

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Maria Júlia Fassis

IGCE - Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mj.fassis@unesp.br

Marta Cilene Gadotti

IGCE - Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mc.gadotti@unesp.br

Teoria da relatividade: uma súpula histórica e sua conexão com a matemática

Theory of relativity: a historical summary and its connection with mathematics

Resumo

A Teoria da Relatividade desenvolvida por Albert Einstein (1879 -1955) no início do século XX provocou uma revolução no campo da Física. Buscamos com esse artigo explicitar as circunstâncias que levaram ao surgimento dessa teoria, entender em que ela foi baseada e apresentar alguns dos conceitos relacionados a ela, como o Princípio da Equivalência, a simultaneidade, a Teoria do Espaço-Tempo e a estrutura dos cones de luz. Nesse trabalho, faremos um apanhado de conceitos e ideias discutidos em diversos trabalhos (que podem ser consultados na bibliografia ao final desse artigo) a fim de apresentar noções e fatos sobre a Teoria da Relatividade para leitores que estão tendo seus primeiros contatos com tal teoria e também com a finalidade de evidenciar quais áreas da matemática se conectam mais fortemente com a mesma.

Palavras-chave: Relatividade. Simultaneidade. Espaço-Tempo.

Abstract

The Theory of Relativity developed by Albert Einstein (1879 -1955) at the beginning of the 20th century caused a revolution in the field of Physics. With this article, we seek to explain the circumstances that led to the emergence of this theory, understand what it was based on and present some of the concepts related to it, such as the Principle of Equivalence, simultaneity, the Space-Time Theory and the structure of cones of light. In this work, we will make an overview of concepts and ideas discussed in various works (which can be consulted in the bibliography at the end of this article) in order to present notions and facts about the Theory of Relativity for readers who are having their first contact with this theory and also with the purpose of highlighting which areas of mathematics connect most strongly with it.

Keywords: Relativity. Simultaneity. Space time.



1 Introdução

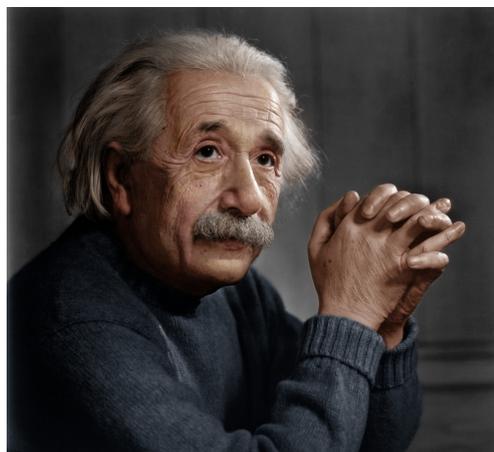


Figura 1: Albert Einstein (1879 -1955)
[Fonte: Google Images]

Em 14 de março de 1879, nasceu na Alemanha **Albert Einstein** (1879 -1955), o gênio por trás da Teoria da Relatividade. Conforme citado no Resumo deste trabalho, tal teoria, formulada no início do século XX, representou uma verdadeira revolução na Física.

Com a Teoria da Relatividade, Einstein (2021) modificou a base de dois conceitos físicos fundamentais: movimento e tempo; alterando, assim, a base da própria física ao propor que a mesma não depende apenas do movimento ou do tempo, mas sim da relação entre eles.

Quanto ao movimento, Albert evidenciou que tal conceito é relativo e depende do ponto de vista pelo qual está sendo observado. Já quanto ao tempo, ele propôs que tal grandeza depende da velocidade e, portanto, não é absoluta, como todos acreditavam na época.

Antes de discutir sobre a **Teoria da Relatividade** e suas consequências, vamos entender, com auxílio de Fabri (2017), as ideias e problemas que faziam parte da *Física* antes do surgimento da mesma, isto é, antes do século XX.

2 Entendendo a física pré-relativística

A *mecânica clássica* é o campo da Física responsável por descrever o movimento de corpos e expressá-los em função do tempo, as definições essenciais dessa área foram desenvolvidas por Isaac Newton (1643 - 1727) e publicadas em sua obra "*Principia*". Tais corpos descrevem trajetórias no espaço euclidiano tridimensional quanto ao espaço e acrescido de uma dimensão temporal. Nessa perspectiva, dado um sistema de coordenadas e sua origem, podemos descrever esse espaço por $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ e seus pontos através de coordenada $P(t, x, y, z)$.

Esse espaço possui uma estrutura causal bem definida e o tempo passa de maneira igual para todos os observadores independente de onde estejam. Assim, considerando dois observadores em posições espaciais distintas (t, x, y, z) e $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, a máxima alteração possível de tempo é dada por uma mudança constante $t = \bar{t} + \tau$, com τ constante. Nesse contexto, temos que todos os relógios, parados ou em movimento, marcam a mesma passagem de tempo para certo evento.

O plano definido por $t = t_0$ formado por todos os pontos do espaço $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ que marcam o mesmo tempo t_0 , constante, é chamado de *superfície de simultaneidade*.

Existem basicamente três formas de escrever a equação do movimento de corpos: via mecânica newtoniana, lagrangiana ou hamiltoniana. Apesar de ter suas especificidades, todas supõem que as equações de movimento são **covariantes**, isto é, escritas da mesma forma em diferentes referenciais inerciais.

Podemos entender como **referencial inercial** todo observador que sofre os efeitos da Lei da Inércia (1ª Lei de Newton), isto é, como um corpo que, quando livre da ação de forças, tende a manter sua velocidade constante (estando parado ou em movimento).

Note que, dado um referencial inercial S , podemos construir outros referenciais inerciais a partir dele somente através de uma translação, rotação ou translação com velocidade constante. O conjunto dessas três transformações recebe o nome de **Grupo de Galileu**.

Dentro do Grupo de Galileu há uma classe de transformação chamada *boosts* que merece nossa atenção. Esses *boosts* nada mais são que as translações com velocidade constante e eles possuem a propriedade comutativa. Dado um referencial S' em movimento com velocidade constante V em relação a um referencial inercial S , temos que S' é um referencial inercial e, considerando que no instante $t = 0$ as origens coincidem, a transformação de coordenadas é dada por $t' = t$ e $r' = r - Vt$. Dessa forma, obtemos a **lei de adição de velocidades galileana**: $v' = v + V$.

Segundo Ege-Land (2022), a lei de adição de velocidades defende que a velocidade de um corpo em relação a um referencial fixo é dada pela soma vetorial entre a velocidade desse corpo em relação a um referencial em movimento e a velocidade do referencial mais móvel em relação a um referencial fixo. Por exemplo, sabemos que uma pessoa, passageira em um trem, se move em relação à Terra a velocidade de 55km/h , pois basta fazer a soma vetorial entre a velocidade da pessoa ao caminhar no corredor do trem (no mesmo sentido que o movimento do trem), que é 5km/h , e a velocidade do trem em relação à Terra, que é 50km/h .

Voltando a Fabri (2017), conseguimos obter as transformações inversas dos *boosts* de Galileu fazendo a mudança $V \rightarrow -V$ para indicar que o referencial S se move na velocidade $-V$ em relação a S' . Além disso, podemos escrever os *boosts* de Galileu na forma matricial:

$$(TG_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_x & 1 & 0 & 0 \\ -V_y & 0 & 1 & 0 \\ -V_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Segue do fato de todas as leis da mecânica serem covariantes por transformações pertencentes ao grupo de Galileu o seguinte postulado:

Postulado 1 *Todas as leis Físicas são covariantes por transformações de Galileu (Fabri, 2017).*

Um axioma parecido com o postulado acima já havia sido suposto por J. H. Poincaré (1854 - 1912) em sua obra *O Valor da Ciência*, com a diferença de que ele não restringia a covariância das leis da Física às transformações de Galileu.

No final do século XIX, surgiu a **eletrodinâmica** através das **Leis de Maxwell**. Entretanto, apesar de bem sucedida, essa teoria possuía uma grande falha: tais leis não eram covariantes pelo Grupo de Galileu. A demonstração de tal afirmação não faz parte dos objetivos desse trabalho e, portanto, será ocultada, a mesma pode ser encontrada em Fabri (2017).

Além dessa falha, a teoria da eletrodinâmica entrava em conflito com o fato de que na mecânica clássica toda velocidade depende de um referencial, pois segundo a equação de onda, obtida a partir das equações de Maxwell, a velocidade da luz é constante e denotada por c .

Apesar das equações de Maxwell não valerem para um referencial inercial específico a princípio, como a equação de onda é válida em relação a porção do meio em repouso para as ondas sonoras em um meio, ficou definido analogamente que o mesmo ocorre para ondas eletromagnéticas e que o meio de propagação delas seria o *éter*. Dessa forma, as equações de Maxwell seriam válidas no referencial onde o *éter* está em repouso.

Para essa implicação surgiram duas possibilidades na época:

- o *éter* seria estacionário e parcialmente arrastado pela Terra em seu movimento de translação ao redor do Sol; ou
- o *éter* seria totalmente arrastado pela superfície da Terra.

H. Fizeau (1849 - 1896) realizou um experimento em 1851 que consistia basicamente em medir a velocidade da luz em uma corrente de água e, a partir de seus resultados, os físicos da época acabaram optando pela primeira hipótese, já que se a segunda fosse a verdadeira, não haveria como verificar a existência do *éter* pelas diferenças na velocidade da luz.

Então, para testar essa primeira hipótese, Albert A. Michelson (1852 - 1931) e Edward W. Morley (1838 - 1923) realizaram em 1887 um experimento, que ficou conhecido como *Experimento de Michelson-Morley* que constituiu-se do seguinte processo: um feixe de luz foi emitido por uma fonte e dividido por um divisor de feixe em duas direções ortogonais, sendo que uma delas estava alinhada com a direção de rotação da Terra. Os dois feixes traçaram o mesmo comprimento e depois foram refletidos em um espelho, retornando para o divisor de feixe e, assim, voltando a ser um só, mostrado em um anteparo.

Tal experimento foi realizado com o desejo de mostrar que, sustentado pela lei de adição de velocidades galileana, o feixe paralelo à rotação da Terra deveria ter seu tempo de trajeto afetado e, portanto, pela diferença de tempo entre os feixes ortogonais, deveria ser possível observar um padrão de interferência nesse teste.

Porém, esse padrão não pode ser observado no nível esperado e, conseqüentemente, pode-se concluir que a velocidade da luz era sim constante em todos os referenciais inerciais e que, então, o *éter* era totalmente arrastado pela superfície da Terra.

Por conta dos resultados obtidos com o Experimento de Michelson-Morley e como esse teste possuía um baixo nível de precisão, diversos outros experimentos foram sendo realizados para se comprovar a invariância da velocidade da luz. Vale mencionar, por exemplo, o trabalho discutido em Muller et al. (2003) que comprovou a invariância de c com o uso de feixes de ressonadores óticos criogênicos ortogonais por meio de observações no decorrer de um ano e acrescidas de previsões de um modelo padrão em busca de anisotropias na velocidade da luz.

Voltando ao Experimento de Michelson-Morley, seu resultado nulo foi explicado por H. A. Lorentz (1853 - 1928) em dois trabalhos intitulados *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, publicado em 1904, e *Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems*, publicado em 1899. Nesses trabalhos, Lorentz sugeriu um conjunto de transformações para as coordenadas e os campos elétrico e magnético que tornavam a velocidade da luz constante e as Leis de Maxwell invariantes. Tais transformações possuíam a propriedade de o tempo ser medido localmente, isto é, diferentes observadores mediriam diferentes passagens de tempo, o que entrava em conflito com a Física clássica. Por isso, tais ideias foram pontualmente rejeitadas na época e o próprio Lorentz as atribuiu a um truque matemático.

Apesar disso, em 1905, com a proposta da Teoria da Relatividade por Albert Einstein, iniciou-se uma revolução na Física. Einstein baseou-se fortemente no Experimento de Michelson-Morley para

construir sua teoria e tinha como principal motivação fazer com que todas as leis da Física tivessem a mesma forma sob qualquer referencial inercial.

As inconsistências Físicas que levaram ao surgimento da Teoria da Relatividade são também apontadas por Silva (2017). Ainda seguindo essa referência, tal teoria foi construída baseada em dois postulados. São eles:

Postulado 2 *As leis da Física são as mesmas para observadores situados em qualquer referencial inercial.*

Postulado 3 *A velocidade da luz no vácuo tem sempre o mesmo valor em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.*

Assim, em uma linguagem menos formal, fica definido, pelo Postulado 2, que as leis da Física são sempre as mesmas para um corpo independente de sua velocidade v , pelo Postulado 3, que o valor da velocidade da luz independe do referencial. É interessante perceber que, graças a isso, mesmo que estivéssemos nos movendo na velocidade da luz (c), ainda observaríamos a luz se movendo a velocidade c .

Einstein publicou seu primeiro artigo sobre a Teoria da Relatividade em 1905, mas sendo essa revolucionária, tal trabalho não foi aceito de imediato pela comunidade acadêmica e, portanto, não foi muito divulgado na época. Ela ganhou mais visibilidade a partir de setembro de 1908, quando Hermann Minkowski (1864 - 1909), que havia sido professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique, a evidenciou em sua palestra *Espaço e Tempo* para uma conferência de cientistas alemães.

Essa teoria inicial passou a ser conhecida como **Teoria da Relatividade Restrita** ou **Teoria da Relatividade Especial**, a qual trouxe para Física a ideia de que *tempo e espaço* são grandezas que compõem as 4 dimensões do espaço-tempo em que vivemos. Tal discussão será melhor desenvolvida na seção 5.

3 Adentrando na teoria da relatividade

Conforme Natário (2010), em 1907, Einstein teve, segundo ele mesmo, "*a ideia mais brilhante de sua vida*". Tal ideia passou a ser chamada de **Princípio da Equivalência** e defende que *para um observador em queda livre, tudo acontece como se não houvesse gravidade*.

Antes de entender melhor esse princípio, lembremos que, conforme foi provado por Galileu, a aceleração da gravidade é a mesma para todos os corpos independente de suas massas; Galileu observou que duas bolas de pesos diferentes jogadas do topo da Torre de Pisa com velocidade inicial nula encontram o chão simultaneamente.

Considere, segundo Carageorge e Zarro (2020), a seguinte situação: imagine uma pessoa e um objeto qualquer dentro de um foguete. Se o foguete estiver caindo em queda livre em direção ao centro da Terra, a pessoa irá soltar o objeto e ambos estarão flutuando dentro do foguete e, portanto, a pessoa verá o objeto em repouso.

Agora, imagine a seguinte situação: uma pessoa e um objeto qualquer dentro de um foguete. Se o foguete estiver se movendo com velocidade constante em um ponto isolado do espaço, a pessoa também verá o objeto em repouso caso o solte.

Por outro lado, considere a situação: imagine uma pessoa e um objeto qualquer dentro de um foguete. Se o foguete em um ponto isolado do espaço estiver se movendo com aceleração de mesma

intensidade que a gravidade na Terra, a pessoa irá soltar o objeto e o verá cair em direção ao chão, ou melhor, na direção contrária ao movimento do foguete.

Imaginando, agora, a seguinte situação: uma pessoa e um objeto qualquer dentro de um foguete que está em repouso na superfície da Terra. Se a pessoa soltar o objeto, ela o verá cair em direção ao chão também.

Com ideias semelhantes a essas, Einstein acabou por propor que a gravidade não seria exatamente uma força e que acelerar gera o mesmo efeito que a gravidade.

Além disso, perceba que a geometria influencia fortemente em um movimento já que, por exemplo, pular de um prédio em queda livre ou descer do topo de um prédio escorregando por um tobogã resultam em situações muito distintas. Assim, Einstein ainda sugeriu que a gravidade é a geometria que indica como os objetos devem acelerar.

Vejam os outros exemplos. Para ilustrá-los, utilizaremos a referência O espaço-tempo [...] (2019). Considere uma bola de tênis e uma bola de futebol em um tecido bem estendido. A bola de futebol em repouso causa uma deformação no tecido e, quando acrescentamos nesse cenário a bola de tênis em movimento, sua trajetória, que deveria ser retilínea e uniforme pela Lei da Inércia, sofre um desvio.



Figura 2: Deformação causada pelas bolas no tecido
[Fonte: O espaço-tempo [...] (2019)]

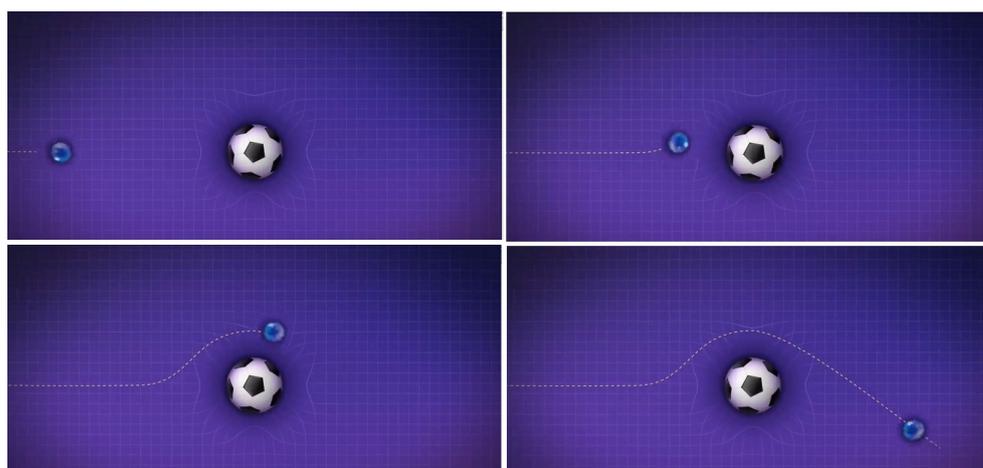


Figura 3: Trajetória da bola de tênis alterada pela deformação do tecido
[Fonte: O espaço-tempo [...] (2019)]

Esse último exemplo é análogo ao que ocorre no Espaço, suponha que a massa dos corpos deforma o tecido do Espaço-Tempo e que, portanto, a deformação nesse tecido causada por um astro

de grande massa (como a bola de futebol) causa um desvio na trajetória de corpos mais leves (como a bola de tênis).

A partir dessa ideia, Einstein desenvolveu a chamada **Teoria da Relatividade Geral**, a qual descreve como objetos e campos eletromagnéticos se movem na presença da gravidade.

Segundo Silva (2017), a Teoria da Relatividade Geral mudou as bases da Física e solucionou os problemas enfrentados na época por essa ciência, já explicitados acima.

Concluindo, com essa teoria, a **gravidade** é vista como a **geometria do Universo**. Além disso, a trajetória da luz passou a ser entendida como uma geodésica em vez de uma reta, isto é, como a curva de menor comprimento ligando dois pontos independentemente da geometria em que estamos trabalhando.

Ainda, a partir da métrica de Minkowski e da geometria curva de Riemann, foi construído o espaço-tempo curvo, o qual iremos explorar na seção 5.

É importante notar que a Teoria da Relatividade se opõe à Geometria Euclidiana, onde o tempo é uma grandeza absoluta, já que dentro dessa teoria existe a **dilatação do tempo**.

Sabemos que a equação genérica para cálculo de velocidade na Física é dada por

$$velocidade = \frac{\vec{deslocamento}}{tempo}, \quad (2)$$

assim, se temos um resultado afirmando que a velocidade da luz se mantém constante (no caso temos o Postulado 3), então significa que o deslocamento e o tempo variam, isto é, tempo e distância são relativos ao observador. É esse fenômeno que chamamos de *dilatação do tempo*.

4 O conceito de simultaneidade

Ainda que exploremos a Teoria do Espaço-Tempo na próxima subseção, é interessante discutirmos um pouco sobre o conceito de **simultaneidade** dentro da Teoria da Relatividade. Para isso, usaremos Capíberibe (2020).

Denotaremos deslocamento por r , variação de tempo por t , velocidade das estações por v e velocidade da luz por c . Ainda, utilizaremos a relação $velocidade = \frac{\vec{deslocamento}}{tempo}$.

Considere duas estações em repouso A e B separadas por uma distância fixa r_{AB} que desejam sincronizar seus relógio usando sinais luminosos. Para que elas consigam realizar seu objetivo, podem seguir o seguinte procedimento: no instante $t_A = 0$, a estação A emitirá um sinal luminoso em direção à B , digamos que a estação B será capaz de ver essa luz no instante $t_A = t$ e marcará seu tempo $t_B = 0$; relação

$$r_{AB} = ct_{ida}. \quad (3)$$

Nesse exato instante, a estação B refletirá esse sinal luminoso para estação A . Esta conseguirá ver a luz refletida no instante $t_B = t$ que equivaleria a marca $t_A = 2t$ já que a luz percorreu duas vezes essa mesma distância r_{AB} e, pela isotropia do espaço, o tempo de ida é o mesmo que o de retorno; relação

$$r_{AB} = ct_{volta}. \quad (4)$$

Porém, por esse mesmo motivo, nesse momento a estação A dividirá seu tempo pela metade, marcando $t_A = t$, assim como está marcando no relógio na estação B ; relação

$$2r_{AB} = ct_{total} \Rightarrow t_{ida} = \frac{t_{total}}{2}. \quad (5)$$

E assim, o horário no relógio de cada uma das estações estará sincronizado com o da outra estação.

Agora, suponha que duas estações A e B separadas por uma distância fixa r_{AB} se deslocam seguindo uma mesma velocidade e desejam sincronizar seus relógio usando sinais luminosos a partir do método discutido acima.

Para um observador externo P em repouso, quando A emite um sinal luminoso em direção a B , supondo que essa é a mesma direção do movimento das estações, P verá a luz percorrendo a distância r_{AB} mais a distância r que as estações se deslocaram durante o tempo que a luz leva para ser vista pela estação B . Já quando o pulso é refletido por B na direção de A , isto é, na direção oposta ao movimento das estações, P verá a luz percorrendo a distância r_{AB} menos a distância r que as estações se deslocaram durante o tempo que a luz refletida leva para ser vista pela estação A . Então, temos

$$r_{luzIda} = r_{AB} + r \Rightarrow ct_{ida} = r_{AB} + vt_{ida} \Rightarrow r_{AB} = (c - v)t_{ida} \Rightarrow t_{ida} = \frac{r_{AB}}{(c - v)} \quad (6)$$

e

$$r_{luzVolta} = r_{AB} - r \Rightarrow ct_{volta} = r_{AB} - vt_{volta} \Rightarrow r_{AB} = (c + v)t_{volta} \Rightarrow t_{volta} = \frac{r_{AB}}{(c + v)}. \quad (7)$$

Logo, para a estação A , o tempo de ida e volta do sinal luminoso é $\delta t' = \frac{2r'_{AB}}{c}$ onde r'_{AB} é a distância entre as estações medidas no referencial de observadores dentro delas. Porém, para o observador P , o tempo de ida e volta do sinal luminoso é $\delta t = t_{ida} + t_{volta} = \frac{r_{AB}}{c-v} + \frac{r_{AB}}{c+v} \Rightarrow \delta t = \frac{2r_{AB}}{c(1-v^2/c^2)}$.

Dessa forma, temos

$$\frac{\delta t'}{\delta t} = \frac{r'_{AB}}{r_{AB}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (8)$$

Porém, pela contração do comprimento de FitzGerald-Lorentz (isto é, a relação $l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, segundo ARAÚJO et al. (2005), essa razão deveria ser dada por

$$\frac{\delta t'}{\delta t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \delta t' = \frac{\delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9)$$

Portanto, concluímos que simultaneidade e tempo são grandezas relativas, já que, seguindo nossa discussão, se simultaneidade e tempo fossem grandezas absolutas, essas duas razões seriam equivalentes.

Vejamus outra situação.

Considere, segundo a figura abaixo, duas fontes idênticas de luz L_1 e L_2 que se afastam com velocidade v na direção x do referencial S e que são equidistantes em relação ao observador O' no referencial S' . Se em um certo momento as fontes emitem uma onda eletromagnética esférica, o observador O' vê tais emissões de forma simultânea, já o observador O vê a fonte L_2 emitindo um sinal luminoso antes da fonte L_1 .

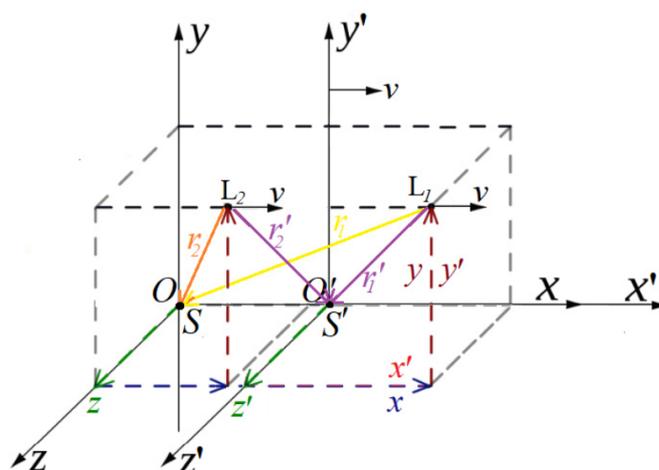


Figura 4: Ilustração para Discussão sobre Simultaneidade
[Fonte: Capiberibe (2020)]

Essa discussão que acabamos de concluir retrata o **Princípio da Relatividade da Simultaneidade** formulado por Poincaré em 1898, mas aplicado à Física somente no início do século XX.

5 Relatividade e a teoria do espaço-tempo

Segundo Silva (2017), no geral, o espaço é um conceito físico classificado como contínuo, homogêneo, físico ou infinito. Tal conceito foi melhor desenvolvido por Galileu e Newton, o qual foi responsável pela lei clássica de movimento.

No final do século XIX, com os avanços na Física em relação à teoria do espaço e o surgimento das geometrias não-euclidianas, o *espaço* passou a ser visto como infinito pela geometria.

Como comentado anteriormente, Minkowski teve um papel importante na divulgação da Teoria da Relatividade. Ele foi quem desenvolveu a ideia de que a relatividade espacial poderia ser tratada como uma geometria do espaço-tempo e apresentou essa concepção em uma construção baseada em quadrivetores. Nessa formulação, espaço e tempo são grandezas indissociáveis e formam um espaço-tempo contínuo.

Segundo Einstein, os eventos dentro da **Geometria de Minkowski** são naturalmente de quatro dimensões e descritos por coordenadas (x, y, z, t) onde x, y, z são coordenadas espaciais e t é coordenada temporal. Em 1907, Minkowski declarou em uma palestra que o mundo no espaço e no tempo é, em certo sentido, uma variedade não-euclidiana quadridimensional.

Agora, com auxílio de Carageorge e Zarro (2020), enteremos um pouco mais sobre a **curvatura do espaço-tempo**. Vale, então, reforçar que a Teoria da Relatividade se constrói ao entender a gravidade como a geometria do Universo.

Vamos iniciar imaginando uma malha retangular construída com varetas de metal formando um espaço euclidiana bidimensional. Se aquecemos algum ponto dessa malha, o calor não se propagará uniformemente e, assim, as varetas se contorcerão de forma desigual formando um espaço não euclidiano.

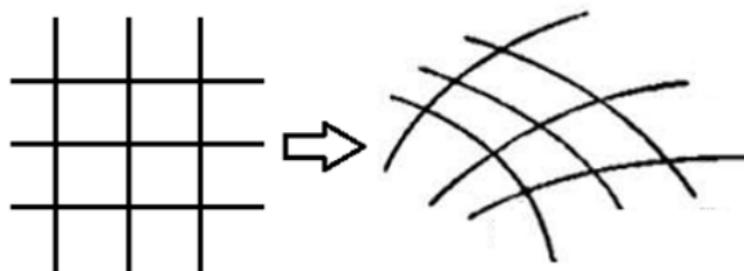


Figura 5: Malha retangular e, depois, retorcida
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

Seguindo o Princípio da Equivalência, sabemos que é apenas sob ação da gravitação que dois corpos se movem da mesma maneira a partir das mesmas condições iniciais. Para Einstein, a unicidade desses percursos poderia ser expressa em uma geometria quadridimensional, chamada **espaço-tempo** onde os corpos se movem em trajetórias retilíneas no espaço-tempo curvo.

Ilustraremos a descrição geométrica da curvatura de tal espaço em duas dimensões.

Sabemos, por exemplo, na geometria euclidiana que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em π radianos e que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu raio resulta em 2π .

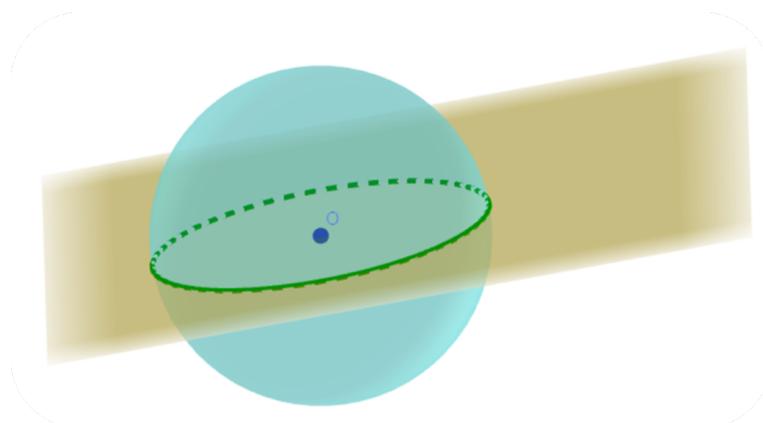


Figura 6: Círculo Máximo (verde)
[Imagem construída pelas autoras]

Já na geometria esférica, uma geometria não-euclidiana, as linhas serão, na verdade, círculos máximos, Figura 6, e a menor distância entre dois pontos será dada pelo comprimento de um arco de círculo máximo.

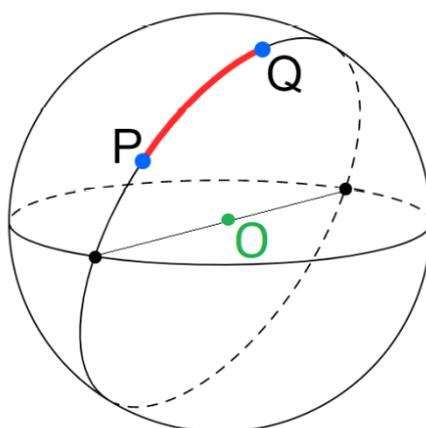


Figura 7: Menor distância em uma superfície esférica
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

Ainda na geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo depende de sua área A e satisfaz a relação

$$\pi + \frac{A}{R^2}. \quad (10)$$

Apesar de cada geometria ter suas especificidades, no geral, é sempre interessante descrevê-las usando a geometria diferencial, pois esta reduz toda geometria através de distâncias entre cada par de pontos. Nessa perspectiva, a distância entre pontos pode ser calculada com integrações e vemos as linhas retas como curvas que minimizam essa distância.

Adotamos *sistemas de coordenadas* para denotar cada ponto exclusivamente. Trabalhando em três dimensões, podemos adotar, por exemplo, as coordenadas cartesianas (x, y, z) ou as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) .

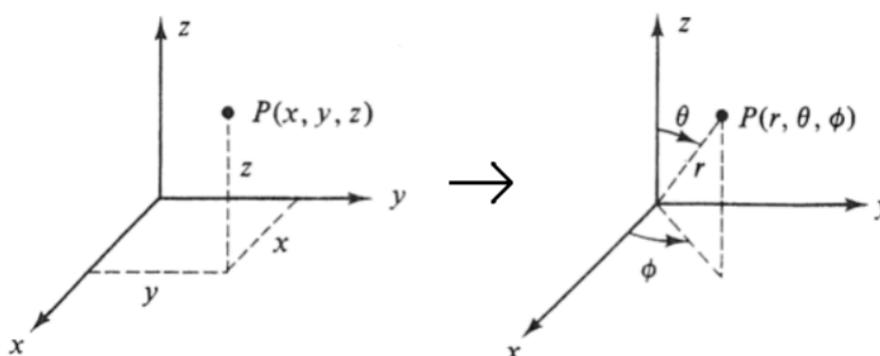


Figura 8: Coordenadas cartesianas e esféricas
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

As coordenadas cartesianas e esféricas se relacionam por meio das igualdades:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

Logo, as derivadas delas se relacionam seguindo as igualdades:

$$\begin{cases} dx = dr \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi \\ dy = dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta d\theta \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi \\ dz = dr \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta d\theta \end{cases} \quad (12)$$

Como não há um único sistema de coordenadas, definiremos uma grandeza invariante chamada **intervalo espaçotemporal** e denotada por ds^2 descrita por elementos de linha, os quais especificam a geometria espaço-temporal usada.

Por exemplo, no espaço-tempo de Minkowski, o intervalo espaçotemporal é dado por

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (13)$$

ou, substituindo as coordenadas cartesianas por esféricas, temos: $ds^2 = -(cdt)^2 + (dr \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi)^2 + (dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta d\theta \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi)^2 + (dr \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta d\theta)^2$

$$\Rightarrow ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + (rd\theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta d\phi)^2. \quad (14)$$

Portanto, os elementos de linha do espaço-tempo de Minkowski são dados por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (15)$$

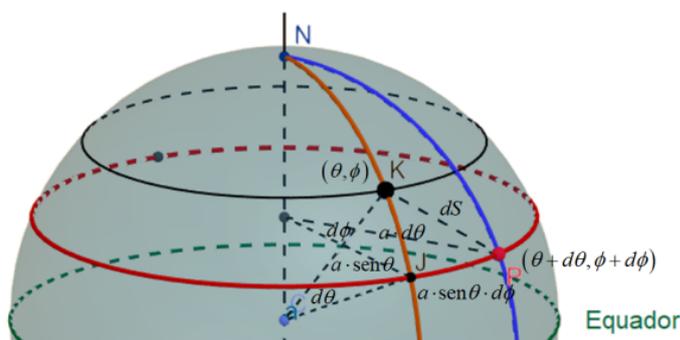


Figura 9: Elemento de linha em coordenadas esféricas
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

Para descrever uma *geometria genérica*, adotamos o sistema quadridimensional x^a , com $a = 0, 1, 2$ ou 3 , para mapear os pontos (por exemplo, no espaço-tempo de Minkowski $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$) e definimos o elemento de linha $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$, onde g_{ab} é a métrica do espaço-tempo, para dois pontos próximos separados pelo intervalo coordenado dx^a .

Voltando à geometria esférica, o elemento de linha nas coordenadas esféricas é dado por

$$ds^2 = R^2(dz\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (16)$$

Veja que essa relação decorre naturalmente usando o Teorema de Pitágoras para Geometria Esférica para determinar a distância ds^2 entre os pontos K e P na Figura 9, já que para K localizado em (θ, ϕ) e P em $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$, a distância entre J e P , na mesma latitude θ , é dada por $R \operatorname{sen} \theta d\phi$ e entre J e K , na mesma longitude ϕ , é dada por $R d\theta$.

Além disso, suponha uma circunferência com centro no polo norte da esfera. Assim, a medida C dessa circunferência (perímetro) será a integral ds em torno do círculo de θ constante, digamos $\theta = \Theta$, isto é, $C = \oint ds = \int_0^{2\pi} R \operatorname{sen} \Theta d\phi = 2\pi R \operatorname{sen} \Theta$. Também, o raio r dessa circunferência é dado pela integral ao longo de qualquer curva com ϕ constante, isto é $r = \int ds = \int_0^\Theta R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}$. E, portanto,

$$C = 2\pi R \operatorname{sen} \Theta \Rightarrow C = 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R} \right). \quad (17)$$

Note que quando r é infinitesimalmente pequeno em relação a R , recuperamos $C = 2\pi r$ da geometria euclidiana já que $C = \lim_{\frac{r}{R} \rightarrow 0} 2\pi R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R} \right) = 2\pi R \frac{r}{R} = 2\pi r$.

Perceba, então, que montando um sistema com as equações (10) e (17), podemos descobrir o raio de uma esfera.

Considere a seguinte definição dada por Natário (2010).

Definição 4 *Suponha que um sinal luminoso foi emitido com período T , mas certo observador mediu um período T' . Nessa situação, dizemos que o sinal sofreu um **desvio para o vermelho**, denotado por z , de $z = \frac{T'-T}{T} = \frac{T'}{T} - 1$, ou ainda*

$$T' = T(1 - z). \quad (18)$$

Ainda segundo a referência Carageorge e Zarro (2020), o desvio para o vermelho causa uma mudança na componente temporal por conta do potencial gravitacional. Então, reescrevemos o elemento de linha considerando a mudança da geometria por ação da gravidade. Seja Φ o potencial gravitacional, temos

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (19)$$

Apesar disso, a Teoria da Relatividade conjectura uma alteração na componente espacial da métrica por conta das massas dos corpos e, nesse caso, temos o elemento de linha dado por:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (20)$$

Sendo assim, ainda utilizando Carageorge e Zarro (2020) acrescido de Fabri (2017), vejamos alguns diagramas de espaço-tempo. Vamos introduzir o conceito dos *cones de luz*, trabalhando, assim, com o **Espaço-tempo de Lorentz-Minkowski**.

Antes de continuar, segue da Geometria Diferencial que

- A distância entre dois pontos em coordenadas cartesianas é dada por $D = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$;
- O tensor métrico no \mathbb{R}^3 é $g_{ab} = \delta_{ab}$;
- Valem no \mathbb{R}^3 $\partial_a g_{bc} = 0$ e $\Gamma_{bc}^a = 0$, logo, o operador derivativo é somente a derivada parcial e o tensor de curvatura é nulo. Consequentemente, as geodésicas são da forma $x^a(\tau) = A^a \tau + B^a$ onde A^a e B^a são dados pelas condições de contorno.

Para entender melhor tais afirmações, consulte Fabri (2017).

Postulado 5 (Existência de \mathbb{L}^4) *O espaço-tempo na Teoria da Relatividade Restrita, chamado de **espaço de Lorentz-Minkowski** e denotado por \mathbb{L}^4 , é a variedade \mathbb{R}^4 munida da métrica lorentziana plana.*

*Todo ponto nesse espaço é denominado **evento**.*

Isto é, considerando um sistema quadridimensional (t, x, y, z) para representar um *diagrama espaço-tempo* como na figura abaixo, os pontos P são chamados **eventos** e suas coordenadas x_P e t_P informam sobre onde e quando o evento ocorreu.

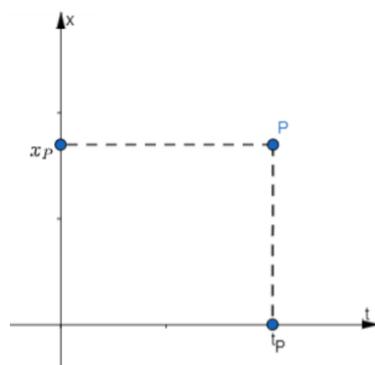


Figura 10: Diagrama espaço-tempo
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

Perceba que, nessas configurações, é conveniente se aproveitar da constância da velocidade da luz e transformar a coordenada temporal na espacial ct para que ambos os eixos na Figura 10 tenham a mesma dimensão.

Ainda, analogamente que ao \mathbb{R}^3 , $\partial_a g_{bc} = 0$ e $\Gamma_{bc}^a = 0$ em \mathbb{L}^4 e, portanto, \mathbb{L}^4 é uma variedade quadridimensional plana, onde as geodésicas são segmentos de reta e é possível construir um sistema de coordenadas globais da forma $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$, nos quais o tensor métrico é ortonormal,

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Definição 6 Denominamos de **inercial** todo sistema de coordenadas do espaço-tempo no qual o tensor métrico tem a forma ortonormal em todo \mathbb{L}^4 .

Postulado 7 (Lei da Inércia para \mathbb{L}^4) Chamamos de **linha de mundo** ou **linha do universo** a trajetória de qualquer corpo no espaço \mathbb{L}^4 e esta é sempre do tipo temporal.

Além disso, os corpos livres da ação de forças se movimentam em geodésicas também do tipo temporal.

Note que, pelo postulado acima, fica estabelecido que nenhum corpo se move com velocidade maior que a velocidade da luz. Além disso, esse postulado estabelece uma estrutura de causalidade ao espaço-tempo.

Veja na figura (11) que a linha de mundo A representa uma partícula em repouso, a linha de mundo B uma partícula em movimento uniforme (isto é, com velocidade constante) e a linha de mundo C uma partícula em movimento oscilatório.

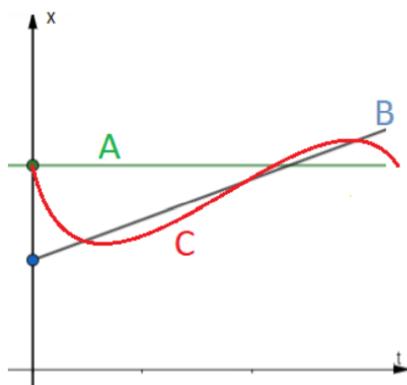


Figura 11: Linhas de Mundo representadas em um espaço bidimensional como o da Figura 10
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]

Considere dois eventos (x^μ) e (y^μ) , o intervalo entre eles é dado por $s^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$.

O elemento de linha ds^2 pode ser positivo, negativo ou nulo e, dependendo desse valor, originam três tipos de *linhas de mundo*:

- ☆ $ds^2 > 0 \Rightarrow$ linhas de mundo do tipo **temporal**;
- ☆ $ds^2 = 0 \Rightarrow$ linhas de mundo do tipo **nulo**;
- ☆ $ds^2 < 0 \Rightarrow$ linhas de mundo do tipo **espaço**.

Note que $ds^2 = 0$ quando um corpo se move na velocidade da luz. De fato, $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 + (v dt)^2 = -c^2 dt^2 + (c dt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0$.

Tal situação é expressa no diagrama espaço-tempo (Figura 10) geometricamente por linhas inclinadas a 45° . Para duas dimensões espaciais xy , tais linhas formam **cones de luz** como os que podemos ver na figura abaixo. Esses cones representam trajetórias onde a luz parte do **presente**.

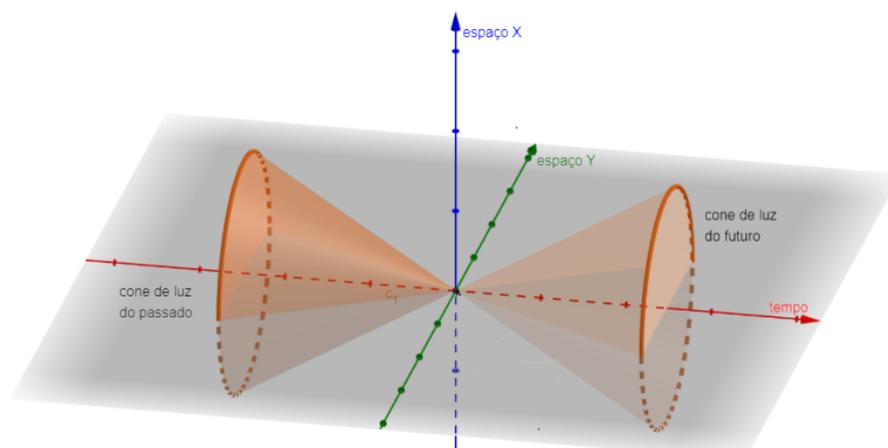


Figura 12: Cone de luz (t, x, y)
[Fonte: Carageorge e Zarro (2020)]



As linha do tipo **tempo**, isto é, quando $ds^2 > 0$, tem suas representações **dentro do cone de luz** já que sua linha de mundo tem inclinação menor que 45° . Nesse caso, o objeto está se movendo a uma velocidade menor que a da luz, isto é, tais linhas representam objetos reais.

Já as linha do tipo **espaço**, isto é, quando $ds^2 < 0$, tem suas representações **fora do cone de luz** já que sua linha de mundo tem inclinação maior que 45° . Nesse caso, o objeto está se movendo a uma velocidade maior que a da luz.

Note que, se estamos no **presente**, então os pontos no interior do **cone futuro** representam os eventos que conseguimos alcançar com um sinal físico, isto é, poderíamos viajar até eles com linha do tipo *tempo* ou *nulo*.

Ainda, se estamos no **presente**, então os pontos no interior do **cone passado** representam os eventos que podem chegar ao presente, isto é, os eventos que podem afetar o presente, mas que não podemos alcançar de forma alguma.

6 Conclusão

Para finalizar, com auxílio de Natário (2010), indicamos que, no geral, os **tópicos da matemática envolvidos com a Teoria da Relatividade** são:

- ❖ **Cálculo Infinitesimal:** isto é, os conceitos de limites, derivadas e integrais responsáveis por descrever diversos fenômenos físicos. Por exemplo, a velocidade instantânea u é dada pela razão entre a distância percorrida, Δs , e o período de tempo que se levou para percorrer essa distância, Δt , quando $\Delta t \rightarrow 0$, assim podemos expressar u pelo limite $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ou ainda pela derivada $u = \frac{ds}{dt}$.
- ❖ **Equações Diferenciais:** já que estas descrevem o movimento de partículas em Relatividade Geral (por serem equações que relacionam as funções incógnitas com suas derivadas) e a própria equação de Einstein é uma equação diferencial.
- ❖ **Geometrias Não-Euclidianas:** com toda discussão feita nesse trabalho, principalmente na seção 5, é fácil perceber que é insustentável utilizar a geometria euclidiana para trabalhar com a Teoria da Relatividade.
- ❖ **Geometria Diferencial:** pois essa é uma área da matemática que abrange os estudos de espaços curvos. Vale ressaltar que, segundo Fabri (2017), a Teoria da Relatividade pode até ser trabalhada sem o uso da Geometria Diferencial, porém essa última potencializa a primeira; nesse artigo, inclusive, optamos por utilizar o mínimo de geometria diferencial ao discutir os elementos e conceitos dentro da Teoria da Relatividade.

7 Agradecimento

Gostaríamos de agradecer à FAPESP (processo nº 2021/02517-7) pelo apoio a nossa pesquisa, a qual resultou, entre outras coisas, nesse trabalho.



Referências

- [1] BARROS, A.; MONTE, E. M.; ARAÚJO, I. G.; OLIVEIRA, J. C. T.; VIEIRA, S. Sobre a contração de Lorentz-Fitzgeral, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 4, p. 621-623, 2005.
- [2] CAPIBERIBE, A. R. **O princípio da relatividade: matemática (lições)**. Campo Grande: Alrisha, 2020. v. 3.
- [3] CARAGEORGE, E. C.; ZARRO, C. A. D. **Princípios físicos e matemáticos da teoria da relatividade geral**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2020. Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Cespedes Carageorge.
- [4] EGE-LAND. **A lei da adição de velocidades**. [S. l.: s. n.], 2022. Disponível em: <https://ege-land.ru/pt/ballet-stars/zakon-slozheniya-skorostei-zakon-slozheniya-skorostei-v-klassicheskoi.html>. Acesso em: 25 ago. 2022.
- [5] EINSTEIN, A. **A teoria da relatividade: sobre a teoria da relatividade especial e geral (para leigos)**. Porto Alegre, 2021. (Coleção L&PM pocket, v. 1186).
- [6] FABRI, M. A. **Relatividade especial, gravitação e formulação covariante das equações de Maxwell em um espaço-tempo curvo via formas diferenciais**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2017.
- [7] MULLER, H.; HERRMANN, S.; BRAXMAIER, C.; SCHILLER, S.; PETERS, A. Modern Michelson-Morley experiment using cryogenic optical resonators. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 2, p. 020401, 2003.
- [8] NATÁRIO, J. **A geometria da relatividade**. [Lisboa: S. l.], 2010. Texto de apoio a um curso ministrado aos alunos do 10º e 11º anos, em 2005 e 2010, no Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lisboa. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~sanjos/estagio/Textos.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2022.
- [9] O ESPAÇO-TEMPO explicado. [S. l.: s. n.], 2019. 1 vídeo (1 min). Publicado pelo canal Ciência Todo Dia. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kJ5xNaSIeTI&t=70s>. Acesso em: 24 ago. 2022.
- [10] SILVA, J. P. A. **As geometrias euclidiana e não-euclidianas**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - PROFMAT - IMPA, Rio de Janeiro, 2017.