Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 1, jul. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Uma introdução à variação de uma função

An introduction to the variation of a function

Andrei Doronin
Câmpus de Maringá
Universidade Estadual de Maringá
andreidoronin96@gmail.com

Marcos Primo
Câmpus de Maringá
Universidade Estadual de Maringá
mrtprimo@uem.br

Resumo

Analisar, segundo o dicionário da língua portuguesa, é observar e refletir sobre algo. Em Matemática, "Análise" é o nome dado a uma das quatro grandes áreas. À saber, Geometria, Álgebra, Análise e Matemática Aplicada. Em particular, é possível subdividir a terceira em cinco grandes grupos. São eles a Análise Real, a Análise Complexa, a Análise Funcional, a Análise Harmônica e a Análise Numérica. Neste trabalho de Iniciação Científica será abordado um tópico da Análise Real. Mais precisamente, estudaremos o conceito de variação de uma função, o qual possui extrema importância quando se trata da Integral de Riemann-Stieltjes e da Integral de Lebesgue.
Palavras-chave: Função. Variação. Integração.

Abstract

According to the brazilian dictionary, "to analyze" is to observe and to think in something. In Mathematics, "Analysis" is the name given to one of the four major areas. Namely Geometry, Algebra, Analysis and Applied Mathematics. In particular, it is possible to subdivide the third one into five large groups. They are Real Analysis, Complex Analysis, Functional Analysis, Harmonic Analysis and Numerical Analysis. In this paper of undergraduate research project, a topic of Real Analysis will be introduced. More precisely, we are going to study the concept of the variation of a function, which is extremely important while dealing with the Riemann-Stieltjes Integral and the Lebesgue Integral.
Keywords: Function. Variation. Integration.

Artigo recebido em mar. 2023 e aceito em jul. 2023

1 Introdução

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e nas disciplinas de Análise Real, que são usualmente oferecidas aos acadêmicos dos cursos de Matemática, a integral estudada é a Integral de Riemann, por conta de suas aplicações sobre os conceitos de áreas e volumes, bem como em outros ramos da Matemática e em outras ciências.

Estudando detalhadamente a Integral de Riemann-Stieltjes, que é de certa forma uma generalização da integral de Riemann, pode-se perceber suas particularidades e semelhanças em relação às outras formas de integração. Para definir e analisar as propriedades da Integral de Riemann-Stieltjes, é abordado o conceito de funções de variação limitada e estuda-se com detalhes algumas de suas principais propriedades.

Neste artigo será introduzido o conceito de variação de uma função real e, feito isso, serão apresentados alguns exemplos, proposições, teoremas e demonstrações centrais desse estudo. Além disso, no corpo do texto haverá breves explicações acerca das relações presentes entre um resultado e outro.

Por fim, é válido ressaltar que este artigo foi escrito seguindo o livro de Antoni Zygmund e Richard Lee (1977) e as notas dos seminários da Iniciação Científica com o professor Marcos Roberto Teixeira Primo. Além disso, também recorremos ao Elon Lages Lima (2004) para o esclarecimento de alguns pontos preliminares.

2 Definições, exemplos e resultados preliminares

A fim de analisarmos resultados mais complexos e com aplicações mais interessantes, algumas noções se fazem necessárias. Após a introdução destes novos conceitos, estaremos aptos a demonstrar resultados fundamentais da teoria.

Definição 1 *Sejam* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e* $\Gamma = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$ *uma partição de* $[a, b]$*, mantendo fixa a ordem natural. Cada partição* Γ *é associada à soma*

$$S_\Gamma = S_\Gamma[f; a, b] = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

A variação de f *no intervalo* $[a, b]$ *é definida como*

$$V = V[f; a, b] = \sup_{\Gamma} S_\Gamma,$$

donde o supremo é tomado dentre todas as partições Γ *de* $[a, b]$*.*

Observação 2 *A variação* $V[f; a, b]$ *será denotada por vezes como* $V[a, b]$ *ou, simplesmente,* $V(f)$*.*

Se $V < +\infty$*, então* f *é dita variação limitada em* $[a, b]$*; Se* $V = +\infty$*, então* f *é de variação ilimitada em* $[a, b]$*.*

Exemplo 3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 0,\ x \neq 0$ *e* $f(0) = 1$*. Seja ainda* $[a, b]$ *como sendo qualquer intervalo contendo* 0 *em seu interior. Assim,* S_Γ *pode ser 0 ou 2 e, portanto,* $V[a, b] = 2$*.*

De fato, note primeiramente que há duas possibilidades em relação ao zero. À saber, $0 \in \Gamma$ ou $0 \notin \Gamma$. Analizando a primeira, temos que

$$\Gamma = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 0, x_{n+1}, \ldots, x_m = b\}$$

e, dessa forma,

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=n+1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 1 + 1 = 2.$$

Ainda, na segunda possibilidade, temos que

$$\Gamma = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_m = b\},$$

em que $x_n = 0$ e, desse modo,

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 0.$$

Portanto, $V(f) = \sup_\Gamma S_\Gamma = 2$.

Exemplo 4 *Seja f a função de Dirichlet, definida por $f(x) = 1$ para todo número racional x e $f(x) = 0$ para todo número irracional x. Assim, $V[a,b] = +\infty$ para qualquer intervalo $[a,b]$.*

De fato, note que os racionais são densos na reta (o mesmo vale para os irracionais). Assim, S_Γ pode assumir qualquer valor $\alpha \in [0, +\infty[$ e, portanto, $V(f) = \sup_\Gamma S_\Gamma = +\infty$.

Teorema 5

1. *Se f é uma função de variação limitada em $[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.*
2. *Sejam f e g duas funções de variação limitada em $[a,b]$. Então, cf (para qualquer constante real c), $f+g$, e fg são de variação limitada em $[a,b]$. Ainda, a função f/g é de variação limitada em $[a,b]$ se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|g(x)| \geq \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$.*

Com efeito,

1. Sejam $V < \infty$ a variação de f em $[a,b]$ e $x \in (a,b)$. Então $\Gamma = \{a, x, b\}$ é uma partição de $[a,b]$ e, dessa forma, $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| = S_\Gamma \leq V$. Ainda, note que

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |\,|f(x)| - |f(a)|\,| \leq |f(x) - f(a)|$$

e

$$|f(x)| - |f(b)| \leq |\,|f(x)| - |f(b)|\,| \leq |f(x) - f(b)|.$$

Logo, segue que $2|f(x)| - (|f(b)| + |f(a)|) \leq V$ e, desse modo,

$$|f(x)| \leq \frac{V + |f(b)| + |f(a)|}{2}.$$

Por fim, como

$$\frac{V + |f(b)| + |f(a)|}{2} \leq V + |f(b)| + |f(a)| = M,$$

temos que $|f(x)|, |f(a)|, |f(b)| \leq M$.

Observação 6 *A desigualdade* $|f(x)| - |f(a)| \leq |\,|f(x)| - |f(a)|\,| \leq |f(x) - f(a)|$ *é válida porque, primeiramente, todo número real é menor ou igual ao seu valor em módulo. Ainda, observe que*

$$|\,|x| - |y|\,| = \sqrt{(|x| - |y|)^2} = \sqrt{|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2} = \sqrt{x^2 - 2|xy| + y^2}$$
$$\leq \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Sejam f e g duas funções de variação limitada em $[a, b]$, isto é, $V(f), V(g) < +\infty$. Primeiramente, tome cf, com $c \in \mathbb{R}$. Daí, segue que

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} |cf(x_i) - cf(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |c||f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$= |c| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |c| \cdot V(f) = V(|c| \cdot f) < \infty.$$

Agora, tomando $f + g$, temos que

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} |(f+g)(x_i) - (f+g)(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = V(f) + V(g) < \infty.$$

Continuando, considere o produto fg. Note que, por hipótese, as funções f e g são de variação limitada e, além disso, vimos que uma função ser de variação limitada implica que a função é limitada. Assim, podemos afirmar que $f(x) \leq A$ e $g(x) \leq B$, para algum $A, B \in \mathbb{R}$. Logo, obtemos

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} |(fg)(x_i) - (fg)(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) \cdot [g(x_i) - g(x_{i-1}] + g(x_{i-1}) \cdot [f(x_i) - f(x_{i-1})]|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\,|g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_{i-1})|\,|f(x) - f(x_{i-1})|$$
$$\leq A \cdot V(f) + B \cdot V(g) < \infty.$$

Por fim, para a razão f/g., temos que

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f}{g}(x_i) - \frac{f}{g}(x_{i-1}) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_i)}{g(x_i)g(x_{i-1})} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|\,|g(x_{i-1})| + |f(x_{i-1})|\,|g(x_i) - g(x_{i-1})|}{|g(x_i)|\,|g(x_{i-1})|}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + A\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, S_\Gamma[f;a,b] + \frac{A}{\varepsilon^2}\, S_\Gamma[g;a,b] \leq \frac{1}{\varepsilon}\, V(f) + \frac{A}{\varepsilon^2}\, V(g) < \infty$$

e, portanto, a função f/g é de variação limitada em $[a,b]$.

Definição 7 *Dizemos que a partição $\overline{\Gamma}$ é um refinamento da partição Γ se $\overline{\Gamma}$ contém todos os pontos de Γ e outros pontos adicionais.*

Proposição 8 *Se $\overline{\Gamma}$ é um refinamento de Γ, então $S_\Gamma \leq S_{\overline{\Gamma}}$.*

Com efeito, note inicialmente que $\Gamma = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_m = b\}$, por definição. Suponha agora que $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{x_n\}$, ou seja, a partição $\overline{\Gamma}$ é obtida adicionando um ponto ao conjunto Γ. Assim,

$$S_{\overline{\Gamma}} = |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| + \ldots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)|$$

$$= S_\Gamma + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)|.$$

O restante da demonstração (para dois ou mais pontos) segue facilmente por indução em x_n.

3 Principais resultados

Neste capítulo estudaremos resultados centrais no estudo das funções de variação limitada. Abordadas aqui, as técnicas de demonstrações se fazem necessárias caso o leitor deseje ir mais a fundo na teoria.

Teorema 9 1. *Se $a < c < b$, então $V[a,b] = V[a,c] + V[c,b]$.*

2. *Se $[a',b']$ é um subintervalo de $[a,b]$, então $V[a',b'] \leq V[a,b]$.*

Para demonstrar o resultado acima, inicialmente tome $I = [a,b], I_1 = [a,c], I_2 = [c,b]$, $V = V[a,b], V_1 = V[a,c], V_2 = V[c,b]$. Se Γ_1 e Γ_2 são partições quaisquer de I_1 e I_2, respectivamente, então $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é uma partição de I e $S_\Gamma[I] = S_{\Gamma_1}[I_1] + S_{\Gamma_2}[I_2]$. Assim, $S_{\Gamma_1}[I_1] + S_{\Gamma_2}[I_2] \leq V$ e, portanto, tomando o supremo de Γ_1 e Γ_2 separadamente, obtemos $V_1 + V_2 \leq V$.

Para mostrar a outra desigualdade, tome Γ como sendo qualquer partição de I e tome $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{c\}$. Desse modo, $S_\Gamma[I] \leq S_{\overline{\Gamma}}[I]$ e $\overline{\Gamma}$ se divide em Γ_1 de I_1 e Γ_2 de I_2. Daí, temos que

$$S_\Gamma[I] \leq S_{\overline{\Gamma}}[I] = S_{\Gamma_1}[I_1] + S_{\Gamma_2}[I_2] \leq V_1 + V_2.$$

Portanto, $V \leq V_1 + V_2$, o que completa a prova.

Já para segunda afirmação, suponhamos $a' = a$, $a < a' < b' < b$ ou $b = b'$. No primeiro caso, temos $I = [a,b'] \cup [b',b]$, o que implica $V[I] = V[a,b'] + V[b',b]$ e, desse modo, vemos que $V[I]$ é maior ou igual às variações de ambos os subintervalos separadamente. Como o terceiro caso é similar ao que acabamos de finalizar, analizemos quando $a < a' < b' < b$. Aqui, observe que $V[I] = V[a,a'] + V[a',b'] + V[b',b]$, ou seja, novamente temos o desejado.

Com o objetivo de apresentar os teoremas seguintes, necessitamos de algumas definições.

Definição 10 *Para qualquer número real x, definimos*

$$x^+ = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0, \\ 0 & se \quad x \leq 0; \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & se \quad x \geq 0, \\ -x & se \quad x \leq 0. \end{cases}$$

que são chamados de parte positiva e parte negativa de x, respectivamente.

Observação 11 *Note que valem as seguintes relações:*

$$x^+, x^- \geq 0; \quad |x| = x^+ + x^-; \quad x = x^+ - x^-. \tag{1}$$

Definição 12 *Dada uma função finita f em $[a,b]$ e uma partição $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^m$ de $[a,b]$, definimos*

$$P_\Gamma = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

e

$$N_\Gamma = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-.$$

Assim, P_Γ é a soma dos termos positivos de S_Γ e $-N_\Gamma$ é a soma dos termos negativos de S_Γ.

Em particular, tendo em vista as relações citadas anteriormente, temos

$$P_\Gamma \geq 0, N_\Gamma \geq 0,$$

$$P_\Gamma + N_\Gamma = S_\Gamma, \tag{2}$$

$$P_\Gamma - N_\Gamma = f(b) - f(a). \tag{3}$$

Definição 13 *A variação positiva P e a variação negativa N de f são definidas, respectivamente, como sendo*

$$P = \sup_\Gamma P_\Gamma$$

e

$$N = \sup_\Gamma N_\Gamma$$

Observação 14 *Note que* $0 \leq P$ *e* $N \leq +\infty$.

Teorema 15 *Se P, N ou V é finito, então todos os três são finitos e*

$$P + N = V, \quad P - N = f(b) - f(a).$$

Com efeito, primeiramente, tendo em vista a equação (2), podemos afirmar que $P_\Gamma + N_\Gamma \leq V$ e, desse modo, já que $P_\Gamma, N_\Gamma \geq 0$, temos $P_\Gamma, N_\Gamma \leq V$. Em particular, P e N são finitos se V o é. Ainda, novamente pela equação (2), segue que $V \leq P + N$. Assim, se P ou N é finito, então pela equação (3) o outro também é e, desse modo, obtemos que $V < \infty$. Isso finaliza a primeira parte do teorema.

Agora tome uma sequência de partições Γ_k de modo que $P_{\Gamma_k} \to P$. Afirmamos que $N_{\Gamma_k} \to N$ e $P - [f(b) - f(a)] = N$.

De fato, pela equação (3.3), $N_{\Gamma_k} = P_{\Gamma_k} - [f(b) - f(a)] \to P - [f(b) - f(a)]$ e, tendo em vista que $N_{\Gamma_k} \leq N$, então $P - [f(b) - f(a)] \leq N$. Se $P - [f(b) - f(a)] < N$, então existe, pela definição de N, uma partição Γ com $N_\Gamma > P - [f(b) - f(a)]$. Logo, $P_\Gamma = N_\Gamma + [f(b) - f(a)] > P$, o que é impossível. Portanto, $P - [f(b) - f(a)] = N$ e $N_{\Gamma_k} \to N$.

Por fim, se N é finito, segue que $P - N = f(b) - f(a)$. Tomando $k \to \infty$ na desigualdade $P_{\Gamma_k} + N_{\Gamma_k} \leq V$, temos que $P + N \leq V$. Como $V \leq P + N$ foi mostrado anteriormente, podemos afirmar que $V = P + N$ e o teorema segue.

Teorema 16 (Teorema de Jordan) *Uma função f é de variação limitada em $[a, b]$ se, e somente se, ela puder ser escrita como a diferença de duas funções crescentes e limitadas em $[a, b]$.*

A fim de verificar a veracidade da afirmação acima, suponha $f = f_1 - f_2$, em que f_1 e f_2 são limitadas e crescentes em $[a, b]$. Assim, as funções f_1 e f_2 são de variação limitada em $[a, b]$ e, tendo em vista o teorema 5(2.), a função f também o é.

Reciprocamente, pelo teorema 9(1.), f é de variação limitada em todo o intervalo $[a, x]$ com $a \leq x \leq b$. Tome $P(x)$ e $N(x)$ como sendo a variação positiva e a variação negativa de f em $[a, x]$, respectivamente. Note que $P(x)$ e $N(x)$ são limitadas e crescentes em $[a, b]$. Ainda, levando em consideração o teorema 2.15 aplicado em $[a, x]$, temos que $f(x) = [P(x) + f(a)] - N(x)$ quando $a \leq x \leq b$. Finalmente, como $P(x)$ é limitada e crescente, então $[P(x) + f(a)]$ também o é, e temos o desejado.

A fim de enunciar o próximo teorema, é necessário apresentar a noção de descontinuidade e seus diferentes tipos.

Definição 17 *Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. A função f é dita contínua em p se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, tem-se que*

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon.$$

Caso contrário, a função f é dita descontínua em p.

Uma descontinuidade pode assumir três diferentes tipos. Como esse tópico não é o foco do trabalho e está sendo apresentado com o único intuito de enunciar um teorema, basta citar aqui quais são. Se o leitor se interessar pelas definições formais e exemplos, esse conteúdo é facilmente encontrado nas referências.

1. Descontinuidade removível;
2. Descontinuidade de salto;
3. Descontinuidade essencial.

Teorema 18 *Toda função de variação limitada possui no máximo um número contável de descontinuidades e todas elas são de primeira espécie.*

Observação 19 *Aqui, se f é de variação limitada em $[a,b]$, nós podemos clarear o que significa dizer que f possui uma descontinuidade de primeira espécie nas extremidades a,b extendendo a definição de f fora de $[a,b]$ como sendo $f(x) = f(a)$ se $x < a$ e $f(x) = f(b)$ se $x > b$ e depois usando a notação usual.*

Em verdade, seja f uma função de variação limitada em $[a,b]$. Primeiramente, suponha que f é crescente e limitada em $[a,b]$. Assim, todas as descontinuidades de f são de primeira espécie, já que são todas descontinuidades do tipo salto. Se D denota o conjunto de todas as descontinuidades de f, então $D = \cup_{k=1}^{\infty}\{x; f(x+) - f(x-) \geq \frac{1}{k}\}$. Se f é limitada, cada conjunto da direita é finito (ou vazio) e, dessa forma, D é contável. O caso geral segue disso e usando o segundo enunciado do Teorema de Jordan.

Observação 20 *Note que descontinuidades removíveis podem surgir da subtração de funções monótonas. Por exemplo, podemos considerar uma função f definida como sendo $f(x) = 0$ quando $x \neq 0$ e $f(x) = 1$ quando $x = 0$ e tomando o intervalo $[a,b]$ como sendo qualquer intervalo contendo o 0 em seu interior, juntamente com as funções monótonas correspondentes $P(x)$ e $N(x)$.*

Teorema 21 *Se f é contínua em $[a,b]$, então $V = \lim_{|\Gamma|\to 0} S_\Gamma$, isto é, dado M tal que $M < V$, existe $\delta > 0$ tal que $S_\Gamma > M$ para qualquer partição Γ de $[a,b]$ com $|\Gamma| < \delta$.*

Com efeito, lembre-se que dado M com $M < V$, devemos encontrar $\delta > 0$ de modo que $S_\Gamma > M$ se $|\Gamma| < \delta$. Tome $\mu > 0$ tal que $M + \mu < V$ e escolha uma partição fixa $\overline{\Gamma} = \{\overline{x_j}\}_{j=0}^{k}$ tal que $S_{\overline{\Gamma}} > M + \mu$.

Usando a continuidade uniforme de f em $[a,b]$, tome $\eta > 0$ tal que

1. $|f(x) - f(x')| < \frac{\mu}{2(k+1)}$ se $|x - x'| < \eta$.
   Agora seja Γ uma partição que satisfaz

2. $|\Gamma| < \eta$;

3. $|\Gamma| < \min_j(\overline{x_j} - \overline{x_{j-1}})$.

Nós afirmamos que $S_\Gamma > M$ e o teorema segue escolhendo δ como sendo o menor entre η e $\min_j(\overline{x_j} - \overline{x_{j-1}})$.

De fato, escreva $\Gamma = \{x_i\}_{i=0}^{m}$ e

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum{}' + \sum{}''$$

em que $\sum''$ é extendido para todo i tal que (x_{i-1}, x_i) contém algum $\overline{x_j}$. Pelo item 3., qualquer (x_{i-1}, x_i) pode conter no máximo um $\overline{x_j}$ e, desse modo, o número de termos de $\sum''$ é no máximo $k+1$. Seja $\Gamma \cup \overline{\Gamma}$ a partição formada pela união dos pontos de Γ e $\overline{\Gamma}$. Assim, $\Gamma \cup \overline{\Gamma}$ é um refinamento de Γ e também de $\overline{\Gamma}$. Ainda, $S_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} = \sum' + \sum'''$, em que $\sum'''$ é obtido de $\sum''$ substituindo cada termo por $|f(x_i) - f(\overline{x_j})| + |f(\overline{x_j}) - f(x_{i-1})|$, donde $\overline{x_j}$ é o ponto de $\overline{\Gamma}$ em (x_{i-1}, x_i).

Por 1. e 2., cada um desses dois termos é menor que $\mu/2(k+1)$ e, dessa forma,

$$\sum''' < 2(k+1)\frac{\mu}{2(k+1)} = \mu.$$

Daí,

$$\sum' = S_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} - \sum''' > S_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} - \mu$$

e então temos que $S_\Gamma > S_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} - \mu$. Como $\Gamma \cup \overline{\Gamma}$ é um refinamento de $\overline{\Gamma}$, segue que $S_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} \geq S_{\overline{\Gamma}}$. Portanto, $S_\Gamma > S_{\overline{\Gamma}} - \mu > M$ e isso completa a prova.

Corolário 22 *Se f possui derivada contínua f' em $[a,b]$, então*

$$V = \int_a^b |f'|dx, \quad P = \int_a^b \{f'\}^+dx, \quad N = \int_a^b \{f'\}^-dx.$$

Iniciando a demonstração, pelo Teorema do Valor Médio, segue-se que

$$S_\Gamma = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)|\,(x_i - x_{i-1})$$

para algum $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Assim, pelo Teorema 21 e pela definição de Integral de Riemann,

$$V = \lim_{|\Gamma|\to 0} S_\Gamma = \lim_{|\Gamma|\to 0} \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)|\,(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Ainda, pelo teorema 2.15, temos

$$P = \frac{1}{2}[V + f(b) - f(a)] = \frac{1}{2}\left[\int_a^b |f'(x)|dx + \int_a^b f'(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b [|f'(x)| + f'(x)]dx = \int_a^b [f'(x)]^+dx.$$

A prova para N é análoga e decorre do fato de que

$$N = \frac{1}{2}[V - f(b) + f(a)].$$

Observação 23 *Vale ressaltar que existem noções de variação limitada para intervalos abertos ou semiabertos, assim como intervalos infinitos. De fato, basta tomarmos $[a', b'] \subset (a,b)$ e definirmos $V^\circ(a,b) = \lim V[a',b']$ quando $a' \to a$ e $b' \to b$. Se $V^\circ(a,b) < +\infty$, dizemos que f é de variação limitada em (a,b). Ainda, de maneira similar, se f é definida em $(-\infty,+\infty)$, tomamos $V(-\infty,+\infty) = \lim V[a,b]$ quando $a \to -\infty$ e $b \to +\infty$. Definições análogas valem para $[a,b)$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, etc.*

4 Conclusão

Esse artigo foi originado de um projeto de Iniciação científica, no qual estudamos inicialmente alguns conceitos da Análise Real necessários para definir e estudar a Integral de Riemann-Stieljes de funções reais a variáveis reais. Vimos que, nesse contexto, ela é uma generalização da Integral de Riemann, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Posteriormente, estudamos funções de variação limitada e, com o auxílio desse conceito, definimos a Integral de Riemann-Stieltjes em um contexto mais amplo, estudando suas propriedades e a sua relação com a Integral de Riemann.

Nesse artigo consta apenas uma parte do nosso estudo sobre funções de variação limitada e suas propriedades. Ao ler cada linha atentamente, observamos que há resultados que não são muito intuitivos, como por exemplo o Teorema de Jordan, ao passo que também existem aqueles que dialogam com a nossa intuição, tal qual o Teorema 21. Por fim, vale destacar também a importância do Teorema 5 pois, além de vermos que é possível operar funções de variação limitada de modo a obtermos funções com essa mesma propriedade, o primeiro item nos revela que o conjunto das funções de variação limitada é um subconjunto do conjunto das funções limitadas.

Referências

[1] WHEEDEN, Richard Lee; ZYGMUND, Antoni. **Measure and integral**: an introduction to real analysis. New York: Dekker, 1977.

[2] LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

[3] PACHECO, Maria de Fátima. **Funções de variação limitada**. 2001. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática, Fundamentos e Aplicações) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2001.

[4] BARTLE, Robert G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley and Sons, 2014.