 obtemos que

$$(R_m, R_n) = (R_n, R_{r_1}) = \ldots = (R_{r_s}, R_{r_{s+1}}) = (R_{r_s}, 0) = R_{(m,n)} \ .$$

□

Exemplo 13. *Veja que* $(R_{100}, R_{60}) = R_{20}$ *visto que* $(100, 60) = 20$.

Corolário 14. *[2, 14] Dois números repunidades consecutivos são coprimos.*

Demonstração. Basta observar que $(n + 1, n) = 1$ para todo n natural. □

Lembramos que um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = a^2$.

Proposição 15. *Sejam* $m > n$ *inteiros maiores que* 1 *então* $R_m \cdot R_n$ *não é quadrado perfeito.*

Demonstração. Por hipótese temos que $m > n$. Considerando $(m, n) = d \geq 1$, segue da Proposição 12 que $(R_m, R_n) = R_d$. Vamos separar em dois casos. Se $d = 1$ então R_m e R_n são coprimos, logo não existe um divisor comum, o que acarreta que $R_m \cdot R_n$ não um é quadrado perfeito. Caso tenhamos $d > 1$, seja R_d o maior divisor comum de R_m e R_n, e mais $R_m = (R_d) \cdot q_1$ e $R_n = (R_d) \cdot q_2$ com $q_1 \neq q_2$ e $(q_1, q_2) = 1$ visto que $m \neq n$. Veja que

$$R_m \cdot R_n = (R_d)^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \ ,$$

o que acarreta que $R_m \cdot R_n$ também não é quadrado perfeito. □

Ao analisarmos a fatoração de R_n apresentada em [1, 2], um fato curioso foi observado. Para $n \geq 2$ nenhum R_n é um quadrado perfeito ou cubo perfeito. Esta curiosidade motivou os seguintes resultados:

Lema 16. *[2, 14] Com exceção de* $R_1 = 1$, *nenhum outro* R_n *é um quadrado perfeito ou soma de dois quadrados perfeitos .*

Segue diretamente do Lema 16 que

Proposição 17. *Para* $n \geq 2$, *nenhum* R_n *é uma potência par ou uma soma de duas potências pares.*

Demonstração. Admita que para algum $n > 1$ tenhamos $R_n = a^{2k}$ para convenientes inteiros a e $k > 0$. Isto acarretaria que R_n é um quadrado perfeito, pois $R_n = (a^k)^2$, contrariando a Proposição 16 .

De igual modo, suponha que para algum $n > 1$ temos $R_n = a^{2k} + b^{2q}$ para convenientes inteiros $a, b, k > 0$ e $q > 0$. Novamente isto acarretaria que R_n seria uma soma de dois quadrados perfeitos, pois $R_n = (a^k)^2 + (b^q)^2$, um absurdo em vista ao Lema 16. □

Resta-nos avaliar as potências ímpares. Antes relembramos o conceito de função de Euler e um resultado auxiliar.

Para todo m natural, seja $\varphi(m)$ a quantidade de números naturais menores ou igual a m que são relativamente primos a m, isto é, $(a, m) = 1$ para $a \leq m$, em que (a, b) é o maior divisor comum entre os números a e b. A função $\varphi(m)$ é conhecida como função de Euler .

Lema 18. *[16, Teorema 1] Sejam* $x,\ y,\ m,\ n$ *naturais, com* $x > 1,\ y > 1,\ m > 2,\ n > 1,$ *a equação*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m\ ,$$

não tem solução $(x,\ y,\ m,\ n)$ *satisfazendo* $mdc(x\varphi(x), m) = 1$, *em que* $\varphi(x)$ *é a função de Euler de* x.

E assim temos que:

Proposição 19. *Com exceção de* $R_1 = 1$, *nenhum outro* R_n *é um cubo perfeito.*

Demonstração. Seja, $R_n = \underbrace{11\ldots 11}_{n \text{ algarismos}}$, ou seja,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{n-1}\ .$$

Aplicando o Lema 18, devemos mostrar que a equação diofantina

$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{n-1} = y^3\ ;$$

não possui soluções inteiras para nenhum n e y, visto que $mdc(x\varphi(x), m) = 1$, para $x = 10$, $\varphi(10) = 4$ e $m = 3$. □

Para uma potência quinta, usaremos o seguinte resultado:

Lema 20. *[17, Teorema 1] Seja* $p > 2$ *um número primo (ou um número de Carmichael) e seja* $n \in \mathbb{N}$. *Então a equação diofantina* $1 + 2p + (2p)^2 + \cdots + (2p)^n = y^p$ *não tem solução, com* $y \in \mathbb{Z}$.

Ainda em relação as potências de R_n, temos que

Proposição 21. *[17] Com exceção de* $R_1 = 1$, *nenhum outro* R_n *é uma quinta potência perfeita.*

Demonstração. Considere $n \geq 1$ e $p = 5$, vamos aplicar o Lema 20, e assim obtemos que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^n \\ &= 1 + 2 \cdot 5 + (2 \cdot 5)^2 + \cdots + (2 \cdot 5)^{n-1} \\ &\neq y^5\ . \end{aligned}$$

□

Para qualquer potência prima ímpar maior que 5 desconhecemos a validade de resultados similares.

4 Divisibilidade entre repunidades

Nesta seção abordaremos alguns resultados relacionadas divisibilidade ou multiplicidade entre dois números repunidades. Os três primeiros resultados estabelecem condições em uma fatoração polinomial, e serão usadas nesta seção.

Lema 22. *[14, Proposição 3.6] Sejam a e b inteiros e n natural, então $a - b$ divide $a^n - b^n$.*

Lema 23. *[14, Proposição 3.8] Sejam a e b inteiros e n natural, então $a + b$ divide $a^{2n} - b^{2n}$.*

Lema 24. *[18, Lema 7] Para quaisquer a e $q \geq 1$ naturais a seguinte igualdade ocorre*

$$\begin{aligned} a^{4q} + a^{4q-2} + \cdots + a^2 + 1 =& (a^{2q} + a^{2q-1} + a^{2q-2} + \cdots + a^2 + a + 1) \\ & (a^{2q} - a^{2q-1} + a^{2q-2} - \cdots + a^2 - a + 1) \,. \end{aligned}$$

O próximo resultado exibe um divisor repunidade da repunidade R_n, no caso em que n é composto.

Proposição 25. *[3, 6] Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, se n é múltiplo de m então R_n é múltiplo de R_m.*

Demonstração. Se n é múltiplo de m então $n = m \cdot k$ para algum k inteiro. Veja que

$$\frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{mk} - 1}{9} = \frac{10^{mk} - 1}{10^m - 1} \cdot \frac{10^m - 1}{9} \,.$$

Pelo Lema 22 temos que $10^m - 1$ divide $10^{mk} - 1 = (10^m)^k - 1^k$ e assim a repunidade R_m divide R_n. □

O próximo resultado aborda a regra de divisibilidade por 11, que usaremos adiante.

Lema 26. *[14, 15] Dado um número natural n. Se a soma alternada dos algarismos de n é múltiplo de 11. Então n também é múltiplo de 11.*

O Exemplo a seguir apresenta um caso particular para o nosso próximo resultado.

Exemplo 27. *[9] Veja que $22 = 2 \cdot 11$, e*

$$\begin{aligned} R_{22} &= 10^{21} + 10^{20} + \cdots + 10^2 + 10 + 1 \\ &= 10^{20}(10+1) + 10^{18}(10+1) + \cdots + 10^2(10+1) + (10+1) \\ &= 11 \cdot (10^{20} + 10^{18} + \cdots + 10^2 + 1) \\ &\overset{Lema\ 24}{=} 11 \cdot (10^{10} + 10^9 + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^{10} - 10^9 + \cdots + 10^2 - 10 + 1) \\ &= 11 \cdot R_{11} \cdot [10^9(10-1) + 10^7(10-1) + \cdots + 10^1(10-1) + 1] \\ &= 11 \cdot R_{11} \cdot 9090909091 \,. \end{aligned}$$

Conforme Lema 26 a soma alternada dos algarismos do fator $x = 9090909091$ é $5(-9) + 1 = -44 = -4 \cdot 11$, ou seja, múltiplo de 11, então x também é múltiplo de 11, e por conseguinte 11^2 é divisor de $R_{22} = R_{11 \cdot 2}$.

Nota 28. *Outros casos particulares podem ser consultados em Kamada [19], que apresenta uma fatoração de R_n para todo $n \leq 299\,910$.*

De modo geral temos o seguinte:

Proposição 29. *Para todo n natural, tem-se que* $(R_n)^2$ *divide* $R_{n(R_n)}$.

Demonstração. Fazendo $m = R_n$, segue da Proposição 25 que $R_n \mid R_{nm}$, em particular temos:

$$\begin{aligned}R_{nm} =& 10^{nm-1} + 10^{nm-2} + \ldots + 10^{nm-1} + 10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1\\ =&(10^{n(m-1)} + 10^{n(m-2)} + \ldots + 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)\\ =&(10^{n(m-1)} + 10^{n(m-2)} + \ldots + 1)R_n\\ =&(10^{n(m-2)+1} - 10^{n(m-3)+2} + \ldots + 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)R_n\\ =&(10^{n(m-2)+1} - 10^{n(m-3)+2} + \ldots + 1)R_n^2 .\end{aligned}$$

Donde obtemos o resultado desejado. □

Segue diretamente da Proposição 29 que

Corolário 30. *Para todo n natural, temos que* $(R_n)^2$ *divide* $R_{qn(R_n)}$ *para algum q natural.*

Proposição 31. *Dados os naturais* m, n *e* k *não nulos com* $m = 10^{2^n} + 1$. *Se* $k > m$ *então* m *divide* R_{2^k}.

Demonstração. Temos que $k > m > n > 0$. Note que

$$10^{2^k} - 1 = (10^{2^m})^{2^{k-m}} - 1 = (10^{2^m})^{2^{k-m}} - 1^{2^{k-m}} .$$

Segue do Lema 23 que m divide $10^{2^k} - 1$. Temos que $R_{2^k} = \dfrac{10^{2^k} - 1}{10 - 1}$, e o resultado segue do fato que $mdc(m, 9) = 1$. □

Segue da Proposição 31 que

Corolário 32. *Dados* m, n *e* k *não nulos com* $m = 10^{2^n} + 1$. *Se* $k > m$ *então* m *divide* $R_{2^k \cdot q}$ *para qualquer q natural.*

4.1 Resultado principal

Para apresentarmos o nosso resultado principal, faremos uso dos seguintes resultados auxiliares:

Lema 33. *[14, Teorema 2.8] Sejam a e b números reais e* $n \in \mathbb{N}$. *Tem-se que*

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n .$$

Lema 34. *[14, Lema 7.5] Seja p um número primo. Então os números* $\binom{p}{i}$ *são todos divisíveis por p, para* $0 < i < p$.

Teorema 35. *[9, Problema 1] Para todo* $n \geq 1$ *tem-se que* $(R_2)^n$ *divide* $R_{2 \cdot q \cdot 11^{n-1}}$ *para algum q natural.*

Demonstração. Aplicaremos a indução sobre n. Para $n = 1$ segue da Proposição 25 que $R_2 \mid R_{2q}$ para qualquer q natural. Assim, garantimos a validade da sentença para $n = 1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a validade da sentença $11^n \mid R_{2q\cdot 11^{n-1}}$ seja garantida. Devemos mostrar a validade para todo $n+1$. Por hipótese temos que $11^n \mid R_{2q\cdot 11^{n-1}}$, ou seja, existe um natural k, de forma que pela Equação (1), temos

$$R_{2q\cdot 11^{n-1}} = \frac{10^{2q\cdot 11^{n-1}} - 1}{9}, \text{ ou equivalentemente, } 10^{2q\cdot 11^{n-1}} = 9 \cdot 11^n k + 1 \ .$$

Note que

$$\begin{aligned} R_{2q\cdot 11^{n}} &= \frac{10^{2q\cdot 11^{n}} - 1}{9} \\ &= \frac{(10^{2q\cdot 11^{n-1}})^{11} - 1}{9} \\ &= \frac{(9 \cdot 11^n + 1)^{11} - 1}{9} \ . \end{aligned}$$

Segue do Lema 33 que

$$\begin{aligned} (9 \cdot 11^n k + 1)^{11} = 9^{11} \cdot 11^{11n} k^{11} + \binom{11}{1} 9^{10} \cdot 11^{10n} k^{10} + \binom{11}{2} 9^{9} \cdot 11^{9n} k^{9} + \\ + \binom{11}{3} 9^{8} \cdot 11^{8n} k^{8} + \binom{11}{4} 9^{7} \cdot 11^{7n} k^{7} + \binom{11}{5} 9^{6} \cdot 11^{6n} k^{6} + \\ + \binom{11}{6} 9^{5} \cdot 11^{5n} k^{5} + \binom{11}{7} 9^{4} \cdot 11^{4n} k^{4} + \binom{11}{8} 9^{3} \cdot 11^{3n} k^{3} + \\ + \binom{11}{9} 9^{2} \cdot 11^{2n} k^{2} + \binom{11}{10} 9 \cdot 11^{n} k + 1 \ . \end{aligned}$$

Como por hipótese $n \geq 1$, então segue de acordo com o Lema 34 que

$$\begin{aligned} (9 \cdot 11^n k + 1)^{11} &= 9 \cdot 11^{n+1}(9^{10} \cdot 11^{10n-1} k^{11} + 9^9 \cdot 11^{9n} k^{10} + \cdots + 9k) + 1 \\ &= 9 \cdot 11^{n+1} x + 1 \ , \end{aligned}$$

para algum conveniente x natural. Donde obtemos que $R_{2q\cdot 11^n} = 11^{n+1} x$, e este fato garante a validade da sentença para todo $n+1$. $\square$

4.2 Fator primo de uma repunidade

Em [9] é exibida uma caracterização para um fator primo de um tipo de repunidade, a saber:

Proposição 36. *[9, Teorema 3] Seja $p > 3$ um primo e R_p composto. Então um divisor primo q de R_p é da forma $2px + 1$, para todo natural x.*

Além do resultado apresentado anteriormente, fornecemos uma caracterização para um fator primo de uma repunidade composta. Para demonstrar o Teorema 40 que será apresentado mais adiante, faremos uso de resultados bem estabelecidos acerca de resíduos quadráticos, os quais podem ser encontrados em [14, 15, 20] .

Definição 37. *Seja $p > 2$ um número primo e a um inteiro qualquer. Indicamos o símbolo de Legendre por:*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, \textit{ se } p \nmid a \textit{ e } a \textit{ é resíduo quadrático módulo } p; \\ -1, \textit{ se } p \mid a; \\ 0, \textit{ caso contrário } . \end{cases}$$

Lema 38. *[Critério de Euler] [14, 20] Seja $p > 2$ um primo e a um inteiro qualquer. Então*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \mod p \; .$$

Lema 39. *[14, 15, 20] Para todo primo $p > 5$ temos $\left(\frac{10}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, ou seja, 10 é resíduo quadrático módulo p se, e só se, $p \equiv \pm 1 \mod 6$.*

Teorema 40. *Se $p > 3$ é um primo e R_p composto. Então cada divisor primo $q > 5$ de R_p é da forma $6z \pm 1$, para algum natural z.*

Demonstração. Seja $p > 3$ primo tal que $R_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$ seja composto, sendo $q > 5$ é um divisor primo de R_p então existe um natural y de tal forma que $R_p = p \cdot y$. Disto obtemos que $9R_p = 9 \cdot q \cdot y$, ou seja, $q \mid 9R_p$. Temos que $(q, 9) = 1$, logo $q \mid 10^p - 1$, acarretando que $10^p \equiv 1 \mod q$. Segue da Proposição 36 que $q = 2px + 1$, com x natural. Veja que

$$\begin{aligned} 10^{\frac{q-1}{2}} &= 10^{\frac{2px+1-1}{2}} = (10^p)^x \\ &\equiv 1 \mod q \; . \end{aligned}$$

Pelo critério de Euler temos que $\left(\frac{10}{q}\right) = 1$ e 10 é resíduo quadrático módulo q. Agora, segue do Lema 39 que $q = 6z \pm 1$, para algum natural z . □

Tal situação pode ser descrita ou especificada no seguinte exemplo.

Exemplo 41. *Para $p = 7$, temos $R_7 = 239 \times 4639$ donde notamos que $239 = 6 \times 40 - 1$ e $4639 = 6 \times 775 - 1$. Enquanto que para $p = 11$ temos $R_{11} = 21649 \times 513239$ donde segue que $21649 = 6 \times 3608 + 1$ e $513239 = 6 \times 85540 - 1$.*

5 Considerações finais

Neste discutimos alguns resultados acerca da sequência de *repunidades* com vistas as propriedades relativas à sequência de Lucas levantadas por Jaroma[13]. Para além disso, mostramos que uma repunidade não pode ser expressa como um cubo perfeito, nem como uma potência de índice par, múltiplos de cinco ou mesmo como uma soma de duas potências de índice par. Ademais, abordamos algumas propriedades relacionadas a divisibilidade entre repunidades, em especial destacamos o Teorema 35 que fornece uma demonstração à conjectura proposta em Costa e Santos[9], além de apresentarmos um critério de divisibilidade para uma potência quadradas de uma repunidade proposta pela Proposição 29. Também melhoramos e expandimos o resultado proposto em Costa e Santos[9], mostrando que todo divisor de R_p composto e $p > 5$ primo é da forma $6z \pm 1$. Esperamos que os resultados apresentados possam inspirar e motivar novos estudos sobre a classe de números repunidades. Acreditamos que as propriedades aritméticas e as questões abertas em torno desses números possam ser um tema frutífero para a pesquisa matemática e que novos estudos possam ser feitos a partir desses resultados

Referências

[1] BEILER, Albert H. **Recreations in the theory of numbers**: the queen of mathematics entertains. 2nd ed. New York: Dover, 1966.

[2] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Números repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo836. Acesso em: 17 maio 2023.

[3] RIBENBOIM, Paulo. **The little book of bigger primes**. 2nd ed. New York: Springer, 2004.

[4] TARASOV, Boris V. The concrete theory of numbers: initial numbers and wonderful properties of numbers repunit. **arXiv:0704.0875 [math.GM].** 2007. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/0704.0875v2.pdf. Acesso em: 17 maio 2023.

[5] YATES, Samuel. The mystique of repunits. **Mathematics Magazine**, v. 51, n. 1, p. 22-28, 1978. Disponível em https://doi.org/10.1080/0025570X.1978.11976671. Acesso em:17 maio 2023.

[6] YATES, Samuel. **Repunits and repetends**. Star Publishing Co., Inc. Boynton Beach, Florida, 1992.

[7] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. **Banco de questões**. Rio de Janeiro: OBMEP, [2023]. Disponível em: https://www.obmep.org.br. Acesso em: 17 maio 2023.

[8] TAHAN, Malba. **Matemática divertida e curiosa**. 23. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

[9] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio dos. Algumas propriedades dos números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47-58, 2022.

[10] GUSMÃO, Gisele de Araújo Prateado. A Sequência de Fibonacci. **Revista da Olimpíada**, n. 4, p. 55-74, 2003.

[11] MAGALHÃES, Cícero Thiago B. Sequência de Fibonacci. **EUREKA!** n. 21, p. 38-42, 2005.

[12] NORONHA, W. F. R.; ALVES, F. R. V. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 13, p. 1-30, dez. 2018. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/223. Acesso em: 17 maio 2023.

[13] JAROMA, John H. Factoring generalized repunits. **Bulletin of the Irish Mathematical Society**, n. 59, p. 29-35. 2007

[14] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de janeiro: SBM, 2016.

[15] NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Hebert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An introduction to the theory of numbers**. 5th ed. New York: Wiley, c1991.

[16] MAOHUA, Le. A note on perfect powers of the form $x^{m-1} + \ldots + x + 1$. **Acta Arithmetica**, v. 69, n. 1, p. 91-98, 1995.

[17] MÜLLER, Tom. Note on the diophantine equation $1 + 2p + (2p)^2 + \ldots + (2p)^n = y^p$. **Elemente der Mathematik**. v. 60, p. 148-149. 2005. Disponível em https://ems.press/content/serialarticle-files/7121. Acesso em: 17 maio 2023.

[18] COSTA, Eudes Antonio; COSTA, Grieg Antonio. Existem números primos na forma $101\ldots101$. **Revista do Professor de Matemática**, n. 103, p. 21- 22, 2021.

[19] KAMADA, Makoto. **Factorization of 11 . . . 11 (Repunit)**. [Tokyo]: Makoto Kamada, c1999-2023. Disponível em: https://stdkmd.net/nrr/repunit/. Acesso em: 17 maio 2023.

[20] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamn de; MARTINEZ, Fabio E. Bochero; SALDANHA, Nicolau C. **Tópicos de teoria dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.