Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Iniciação Científica

A generalização da forma matricial híbrida das sequências de Leonardo, Padovan, Perrin e Narayana

The generalization of the hybrid matrix form of the Leonardo, Padovan, Perrin and Narayana sequences

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará
re.passosm@gmail.com

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
milenacarolina24@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr

Paula Maria Machado Cruz Catarino
UTAD
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com

Resumo

A partir do conjunto dos números híbridos e das sequências Leonardo, Padovan, Perrin e Narayana, o presente artigo tem como objetivo apresentar as formas matriciais híbridas destas sequências lineares, bem como suas matrizes para índices inteiros não positivos. Todos os resultados obtidos foram demonstrados pelo princípio de indução matemática e, para trabalhos futuros, é incentivado a exploração desta investigação com outros conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Números Híbridos. Matrizes Híbridas. Sequências Lineares Recursivas.

Abstract

From the set of hybrid numbers and Leonardo, Padovan, Perrin and Narayana sequences, this article aims to present the hybrid matrix forms of these linear sequences, as well as their matrices for non-positive integer indices. All the results obtained were demonstrated by the principle of mathematical induction and, for future work, the exploration of this investigation with other mathematical contents is encouraged.

Keywords: Hybrid Numbers. Hybrid matrices. Recursive Linear Sequences.

Artigo recebido em jul. 2022 e aceito em maio. 2023

1 Introdução

O conjunto dos números híbridos foi apresentado por [1], onde foram estudados a partir da integração de três sistemas numéricos, sejam eles: complexos, hiperbólicos e duais.

Definição 1. *Um número híbrido é definido como:*

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

A partir da sua definição, pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos, seja a soma e subtração entre dois números híbridos e multiplicação por escalar. O produto é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades. Destaca-se ainda, a tabela da multiplicação de um número híbrido (ver Tabela 1).

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$1+h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para um número híbrido.

A multiplicação nos números híbridos não é comutativa, porém observa-se a existência da propriedade associativa e do conjunto $\mathbb{K}$ dos números híbridos, formando assim um anel não comutativo. Ainda, é possível apresentar o conjugado de um número híbrido, o seu chamado de caráter e a norma de um número híbrido.

Alguns trabalhos em torno dos números híbridos são apresentados em [2,3,4,5,6,7,8] onde foram realizados o processo de hibridização de sequências numéricas recorrentes.

A sequência de Leonardo é discutida em [9], sendo uma sequência numérica recorrente, apresentando diversas aplicações na área de ciência. Esta sequência está vinculada a recorrência $L_n = 2L_{n-1} - L_{n-3}$, para $n \geqslant 3$ e tem os valores iniciais $L_0 = L_1 = 1$ e $L_2 = 3$.

Um número híbrido de Leonardo é definido por:

$$LH_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h.$$

Assim, podemos apresentar seus primeiros termos:

$$\begin{aligned} LH_0 &= 1 + i + 3\varepsilon + 5h \\ LH_1 &= 1 + 3i + 5\varepsilon + 9h \\ LH_2 &= 3 + 5i + 9\varepsilon + 15h \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Os números híbridos de Leonardo possuem uma equação característica definida por $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, existindo três raízes, sendo duas iguais as raízes da equação característica da sequência de Fibonacci e, uma com valor igual a 1.

A sequência de Padovan é uma sequência considerada como prima dos números de Fibonacci, sendo do tipo linear e recorrente e de terceira ordem. A sua relação de recorrência é dada por: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geqslant 3$, com os termos iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Os números híbridos de Padovan foram apresentados em [7] e são definidos por:

$$PH_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}h.$$

Os primeiros termos dos números híbridos de Padovan são $PH_0 = 1+i+\varepsilon+2h$, $PH_1 = 1+i+2\varepsilon+2h$ e $PH_2 = 1 + 2i + 2\varepsilon + 3h$ e sua equação característica é dada por: $x^3 - x - 1 = 0$, possuindo três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e, uma solução real.

A sequência de Perrin apresenta grande similiariedade com a sequência de Padovan, possuindo a mesma fórmula de recorrência, alterando apenas os seus valores iniciais. Assim, para $n \geqslant 3$, tem-se que a recorrência é dada por: $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}$, sendo $Pe_0 = 3$, $Pe_1 = 0$ e $Pe_2 = 2$ seus termos iniciais.

Os números híbridos de Perrin são definidos por:

$$PeH_n = Pe_n + Pe_{n+1}i + Pe_{n+2}\varepsilon + Pe_{n+3}h,$$

seus primeiros termos são $PeH_0 = 3 + 2\varepsilon + 3h$, $PeH_1 = 2i + 3\varepsilon + 2h$ e $PeH_2 = 2 + 3i + 2\varepsilon + 5h$ e, devido esta sequência possuir a mesma recorrência dos números de Padovan, a equação característica é a mesma.

A sequência de Narayana surgiu a partir da problemática do rebanho de vacas e bezerros, em que: *uma vaca produz um bezerro a cada ano. A partir do quarto ano, cada bezerro produz um bezerro no início de cada ano. Quantos bezerros existem no total após 20 anos?* Assim, a sua solução é de forma semelhante ao problema dos pares de coelhos da sequência de Fibonacci.

Denominando o ano por n e, N_n como sendo um termo da sequência de Narayana, poderemos definir a sua recorrência como:

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}, n \geqslant 3,$$

sendo $N_0 = 0$ e $N_1 = N_2 = 1$ os seus termos iniciais.

Os números híbridos de Narayana são definidos por:

$$NH_n = N_n + N_{n+1}i + N_{n+2}\varepsilon + N_{n+3}h,$$

seus primeiros termos são $NH_0 = i + \varepsilon + h$, $NH_1 = 1 + i + \varepsilon + 2h$ e $NH_2 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$ e, sua equação característica é dada por: $x^3 - x^2 - 1 = 0$, possuindo três raízes, uma solução real e duas complexas.

Tendo conhecimento das sequências de Leonardo, Padovan, Perrin e Narayana, a seguir, apresentaremos as formas matriciais híbridas destas sequências.

2 Resultados

Nesta seção, serão estudadas as formas matriciais híbridas das sequências de Leonardo, Padovan, Perrin e Narayana, com base em suas respectivas recorrências e nos trabalhos de [10,11,12,13]. Além disso, realiza-se uma extensão para os números inteiros não positivos das formas matriciais híbridas dessas sequências, com o viés de realizar um estudo em torno do processo de generalização desses números.

Definição 2. *A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Leonardo para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$LH_n = 2LH_{n-1} - LH_{n-3}.$$

Teorema 1. *A forma matricial híbrida de Leonardo, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} LH_{n+2} & LH_{n+1} & LH_n \\ LH_{n+3} & LH_{n+2} & LH_{n+1} \\ LH_{n+4} & LH_{n+3} & LH_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo princípio da indução infinita, tem-se que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2LH_2 - LH_0 & LH_2 & LH_1 \\ 2LH_3 - LH_1 & LH_3 & LH_2 \\ 2LH_4 - LH_2 & LH_4 & LH_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \\ LH_5 & LH_4 & LH_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Supondo que seja válido para $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} LH_{k+2} & LH_{k+1} & LH_k \\ LH_{k+3} & LH_{k+2} & LH_{k+1} \\ LH_{k+4} & LH_{k+3} & LH_{k+2} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, demonstra-se que é válido para $n = k + 1, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LH_{k+2} & LH_{k+1} & LH_k \\ LH_{k+3} & LH_{k+2} & LH_{k+1} \\ LH_{k+4} & LH_{k+3} & LH_{k+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2LH_{k+2} - LH_k & LH_{k+2} & LH_{k+1} \\ 2LH_{k+3} - LH_{k+1} & LH_{k+3} & LH_{k+2} \\ 2LH_{k+4} - LH_{k+2} & LH_{k+4} & LH_{k+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LH_{k+3} & LH_{k+2} & LH_{k+1} \\ LH_{k+4} & LH_{k+3} & LH_{k+2} \\ LH_{k+5} & LH_{k+4} & LH_{k+3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

Definição 3. *Os números híbridos de Leonardo com índices negativos são definidos por:*

$$LH_{-n} = L_{-n} + L_{-n+1}i + L_{-n+2}\varepsilon + L_{-n+3}h.$$

Teorema 2. *A forma matricial híbrida de Leonardo para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} LH_2 & LH_1 & LH_0 \\ LH_3 & LH_2 & LH_1 \\ LH_4 & LH_3 & LH_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} LH_{-n+2} & LH_{-n+1} & LH_{-n} \\ LH_{-n+3} & LH_{-n+2} & LH_{-n+1} \\ LH_{-n+4} & LH_{-n+3} & LH_{-n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 4. *A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Padovan para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$PH_n = PH_{n-2} + PH_{n-3}.$$

Teorema 3. *A forma matricial híbrida de Padovan, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PH_{n+2} & PH_{n+1} & PH_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 5. *Os números híbridos de Padovan com índices negativos são definidos por:*

$$PH_{-n} = P_{-n} + P_{-n+1}i + P_{-n+2}\varepsilon + P_{-n+3}h.$$

Teorema 4. *A forma matricial híbrida de Padovan para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PH_2 & PH_1 & PH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PH_{-n+2} & PH_{-n+1} & PH_{-n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 6. *A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Perrin para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$PeH_n = PeH_{n-2} + PeH_{n-3}.$$

Teorema 5. *A forma matricial híbrida de Perrin, para $n \geqslant 1$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PeH_2 & PeH_1 & PeH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PeH_{n+2} & PeH_{n+1} & PeH_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 7. *Os números híbridos de Perrin com índices negativos são definidos por:*

$$PeH_{-n} = Pe_{-n} + Pe_{-n+1}i + Pe_{-n+2}\varepsilon + Pe_{-n+3}h.$$

Teorema 6. *A forma matricial híbrida de Perrin para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} PeH_2 & PeH_1 & PeH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} PeH_{-n+2} & PeH_{-n+1} & PeH_{-n} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 8. *A fórmula de recorrência da sequência híbrida de Narayana para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$NH_n = NH_{n-1} + NH_{n-3}.$$

Teorema 7. *A forma matricial híbrida de Narayana, para $n \geqslant 3$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} NH_1 & NH_0 & NH_{-1} \\ NH_{-1} & NH_{-2} & NH_{-3} \\ NH_0 & NH_{-1} & NH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NH_{n+1} & NH_n & NH_{n-1} \\ NH_{n-1} & NH_{n-2} & NH_{n-3} \\ NH_n & NH_{n-1} & NH_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

Definição 9. *Os números híbridos de Narayana com índices negativos são definidos por:*

$$NH_{-n} = N_{-n} + N_{-n+1}i + N_{-n+2}\varepsilon + N_{-n+3}h.$$

Teorema 8. *A forma matricial híbrida de Narayana para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} NH_1 & NH_0 & NH_{-1} \\ NH_{-1} & NH_{-2} & NH_{-3} \\ NH_0 & NH_{-1} & NH_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NH_{-n+1} & NH_{-n} & NH_{-n-1} \\ NH_{-n-1} & NH_{-n-2} & NH_{-n-3} \\ NH_{-n} & NH_{-n-1} & NH_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 1, pode-se validar este teorema. □

3 Conclusão

Neste artigo apresentamos o conjunto dos números híbridos e as sequências de Leonardo, Padovan, Perrin e Narayana. Desse modo, foram apresentandas suas relações de recorrência, seus respectivos números híbridos e suas equações características. Com isso, foram exibidas as formas matriciais geradores híbridas destas sequências, bem como a extensão para as matrizes com índices inteiros não positivos.

Para trabalhos futuros, propõe-se verificar uma aplicação dessas matrizes para as áreas de exatas e da natureza, bem como encontrar as matrizes geradores híbridas para outras sequências.

4 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap). A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

5 Bibliografia

[1] ÖZDEMIR, M. Introducion to hybrid numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 28, n. 1, art. 11, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s00006-018-0833-3. Acesso em: 08 fev. 2023.

[2] CATARINO, P. On k-Pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, v. 22, n. 1, p. 83-89, 2019.

[3] CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. **arXiv:1806.02231v1 [math.RA]**, 2018. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1806.02231. Acesso em: 09 mar. 2023.

[4] SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, Sciendo**, v. 38, n. 1, p. 91-98, 2018. .

[5] SZYNAL-LIANA, A.; WLOCH, I.On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas hybrid numbers. **Annales Mathematicae Silesianae**, v. 33, n. 1, p. 276-283, 2019.

[6] MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Números híbridos de Mersenne. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1-11, 2020. Edição Iniciação Científica. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/ article/view/206. Acesso em: 09 mar. 2023.

[7] MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The hybrid numbers of Padovan and some identities. **Annales Mathematicae Silesianae**, v. 34, n. 2, p. 256-267, 2020.

[8] MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V. Números híbridos de Fibonacci e Pell. **Revista Thema**, v. 17, n. 3, p. 831-842, 2020.

[9] CATARINO, P. M.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2020.

[10] MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A generalização da forma matricial da sequência de Perrin. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 1, p. 384-392, 2020.

[11] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, p. 24-40, 2019. Edição Iniciação Científica. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/ article/view/233. Acesso em: 17 jan. 2023.

[12] VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, v. 42, 2020.

[13] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; BORGES, A. Construção da forma matricial de sequências lineares e recorrentes: um estudo da matriz geradora. **Cadernos do IME - Série Matemática**, n. 15, p. 167-180, 2020.