Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Pesquisa

Um estudo da equação soma-produto de números naturais

A study of the sum-product equation of natural numbers

Fernando Soares de Carvalho
Câmpus de Arraias - Matemática
Universidade Federal do Tocantins
fscarvalho@uft.edu.br

Eudes Antonio Costa
Câmpus de Arraias - Matemática
Universidade Federal do Tocantins
eudes@uft.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre uma equação que relaciona a soma e o produto de números naturais. Como encontrar soluções para essa equação pode ser desafiador, focamos em três casos particulares para simplificar a análise e explorar vários métodos para encontrar soluções.
Palavras-chave: Equação soma-produto. Número de soluções. Inteiros positivos. Fração unitária.

Abstract

This work presents a study on an equation that relates the sum and product of natural numbers. Since finding solutions to this equation can be challenging, we have focused on three particular cases to simplify the analysis and explore various methods for finding solutions.
Keywords: Sum-product equation. Number of solutions. Positive integers. Unit fraction.

Artigo recebido em abr. 2023 e aceito em jul. 2023

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Nestas notas, consideraremos o conjunto dos números inteiros positivos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ e por simplicidade e conveniência diremos apenas que $x \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ é um número natural. Nossa discussão aqui se preocupa exclusivamente com a aritmética na base decimal. O interesse é fazer um estudo acerca da resolução de alguns casos da equação "soma igual produto" de números naturais dada por:

$$x \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, \tag{1}$$

com $n, x, x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $x_i \leq x_j$ para $i < j$. Também por conveniência chamaremos a Equação (1), apenas de equação *soma-produto*.

Exemplo 1. *Veja que,* $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_{2020} = 1$*,* $x_{2021} = 2$ *e* $x_{2022} = 2022$ *é uma solução particular da Equação* (1)*, para* $n = 2022$*. Além disso,* $x = 340707$*,* $x_1 = x_2 = x_3 = 1011$ *é uma solução particular da Equação* (1)*, para* $n = 3$.

Vamos mostrar como encontrar uma solução da Equação (1) para alguns casos específicos, como estas apresentadas no Exemplo 1. Além disso, vamos denotar por $s_x(n)$ a quantidade de soluções da Equação (1) quando fixado os valores de x e n, e indicamos por:

$$s_x(n) = \#\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n : x \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\}. \tag{2}$$

Nestes termos, segue que $s_1(2022) \geq 1$. Será que a solução, apresentada no Exemplo 1, é única? Uma questão em aberto é se o número $s(n)$ de soluções inteiras da Equação 1 tende a infinito com n arbitrariamente grande. Em [1] tem-se um limite inferior geral para $s(n)$ dada a condição $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

O trabalho está organizado da seguinte forma: considerando a equação (1), na seção 2, analisamos o caso $x = 1$, cujos resultados apresentados podem ser vistos em [1, 2, 3]. Nas seções 3 e 4, são apresentados os casos $n = 2$ e $n = 3$, respectivamente. Ressalta-se que, os resultados apresentados nas seções 3 e 4, tratam-se de adaptações feitas pelos autores, de resultados apresentados em [4, 5, 6].

2 Primeiro caso: $x = 1$

Neste caso, tem-se que a soma é igual ao produto e alguns destes e outros resultados podem ser vistos em [2, 3]. Inicialmente, observa-se que sempre é possível obter uma solução trivial, dada por

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (1, 1, ..., 1, 2, n). \tag{3}$$

Por exemplo, para os casos $n = 2, 3$ ou 4, tem-se apenas a solução trivial. Para $n = 5$, obtém-se duas soluções não-triviais, a saber, $(1, 1, 1, 3, 3)$ e $(1, 1, 2, 2, 2)$. Portanto, $s_1(2) = s_1(3) = s_1(4) = 1$ e $s_1(5) = 3$.

Observe que, se $n - 1$ é um número composto, então a Equação (1) tem pelo menos uma solução não-trivial. De fato, basta observar que se $(n - 1)$ é um número composto, então existem números naturais a e b com, $2 \leq a \leq b < n - 1$, tais que, $n - 1 = a \cdot b$. Logo, $(1, 1, ..., 1, a + 1, b + 1)$ é uma solução não-trivial. Isso garante a validade do resultado a seguir:

Proposição 2. *Para todo* $n > 2$*, se* $n - 1$ *é um número natural composto, então* $s_1(n) > 1$.

No Exemplo 1 usamos $n = 2022$, como $n - 1 = 2022 - 1 = 2021 = 43 \cdot 47$ é composto, temos que $s_1(2022) > 1$, ou seja, existe pelo menos uma solução não trivial.

Exemplo 3. *Usando a Proposição 2, apresentamos soluções não triviais para distintos valores de n:*

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 17, 65)$ *é uma solução para* $n = 1025$*;*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 44, 48)$ *é uma solução para* $n = 2022$*;*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 7, 338)$ *é uma solução para* $n = 2023$*;*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 3, 3008)$ *é uma solução para* $n = 6015$*;*
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1, 12, 1005)$ *é uma solução para* $n = 11045$.

Note que, a Proposição 2 é equivalente a afirmar que, se $s_1(n) = 1$, então $(n - 1)$ é um número primo. Sabemos que, $s_1(6) = s_1(24) = s_1(114) = s_1(174) = s_1(444) = 1$ e que $n = 444$ é o maior valor para o qual $s_1(n) = 1$, com $1 \leq n \leq 1000$. Não é uma tarefa fácil determinar valores de n para os quais $s_1(n) = 1$ e para os casos em que $s_1(n) > 1$, determinar o valor exato de $s_1(n)$. Mas é possível mostrar que o valor de $s_1(n)$ pode se tornar tão grande quanto se queira. É o que faremos na Proposição a seguir.

Proposição 4. *O valor de $s_1(n)$ pode ser arbitrariamente grande.*

Demonstração. Seja $n = 2^{2s} + 1$ e sejam $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$. Para $j \in \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ façamos,

$$x_{n-1} = 2^j + 1 \quad \text{e} \quad x_n = 2^{2s-j} + 1. \tag{4}$$

Logo, toda sequência $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ será solução da Equação,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\ . \tag{5}$$

Observando que, j pode assumir $s + 1$ valores distintos, teremos $s + 1$ soluções também distintas. Portanto, dados os números s e j, ao definir x_{n-1} e x_n como em (4), teremos $s + 1$ soluções. $\square$

Exemplo 5. *Considere o número* $n = 1025 = 2^{2 \cdot 5} + 1$*, segue da Proposição 4 que* $s_1(1025) = 5 + 1 = 6$*, ou seja, a Equação* (5) *possui ao menos 6 soluções não triviais para* $n = 1025$.

Proposição 6. *Para todo $n > 5$ se $s(n) = 1$, então $n \equiv 0 \mod 3$.*

Demonstração. Como $n > 5$, caso tenhamos $n = 3m + 1$, para algum conveniente m natural. Veja que $n - 1 = 3m$ é um número composto e de acordo com a Proposição 2, temos que $s(n) > 1$. Agora, se tivéssemos $n = 3m + 2$, para algum conveniente m natural, daí $(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, m + 1)$ é uma solução não-trivial. Portanto, resta-nos apenas que, se $s(n) = 1$, devemos necessariamente ter $n \equiv 0 \mod 3$. $\square$

Note ainda que, é possível estabelecer uma cota superior para a soma $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. De fato, vamos considerar u_n como o número de elementos unitários na solução $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Assim, tem-se $k = n - u_n \geq 2$ elementos diferentes da unidade e que podem ser escritos na forma, $(y_i + 1)$ com $ty_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_k$. Daí,

$$(y_1 + 1) \cdot (y_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (y_k + 1) = y_1 + y_2 + \cdots + y_k + \underbrace{k + u_n}_{n}. \tag{6}$$

Se $k = 2$, $y_1 \cdot y_2 = n - 1$ e $(y_1 + y_2)$ será máximo quando $y_1 = 1$. Assim, $y_1 + y_2 \leq n$ e neste caso vale a igualdade. Se $k \geq 3$, tem-se

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n + (y_1 + y_2 + \cdots + y_k) \leq n + (y_1 y_2 + y_2 y_3 + \cdots + y_k y_1) < \\ n + (y_1 + 1)(y_2 + 1). \cdots .(y_k + 1) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k) = 2n.$$

Isto mostra a Proposição a seguir:

Proposição 7. *Se* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *é uma solução de* (1)*, então* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 2n$.

Como consequência da Proposição 7, pode-se mostrar que é possível estabelecer uma cota inferior para u_n. No que segue, $\lceil x \rceil$ representa o menor número inteiro maior ou igual a x.

Corolário 8. *Seja* u_n *o número de elementos unitários na solução* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$*, então* $(n - 1 - \lceil log_2 n \rceil) \leq u_n$.

Demonstração. Considerando $k = n - u_n$, tem-se que

$$2^k \leq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 2n,$$

isto é, $2^k \leq 2n$, o que implica, $k \leq 1 + log_2 n$, ou ainda, $k \leq 1 + \lceil log_2 n \rceil$. Logo, $n - u_n \leq 1 + \lceil log_2 n \rceil$. Portanto, $n - 1 - \lceil log_2 n \rceil \leq u_n$. □

Veja na Tabela 1, algumas estimativas para o valor de u_n:

n	$\leq u_n$
5	1
10	5
100	92
500	400
1000	989
2023	2011

Tabela 1: Estimativas para u_n

Para finalizar esta seção, deixamos duas conjecturas apresentadas em [3]:

Conjectura 9. *Se* $n > 5$ *e* $s_1(n) = 1$*, então* n *é da forma* $30k + 24$*, para algum conveniente* k *natural.*

Conjectura 10. *Se* $n > 100$ *e* $s_1(n) = 1$*, então* $n = 114$ *ou* $n = 174$ *ou* $n = 444$.

3 Segundo caso: $n = 2$

A Equação (1) será reduzida a,

$$x \cdot (x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_2 \, . \tag{7}$$

Observe que, caso tenhamos também $x = 2$ na Equação (7), teremos as soluções $(x_1, x_2) = (4, 4)$ e $(3, 6)$, ou seja, tem-se $s_2(2) = 2$. Neste caso, para encontrar outras soluções e analisar sobre o número de soluções da Equação (7), utilizaremos as *frações unitárias*, isto é, as frações com numerador igual a unidade. É possível mostrar que, assumindo algumas hipóteses, sempre podemos decompor uma fração unitária do tipo $1/x$ como soma de duas outras frações unitárias, ver Proposições 11 e 14 abaixo.

Para o que segue, será conveniente escrever a Equação (7), da forma

$$\begin{aligned} x \cdot (x_1 + x_2) &= x_1 \cdot x_2 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{x} \, , \end{aligned}$$

com $x_1, x_2 > 1$ naturais. Os resultados a seguir mostram como determinar uma solução (x_1, x_2) da Equação (7).

Proposição 11. *Sejam $a, x \in \mathbb{N}^*$. Se a é um divisor de x, então*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \tag{8}$$

com $x_1 = x + a$ e $x_2 = \dfrac{x(x+a)}{a}$ soluções da Equação (8).

Demonstração. Inicialmente note que, como a divide x, tem-se x_1 e $x_2 \in \mathbb{N}$. E ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{x+a} + \frac{1}{\frac{x(x+a)}{a}} \\ &= \frac{1}{x+a} + \frac{a}{x(x+a)} \\ &= \frac{x+a}{x(x+a)} = \frac{1}{x} \, . \end{aligned}$$

□

Corolário 12. *Seja $x \in \mathbb{N}^*$, então*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \tag{9}$$

com $x_1 = x + 1$ e $x_2 = x(x + 1)$.

Demonstração. Basta considerar $a = 1$ na Proposição 11. □

Exemplo 13. *A Tabela 2 apresenta soluções (x_1, x_2), para $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $d(x)$ indica os divisores de x.*

x	$(x_1,x_2) = (x+1, x(x+1))$	$d(x)$	a	$(x_1,x_2) = \left(x+a, \frac{x(x+a)}{a}\right)$
3	(4,12)	1, 3	3	(6,6)
4	(5,20)	1, 2, 4	2	(6,12)
5	(6,30)	1, 5	5	(10,10)
6	(7,42)	1, 2, 3, 6	3	(9,18)
7	(8, 56)	1, 7	7	(14,14)
8	(9,72)	1, 2, 4, 8	4	(12,24)

Tabela 2: Soluções para $x \in \{3,4,5,6,7,8\}$

Proposição 14. *[4] Considere x um número natural maior que 2 e sejam a e b divisores distintos de x, então*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \tag{10}$$

com $x_1 = \dfrac{x(a+b)}{a}$ e $x_2 = \dfrac{x(a+b)}{b}$ soluções da Equação (10).

Demonstração. Como a, b são divisores de x (logo não nulos), temos que, x_1 e x_2 são naturais, e ainda

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{\frac{x(a+b)}{a}} + \frac{1}{\frac{x(a+b)}{b}} \\ &= \frac{a}{x(a+b)} + \frac{b}{x(a+b)} \\ &= \frac{a+b}{x(a+b)} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 15. *A Tabela 3 apresenta soluções (x_1, x_2), para $x \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.*

x	$d(x)$	(a,b)	$(x_1,x_2) = \left(\frac{x(a+b)}{a}, \frac{x(a+b)}{b}\right)$
9	1, 3, 9	(1,3)	(36,12)
10	1, 2, 5, 10	(2,10)	(60,12)
11	1, 11	(1,11)	(132,12)
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	(3,6)	(36,18)
13	1, 13	(1,13)	(182,13)
14	1, 2, 7, 14	(2,7)	(63,18)

Tabela 3: Soluções para $x \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

4 Terceiro caso: n=3

Neste caso a Equação (1), se reduz a

$$x \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \tag{11}$$

com $x_i > 1 \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2, 3$. Por exemplo, se tomarmos $x = 3$, temos as seguintes soluções para a Equação (11) : $(1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5), (3, 3, 3)$. Considerando as possíveis soluções x_1, x_2 e x_3, teremos que $s_3(3) \geq 6$.

Proposição 16. *Dado qualquer número x, tal que, $x + 1$ é composto e $x = x_3$, então a Equação* (11) *sempre tem solução.*

Demonstração. Se $x + 1$ é composto, então existem naturais distintos $1 < a < b < x$, tais que, $x + 1 = a \cdot b$. Considerando, $x_1 = a + 1$ e $x_2 = b + 1$, temos que

$$\begin{aligned} x \cdot (x_1 + x_2 + x) &= (ab - 1)[a + 1 + b + 1 + (ab - 1)] \\ &= (ab - 1)(a + 1)(b + 1) \\ &= x \cdot x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x\ . \end{aligned}$$

□

Exemplo 17. *Por exemplo, se $x = 31$, tem-se $x + 1 = 32 = 2 \cdot 16$. Considerando, $x_1 = 2 + 1 = 3$ e $x_2 = 16 + 1 = 17$, obtém-se a solução $(x_1, x_2, x_3) = (3, 17, 31)$, ou seja,*

$$31 \cdot (3 + 17 + 31) = 3 \cdot 17 \cdot 31.$$

Na Proposição 18, será estabelecido um limite superior para o número de soluções da Equação (11), quando são fixados os valores de x e x_3.

Proposição 18. *Sejam x e x_3 números naturais fixos, então o número de soluções (x_1, x_2) da Equação* (11) *é no máximo igual ao número de divisores de $x(x + x_3^2)$.*

Demonstração. Podemos reescrever a Equação (11), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x \cdot (x_1 + x_2 + x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Leftrightarrow \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - x \cdot x_1 - x \cdot x_2 &= x \cdot x_3 \Leftrightarrow \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 - x \cdot x_1 \cdot x_3 - x \cdot x_2 \cdot x_3 &= x \cdot x_3^2 \Leftrightarrow \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 - x \cdot x_1 \cdot x_3 - x \cdot x_2 \cdot x_3 + x^2 &= x^2 + x \cdot x_3^2 \Leftrightarrow \\ (x_3 \cdot x_1 - x)(x_3 \cdot x_2 - x) &= x(x + x_3^2). \end{aligned} \tag{12}$$

Como pode ser visto no lado direito da Equação (12), que é equivalente à Equação (11), com x e x_3 fixos. A quantidade de soluções (x_1, x_2), será no máximo igual ao número de divisores de $x(x + x_3^2)$. □

A Equação (12) nos fornece um procedimento (roteiro ou algoritmo) para determinar (algumas) possíveis soluções da Equação (11) com x e x_3 fixos.

Proposição 19. *Na Equação* (12)*, considere d_1 e d_2 divisores distintos de $x(x + x_3^2)$, com $1 < d_i < x(x + x_3^2)$, $i = 1, 2$ e $d_1 \cdot d_2 = x \cdot (x + x_3^2)$. Para cada $i = 1, 2$, se x_3 divide $(d_i + x)$, então $x_1 = \frac{d_1 + x}{x_3}$ e $x_2 = \frac{d_2 + x}{x_3}$ são soluções.*

Demonstração. Nas condições dadas, observe que

$$\begin{aligned} x \cdot (x_1 + x_2 + x_3) &= x \cdot (\frac{d_1 + x}{x_3} + \frac{d_2 + x}{x_3} + x_3) \\ &= \frac{x \cdot d_1 + x^2 + d_2 \cdot x + x^2 + x \cdot x_3^2}{x_3} \\ &= \frac{x \cdot d_1 + x^2 + d_2 \cdot x + d_1 \cdot d_2}{x_3^2} \cdot x_3 \\ &= \frac{d_1 + x}{x_3} \cdot \frac{d_2 + x}{x_3} \cdot x_3 \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \, . \end{aligned}$$

□

Exemplo 20. *Vamos fixar* $x = 8$ *e* $x_3 = 4$. *Daí,* $x(x + x_3^2) = 12 \cdot 16 = 192$. *Logo,* $x_1 = \frac{12+8}{4} = 5$ *e* $x_2 = \frac{16+8}{4} = 6$. *Portanto, tem-se a solução* $(x_1, x_2, x_3) = (5, 6, 4)$*, isto é,*

$$8 \cdot (5 + 6 + 4) = 5 \cdot 6 \cdot 4.$$

No Exemplo 20, o procedimento utilizado para determinar uma solução da Equação (11) é para o caso particular em que x e x_3 estão fixados (dados). É claro que o roteiro proposto não irá determinar uma solução para quaisquer valores de x e x_3 fixados, pois deve-se sempre ter x_1 e x_2 números naturais, vejamos o Exemplo 21.

Exemplo 21. *Agora observe que, se fixarmos* $x = 3$ *e* $x_3 = 4$*, tem-se* $x(x + x_3^2) = 3 \cdot 19 = 57$. *Daí,* $x_1 = \frac{3+3}{4}$ *e* $x_2 = \frac{19+3}{4}$ *não são números naturais. Logo, não é solução para a Equação* (11).

O resultado seguinte é bastante restritivo ou particular.

Proposição 22. *Os números naturais* x, x_1, x_2 *e* x_3 *é uma solução da Equação* (11)*, se* $x_1 = x_2 = x_3$*,* $x_1 = 3 \cdot k$ *e* $x = kx_1$*, sendo* k *natural.*

Demonstração. Basta observar que,

$$\begin{aligned} x \cdot (x_1 + x_1 + x_1) &= kx_1 \cdot (x_1 + x_1 + x_1) \\ &= kx_1 \cdot (3x_1) = 3k \cdot 3k \cdot 3k \\ &= x_1 \cdot x_1 \cdot x_1 = x_1^3 \, . \end{aligned}$$

□

Exemplo 23. *Dados* $x_1 = 6 = 3 \cdot 2$*, segue da Proposição 22 que, quando* $x = 2 \cdot 6 = 12$*, então* $x_1 = x_2 = x_3$ *é uma solução particular Equação* (11).

5 Considerações finais

É possível notar uma grande dificuldade em encontrar soluções gerais para a Equação (1) considerando um valor de n qualquer. É claro que à medida que o valor de n cresce, o custo computacional para determinar tais soluções também aumenta, por exemplo veja [5]. Além de determinar a existência de soluções, outras questões, ainda sem resposta, são: Podemos determinar a quantidade exata de soluções da Equação (1) para qualquer valor de n? Ou ainda, podemos explicitar todas essas soluções (mesmo que computacionalmente)? A análise de casos particulares apresentados neste trabalho, tem apenas o intuito de nos ajudar a compreender um pouco melhor o problema mais geral. Para finalizar, em [6] estabelece uma condição em que $n > 2$ na equação soma-produto, então $n - 1$ deva ser um número primo de Sophie Germain.

Referências

[1] ZAKARCZEMNY, M, S. On the equal sum and product problem. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 90, n. 4, p. 387-402, 2021.

[2] CARVALHO, F. S. Produto igual a soma. **Revista do Professor de Matemática**, n. 93, p. 8-10, 2017.

[3] KURLANDCHIK, L; NOWICKI, A. When the sum equals the product. **The Mathematical Gazette**, v. 84, n. 499, p. 91-94, 2000. https://doi.org/10.2307/3621488. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/261822936_When_the_Sum_Equals_the_Product. Acesso em: 19 maio 2023.

[4] ALMEIDA, A. C.; CORRÊA, F. J. S. A. Papiro de Rhind e as frações unitárias. **Revista do Professor de Matemática**, n. 35, p. 2-8, 1997.

[5] NYBLOM, M. A.; EVANS, C. D. An algorithm to solve the equal-sum-product problem. **arXiv:1311.3874v1 [cs.DM]**, 2013. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1311.3874.pdf. Acesso em: 17 maio 2023.

[6] NYBLOM, M. A. Sophie Germain primes and the exceptional values of the equal-sum-and-product problem. **The Fibonacci Quarterly**, v. 50, n. 1, p. 58-61, 2012.