Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Demonstração de dois teoremas sobre Sequências de Intervalos Encaixantes

Demonstration of Two Theorems about Nested Intervals Sequences

Afonso Henriques Silva Leite
Campus Corumbá
Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
afonso.leite@ifms.edu.br

Rafael Verão Françozo
Campus Corumbá
Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
rafael.francozo@ifms.edu.br

Resumo

A Propriedade dos Intervalos Encaixantes é utilizada para se demonstrar a existência de raízes reais para uma equação quadrática, assim como para provar a existência de raizes para equações envolvendo potências quaisquer de incógnitas reais. Cita-se que se uma sequência de intervalos é encaixante então uma sequência formada com o quadrado ou com qualquer potência inteira de seus termos também é, muito embora não seja apresentada uma prova dessas alegações. Nesse trabalho, demonstra-se que se a Propriedade dos Intervalos Encaixantes vale para uma sequência de intervalos, então ela também vale para a sequência formada pelo quadrado ou qualquer potência inteira de seus termos. A prova é baseada na validade de duas Propriedades que fundamentam a Propriedade dos Intervalos Encaixantes e foi dividida em dois casos para incluir todas as possibilidades. A conclusão se baseia na dedução inferida a partir das provas das propriedades fundamentais, completando essa lacuna para melhor compreensão do assunto.
Palavras-chave: Existência de raízes reais. sequências de intervalos encaixantes. intervalos encaixados.

Abstract

The Property of Nested Intervals is used to demonstrate the existence of real roots for a quadratic equation, as well as to prove the existence of roots for equations involving any powers of real unknowns. It is mentioned that if a sequence of intervals is nested, then a sequence formed with the square or with any integer power of its terms is also nested, although a proof of these claims is not presented. In this paper, it is demonstrated that if the Property of Nested Intervals holds for a sequence of intervals, then it also holds for the sequence formed by the square or any integer power of its terms. The proof is based on the validity of two Properties that underlie the Property of Nested Intervals and has been divided into two cases to include all possibilities. The conclusion is based on the deduction inferred from the proofs of the fundamental properties, filling this gap for a better understanding of the subject.
Keywords: Existence of real roots. nested intervals sequences. nested intervals.

Artigo recebido em ago. 2023 e aceito em dez. 2023

1 Introdução

Há um Teorema às vezes invocado em livros de Cálculo quando se apresentam provas da existencia de raízes quadradas de números reais: a Propriedade de Intervalos Encaixantes (PIE doravante). Em tais deduções, consideram-se sequências especiais de intervalos, as sequências de Intervalos Encaixantes (SIE daqui em diante). Elas, não obstante, tem utilizado sem demonstração dois resultados importantes: que a sequência formada pelo quadrado ou por qualquer potência dos termos de uma SIE são também SIEs.

Veja por exemplo o seguinte trecho de um livro texto bastante usado em cursos introdutórios de Cálculo, que invoca o seguinte para mostrar que a equação $x^2 = 2$ admite uma única raiz positiva α:

> Inicialmente observamos que se $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... for uma sequência de intervalos satisfazendo as condições da Propriedade dos intervalos encaixantes e se para todo n, $a_n > 0$ e $b_n > 0$, então a sequência de intervalos $\left[a_0^2, b_0^2\right]$, $\left[a_1^2, b_1^2\right]$, ..., $\left[a_n^2, b_n^2\right]$, ... também satisfará aquelas condições (Guidorizzi, 2001, p. 19).

No exemplo tratado logo a seguir, fica claro a importância do conceito: o autor vai construindo uma sequência de intervalos encaixantes com o quadrado de termos de outra SIE em torno de $x = 2$, para ao final, concluir que α^2 é o único real enclausurado por cada um desses intervalos, a fim de concluir que $\alpha^2 = 2$ e demonstrar que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = 2$.

Em outro trecho, ele sugere que o mesmo raciocínio empregado no exemplo em que demonstra haver uma única raiz positiva para a equação $x^2 = 2$ seja usado para comprovar o seguinte Teorema: "Sejam $a > 0$ um real e $n \geq 2$ um natural. Então existe um único real $\alpha > 0$ tal que $\alpha^n = a$". Perceba a similaridade do raciocínio: construindo uma SIE com potências inteiras de uma outra tal que $\alpha^n = a$ para comprovar a existência de uma raiz enésima de a.

O autor não prova as implicações de SIE em SIE e delega ao leitor a tarefa. E esse resultado é essencial para a demonstração apresentada.

Já Monteiro (200-?, p. 32); em suas notas de aula sobre Análise Real; também referencia essa resultado sem apresentar prova. Apesar de aparentar simplicidade, essa demonstração pode requerer tempo, e sendo assim, é importante apresentá-la para auxiliar os estudantes de cálculo interessados nessas questões. Vale destacar que em algumas obras, uma SIE é referenciada como Intervalos Encaixados (Lima, 2004, p. 17).

Esse trabalho prentende preencher essa lacuna, provendo uma demonstração rigorosa de ambas alegações, o que pode contribuir para uma melhor compreensão do tema.

Na Seção 2, pretende-se apresentar os Teoremas mais importantes a fundamentar a prova; na Seção 3, deduz-se a veracidade das duas condições de existência para uma SIE; na seção 5 apresenta-se uma breve discussão acerca dos casos em que os termos das sequências não são todos positivos e na Seção 6, apresenta-se o resultado da inferência lógica.

2 Fundamentação teórica

A definição de uma sequência de intervalos formada por números reais $[a_0, b_0]$; $[a_1, b_1]$; ...; $[a_n, b_n]$ ... como uma Sequência de Intervalos Encaixantes envolve a satisfação das seguintes Propriedades (Guidorizzi, 2001, p. 19):

$$[a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]\, \forall i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$\forall r > 0 \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < r \tag{2}$$

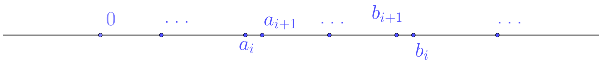

Figura 1: Representação de termos genéricos consecutivos de uma SIE na reta real.

Também é verdade e necessário para o desenvolvimento do raciocínio a compatibilidade da ordem com a multiplicação,

$$x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz. \tag{3}$$

Uma derivação dessa relação também será utilizada na seção 4:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yw. \tag{4}$$

É importante ter em mente o ordenamento dos termos da SIE na reta real, e por isso uma representação é apresentada na Figura 1.

No desenvolvimento da prova, será utilizado um silogismo hipotético (Rosen, 2009): se uma premissa p implica uma premissa q e essa mesma premissa q implica em r, então, p implica em r.

Para a prova em que as potências dos termos da SIE serão inteiros $n > 2$, será preciso usar a indução matemática ou o Princípio da Indução Finita (PIF). Simmons (1999, p. 758), apresenta o conceito de maneira bem fundamentada e didática. De acordo com tal autor,

> Seja $S(n)$ uma proposição referente a um inteiro positivo n. Suponha que cada uma das duas condições é satisfeita, (I) $S(1)$ é verdadeira; (II) Sendo $S(n)$ supostamente verdadeira para um inteiro $n = k$, então será necessariamente verdadeira para o inteiro seguinte, $n = k + 1$.

A condição I é denominada de *passo base* por alguns autores (Rosen, 2009). É a primeira condição a ser provada. Já a II é as vezes referenciada como *passo de indução*: assume-se que seja verdadeira a hipótese de indução, válida para um inteiro imediatamente anterior e demonstra-se que a validade dele implica na veracidade para o próximo. Com isso, prova-se que para todos os casos até n a proposição é verdadeira.

Para a prova da Equação 2 no caso em que $n > 2$, um resultado importante é a fatoração do polinômio $x^n - y^n$ na forma

$$x^n - y^n = (x - y)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}\right).$$

Isso pode ser feito usando-se o algoritmo de Briot-Ruffini para divisão de polinômios (Barbeau, 1989).

Com esses fundamentos, pode-se deduzir que uma sequência formada com o quadrado dos termos é também uma SIE.

3 Demonstração da pie com termos quadráticos

O objetivo é demonstrar que se uma sequência de intervalos é encaixante, então, a sequência formada pelo quadrado de seus termos também é.

É preciso demonstrar a veracidade das condições registradas nas desigualdades registradas em 1 e 2.

Importante: destaca-se que essa dedução levará em conta apenas intervalos contidos na reta positiva,

$$0 < a_i < b_i \forall i \in \mathbb{N}.$$

3.1 Demonstração da propriedade descrita na equação 1.

Sendo $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+^* \forall i \in \mathbb{N}$, então, pela compatibilidade da ordem frente a multplicação descrita na Equação 3,

$$a_i < a_{i+1} \Rightarrow a_i^2 < a_i a_{i+1}. \tag{5}$$

Usando o mesmo raciocínio para a_{i+1},

$$a_i < a_{i+1} \Rightarrow a_i a_{i+1} < a_{i+1}^2. \tag{6}$$

De 5 e 6 conclui-se que

$$a_i^2 < a_{i+1}^2.$$

Analogamente demonstra-se que

$$b_i > b_{i+1} \Rightarrow b_i^2 > b_{i+1}^2.$$

Novamente, pela compatibilidade da ordem (Equação 3),

$$a_i < b_i \Rightarrow a_i^2 < a_i b_i \tag{7}$$

e

$$a_i < b_i \Rightarrow a_i b_i < b_i^2. \tag{8}$$

Por silogismo hipotético, das Equações 7 e 8 deduz-se que o quadrado dos termos a_i e b_i mantém a desigualdade original:

$$a_i < b_i \Rightarrow a_i^2 < a_i b_i < b_i^2 \Rightarrow a_i < b_i \Rightarrow a_i^2 < b_i^2 \tag{9}$$

Pode-se então provar que intervalos consecutivos se encaixam nos antecedentes:

$$a_i^2 < a_{i+1}^2 < b_{i+1}^2 < b_i^2 \Rightarrow \left[a_{i+1}^2, b_{i+1}^2\right] \subset \left[a_i^2, b_i^2\right] \forall i \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

3.2 Demonstração da propriedade descrita pela equação 2.

A hipótese natural a ser usada é a segunda condição da PIE, explicitada na Equação 2.

Antes de iniciar a demonstração, é interessante registrar uma verificação da veracidade da propriedade e novamente destacar que os termos a_i e b_i são todos positivos.

Sabe-se que são válidas as seguintes hipóteses:

$$\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N} / b_n - a_n < r,$$

e

$$0 < a_n < b_n.$$

Então, para tal r, o índice n correspondente sustenta que

$$b_n^2 - a_n^2 < r\left(b_n + a_n\right).$$

Como os possíveis valores de $r' = r\left(b_n + a_n\right)$ são todos os reais positivos (pois r é por hipótese positivo, e assim também são os termos a_i e b_i), então para todos os reais $r' > 0$ há certamente um inteiro a garantir essa desigualdade.

Mas uma demonstração formalmente completa passa por demonstrar esta propriedade na ordem correta; ou seja, dado um real positivo qualquer, determinar o índice que atesta a verdade da desigualdade $b_n^2 - a_n^2 < r$.

Seja r um número real positivo. Então para esse raio:

$$\exists n \in \mathbb{N} / b_n - a_n < r.$$

Para isso, é um bom parâmetro inicial considerar um número positivo k maior que $b_i + a_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, pois

$$k > b_i + a_i \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{b_i + a_i} \Rightarrow \frac{r}{k} < \frac{r}{b_i + a_i}, \tag{11}$$

e essa desigualdade será crucial para a prova do Teorema. Se fosse possível encontrar um m para o qual $b_m - a_m < \frac{r}{k}$, o problema estaria resolvido.

Mas um tal número existe? É verdade que sim, pois da desigualdade $0 < a_i < b_i < b_0$, segue que $a_i + b_i < 2b_0$, e disso,

$$\frac{1}{2b_0} < \frac{1}{a_i + b_i}.$$

Da Inequação 11,

$$\frac{r}{2b_0} < \frac{r}{a_i + b_i} \forall i \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Agora, considere $r' = \frac{r}{2b_0}$. Para tal r', existe m tal que

$$b_m - a_m < r'.$$

Ora, então o problema está resolvido, pois

$$b_m - a_m < \frac{r}{2b_0} \wedge \frac{r}{2b_0} < \frac{r}{b_i + a_i}.$$

Veja que a desigualdade 12 vale para qualquer $i \in \mathbb{N}$, e por conseguinte também vale para m, o que permite registrar que $\frac{r}{2b_0} < \frac{r}{b_m + a_m}$ e assim concluir a demonstração:

$$\begin{aligned} b_m - a_m < \frac{r}{2b_0} \wedge \frac{r}{2b_0} < \frac{r}{b_i + a_i} &\Rightarrow b_m - a_m < \frac{r}{b_m + a_m} \\ \Rightarrow \left(b_m - a_m\right)\left(b_m + a_m\right) < r &\Rightarrow b_m^2 - a_m^2 < r. \end{aligned}$$

Logo, para todo $r > 0$, existe natural m tal que $b_m^2 - a_m^2 < r$, *qed*.

4 Demonstração da pie com potências inteiras $n > 2$ dos termos da sie original

Para provar que a PIE também vale para sequências formadas por qualquer expoente inteiro n dos termos de uma SIE, o raciocínio é similar, havendo apenas que invocar um resultado da divisão de Polinômios para justificar a fatoração da diferença $b_i^n - a_i^n$. Destaca-se novamente que essa prova trata apenas de sequências com termos positivos, ou seja, $0 < a_i < b_i$.

4.1 Prova da condição expressa na equação 1

Usando o Princípio da Indução Finita, pode-se provar que uma sequência de intervalos encaixantes formada por potências inteiras $n > 2$ satisfazem à condição 1.

Senão, veja: o passo base já foi provado na Subseção 3.1.

Resta provar o passo de indução. Pela hipótese de indução, é verdadeiro que

$$\left[a_i^{n-1}, b_i^{n-1}\right] \supset \left[a_{i+1}^{n-1}, b_{i+1}^{n-1}\right] \forall i \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

A prova se completa com a demonstração de que a inclusão de 13 implica na inclusão dos intervalos dos termos consequentes, ou seja, $\left[a_i^n, b_i^n\right] \supset \left[a_{i+1}^n, b_{i+1}^n\right]$.

Veja que para isso é necessário validar que $a_i^n < a_{i+1}^n < b_{i+1}^n < b_i^n$.

Decorre de 13 que

$$a_i^{n-1} < a_{i+1}^{n-1}. \tag{14}$$

Da da Seção 3, vale que $a_i < a_{i+1}$. Multiplicando-se $a_i^{n-1} < a_{i+1}^{n-1}$ por a_i à esquerda e a_{i+1} pela direita, e invocando a Relação 4;

$$a_i^n < a_{i+1}^n.$$

Analogamente, $b_i^{n-1} < b_{i+1}^{n-1} \Rightarrow b_i^n < b_{i+1}^n$. Pelo mesmo artifício, $a_{i+1}^{n-1} < b_{i+1}^{n-1} \Rightarrow a_{i+1}^n < b_{i+1}^n$, pois como $a_i < b_i$, pela Relação registrada em 4, $a_{i+1}^{n-1} a_i < b_{i+1}^{n-1} b_i \Rightarrow a_{i+1}^n a_i < b_{i+1}^n$.

Portanto

$$\left[a_i^{n-1}, b_i^{n-1}\right] \supset \left[a_{i+1}^{n-1}, b_{i+1}^{n-1}\right] \Rightarrow \left[a_i^n, b_i^n\right] \supset \left[a_{i+1}^n, b_{i+1}^n\right] \forall i \in \mathbb{N},$$

e pelo Princípio da Indução Finita,

$$[a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}] \Rightarrow \left[a_i^n, b_i^n\right] \supset \left[a_{i+1}^n, b_{i+1}^n\right] \forall i \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

4.2 Demonstração da propriedade descrita pela equação 2.

Resta corroborar agora que também vale que $\forall r > 0, \exists m \in \mathbb{N} / b_m^n - a_m^n < r$.

A aplicação da estratégia usada no caso $n = 2$ pode ser aplicada para o caso $n > 2$ com algumas modificações.

Seja, por divisão de Polinômios,

$$b_m^n - a_m^n = (b_m - a_n)\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_m^i a_m^{n-1-i}\right).$$

Um artifício similar ao usado na Subseção 3.2 funciona também para esse caso.

Como por hipótese a sequência original é uma SIE, vale que $\forall r > 0, \exists m \in \mathbb{N}/b_m - a_m < r$. Agora veja que como $a_i < b_i \forall i$, pela compatibilidade da ordem frente à multiplição, $b_m^i a_m^{n-1-i} < b_0^i b_0^{n-1-i} = b_0^{n-1}$ e daí,

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_0^i \alpha^{n-1-i} < \sum_{i=0}^{n-1} b_0^{n-1} = nb_0^{n-1}. \tag{16}$$

Ora, para $r' = \frac{r}{nb_0^{n-1}}$, existe um inteiro p tal que

$$b_p - a_p < r',$$

é possível concluir:

$$\begin{aligned} & b_p - a_p < r' \Rightarrow b_p - a_p < \frac{r}{nb_0^{n-1}} \\ & \Rightarrow \left(b_p - a_p\right) nb_0^{n-1} < r \\ & \Rightarrow \left(b_p - a_p\right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_p^i a_p^{n-1-i}\right) < r \\ & \Rightarrow b_p^n - a_p^n < r. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\forall r > 0 \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < r \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}/b_m^n - a_m^n < r.$$

5 Discussão do sinal dos termos

Nessa seção serão tratados os casos em que os intervalos não estão inteiramente contidos no eixo positivo dos reais.

Se $a_i < 0 < b_i$ e as condições 1 e 2 são satisfeitas, as mesmas conclusões serão válidas tanto para o caso em que o expoente n vale 2 quanto para o caso genérico.

Pois veja, se $n = 2$, as alterações que ocorrem surgem na desigualdade 5, que passa a ser

$$a_{i+1} < a_i.$$

Mas perceba que como a multiplicação desses termos por a_i e a_{i+1} inverte o sinal da desigualdade já que ambos esses fatores são negativos, isso torna o resultado dos produtos positivos, e o resultado é que a mesma conclusão expressa na relação 10 da Subseção 3.1 vai ser obtida.

Com relação ao conteúdo da Subseção 3.2, verifica-se que nenhuma alteração é necessária, sendo portanto válida mesmo que os termos a_i sejam negativos e b_i positivos. As mesmas considerações podem ser registradas acerca do caso $n > 2$, pois a única alteração é $a_{i+1}^n < a_i^n$ que vai ser operada de acordo com uma relação similar a 4, com a mesma implicação:

$$\left.\begin{array}{l} x < y \leq 0 \\ w < z \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yw.$$

Já se todos os termos forem negativos também as mesmas conclusões serão válidas pois o exposto nos parágrafos anteriores vão continuar válidos, uma vez que a divisão de polinômios por Briot-Ruffini se mantém, assim como a conclusão expressa na Desigualdade 16. De forma que as conclusões podem ser extendidas para os casos referidos sem a necessidade de novos artifícios.

6 Conclusão

Se uma sequência é uma SIE, então, ela necessáriamente obedece às Propriedades 1 e 2 dos Intervalos Encaixantes. Logo, tais propriedades podem ser consideradas como condição de existência de uma SIE.

Da Equação 10 exposta na Subseção 3.1,

$$([a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]\ \forall i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left(\left[a_i^2, b_i^2\right] \supset \left[a_{i+1}^2, b_{i+1}^2\right] \forall i \in \mathbb{N}\right).$$

Logo, $\left[a_i^2, b_i^2\right]$ satisfaz 1.

Do explicitado na Subseção 3.2, deduz-se que a diferença dos extremos da sequência $\left[a_i^2, b_i^2\right]$ tende a zero, ou, usando notação do cálculo, $\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N} / b_n^2 - a_n^2 < r$. Sendo assim, $\left[a_i^2, b_i^2\right]$ satisfaz 2.

Portanto, se uma sequência é uma SIE, então a sequência formada pelo quadrado de seus termos também o será.

Conforme explicitado na Seção 4 o referido também é verdade para o caso da sequência formada por expoentes inteiros maiores que 2.

Do exposto na Seção 5, verifica-se que tais conclusões continuam válidas mesmo que $a_i < 0 < b_i$ e $a_i < b_i < 0$.

Em suma, de fato, uma sequência de potências inteiras de uma SIE também é uma SIE.

7 Bibliografia

BARBEAU, E. J. **Polynomials**. New York: Springer-Verlag, 1989.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2004. v. 1.

MONTEIRO, M. S. **Introdução à análise real**. [São Paulo: IME, 200-?]. Disponível em: https://www.ime.usp.br/ martha/mat0315/reais.pdf. Acesso em: 21 ago. 2023. Notas de aula da disciplina MAT0315.

ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: 1999. v. 1.