Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Introdução às equações funcionais com abordagem no ensino médio

Introduction to functional equations with a high school approach

Maikon Jose Santana da Silva
IFPI - Instituto Federal do Piauí
maikonjoses711@gmail.com

Marcio Luiz Duarte da Silva
IFPI - Instituto Federal do Piauí
marcio.duarte@ifpi.edu.br

Francisco de Paula Santos de Araujo Junior
UNEB - Universidade do estado da Bahia
franciscojunior@uneb.br

Anna Karla Barros da Trindade
IFPI - Instituto Federal do Piauí
anna.trindade@ifpi.edu.br

Resumo

O presente estudo tem por objetivo apresentar alguns conceitos e problemas básicos sobre equações funcionais, bem como os conteúdos que estão diretamente ligados a esse tema como equações e funções, dessa forma, podemos observar que esse assunto pode ser explorado no ensino médio. Esse assunto de equações funcionais acaba sendo uma aplicação dos conceitos de equações e funções, por isso temos a seção conceitos preliminares neste estudo. Historicamente esse conteúdo apresenta vários matemáticos que tiveram grande participação na construção deste conceito. Para mostrar a interdisciplinaridade que as equações funcionais podem proporcionar, foi feita a resolução de alguns exemplos com o objetivo de adquirimos um conhecimento prévios sobre a resolução dos problemas, posteriormente apresentamos uma abordagem das equações funcionais através de funções inversas.
Palavras-chave: Equações funcionais. Assuntos. Equações. Funções.

Abstract

The present study aims to present some basic concepts and problems about functional equations, as well as the contents that are directly linked to this topic such as equations and functions, thus, we can observe that this subject can be explored in high school. This subject of functional equations ends up being an application of the concepts of equations and functions, which is why we have the preliminary concepts section in this study. Historically, this content presents several mathematicians who had a major role in the construction of this concept. To show the interdisciplinarity that functional equations can provide, some examples were solved with the aim of acquiring prior knowledge about solving problems, later presenting an approach to functional equations through inverse functions.
Keywords: Functional equations. Matters. Equations. Functions.

Artigo recebido em ago. 2023 e aceito em dez. 2023

1 Introdução

A equação é um assunto muito estudado durante o ensino básico e podemos aprofundar ainda mais no seu estudo durante o curso de licenciatura em matemática. Com a possibilidade de estudar algumas equações onde a solução não serão números, dentro dessa idéia, podemos analisar, durante esse trabalho, as equações funcionais.

Logo após tomar conhecimento a respeito do assunto, observar-se o quanto o assunto é atrativo. Pois de maneira informal, podemos dizer que o problema de uma equação funcional, na maioria das vezes, será encontrar uma função que seja solução de uma equação. Em outros casos, iremos calcular um valor específico para essa função. Outro ponto muito importante detes trabalho, que estabelece a nossa problemática, é como relacionar as equações funcionais com assuntos do ensino médio e fundamental.

O conteúdo de equações funcionais segundo [1], mesmo não sendo muito conhecido, acredita-se que já havia alguns estudos de forma indireta do assunto desde o século XIV com Nicole Oresme, que concedeu a definição de função linear através de uma equação funcional.

O objetivo desse trabalho é analisar as equações funcionais de uma e duas variáveis, com o intuito de descrever como iremos encontrar as suas soluções, sua relação com conceitos básicos e sua relação com outros assuntos. Com relação as equações funcionais com duas variáveis, é importante citar alguns matemáticos que tiveram grandes contribuições para seus estudos, tais como Cauchy, Jesen e d' Alembert.

O presente trabalho tem como base teórica e metodológica uma pesquisa de revisão bibliográfica, cujo objetivo é apresentar um assunto que venha trazer um novo conhecimento relacionado a equações funcionais. Para construção desse trabalho, foram lidos alguns artigos e livros, em português e inglês. Visto que há uma carência na quantidade de artigos escritos em português com relação a esse tema, as principais plataformas para pesquisa desses documentos foram o Google acadêmico, revista Eureka e Profmat. Revista Eureka é uma revista da OBM, já foram publicadas 42 edições onde suas publicações começaram desde maio de 1998, essa revista faz a publicação de assuntos matemáticos relacionados a problemas olímpicos de competições nacionais e internacionais. Para desenvolvimento dessa pesquisa foram utilizadas as seguintes revistas apresentadas na tabela 1:

Tabela 1: Revista Eureka

Título da revista	Número da revista	Ano de publicação
Aplicação dos números complexos a geometria	6	1999
Equações diofantinas	7	2000
Funções multiplicativas e função de Möbius	8	2000
Equações de funcionais	9	2000
Os números irracionais	10	2001
Soluções de problemas	36	2012
Equações funcionais para os mais jovens	37	2013
Soluções de problemas	38	2013

Fonte 1 - Produzido pelo autor com base nos dados da (Revista Eureka, 2022)

As principais revistas utilizadas neste trabalho serão as revistas 7, 8, 9 e 37. As outras revistas que serão utilizar será para auxiliar na compreensão desse assunto, uma vez que as revistas anteriores e posteriores trazem uma breve reflexão sobre o assunto. Enquanto o Profmat é um programa de mestrado com parceria da SBM, que disponiniliza no seu site as dissertações.

Para auxiliar a compreensão, esse artigo foi dividido em 6 seções: Introdução; Conceitos preliminares, onde iremos observar quais os assuntos que devemos ter um conhecimento prévio; Contexto histórico, no qual iremos abordar sobre alguns conceitos teóricos e seus estudos; Equações funcionais de uma e duas variáveis e sua relação com outros assuntos, em que analisaremos a solução de alguns exemplos; Equações funcionais no ensino médio, onde faremos uma relação de alguns conceitos básicos com equações funcionais; Considerações finais.

2 Conceitos preliminares

Para adentramos na resolução e identificação das equações funcionais precisamos ter como base alguns conceitos indispensáveis, relacionados a equações e funções. Onde as equações polinomiais tem o seguinte formato.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \tag{1}$$

2.1 Equação polinomial

De maneira bem informal podemos dizer que uma equação é uma expressão com uma ou mais variáveis que será igual a algum valor numérico. Segundo o que está escrito no livro [2], temos o seguinte:

Definição 2.1 *Dadas duas funções polinomiais f e g, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a sentença aberta f e g*

2.2 Funções

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in$ A existe um só y $\in$ B tal que $(x, y) \in f$.

$$(\forall x \in A, \exists y \in B : (x, y) \in f)$$

2.2.1 Injetora, sobrejetora e bijetora

As definições de injetora, sobrejetora e bijetora está relacionada com os conceitos de domínio e imagem segundo propõe [3], analisando esses conceitos como fundamentação para as definições seguinte, temos a seguinte relação entre as definições e conceitos.

Definição 2.2 *Dizemos que a função $f : X \to Y$ são injetora se elementos distintos do domínio X tiverem imagens Y distintas, ou seja, dois elementos $x_1 \neq x_2$ não podem ter a mesma imagem $f(x_1) \neq f(x_2)$ quando essas condições acontece temos uma função injetora.*

Definição 2.3 *Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, o seu contra-domínio é igual a imagem, isto é, se $Im = Y$*

Definição 2.4 *Uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.*

2.2.2 Função inversa

Definição 2.5 *Diz-se que uma função $f : X \to Y$ é invertível se a cada elemento y do contra-domínio Y estiver associado um único elemento x do domínio X, tal que $y = f(x)$, onde utilizamos* *a seguinte notação para todo x e y*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad f^{-1}(f(y)) = y \tag{2}$$

A notação de função inversa também apresenta um outro conceito de funções chamado composição de funções, além disso existe uma restrição sobre a função inversa, dado uma $f(x)$ iremos encontrar a $f^{-1}(x)$ somente quando a função for bijetora ou seja, obedecendo a definição 2.4 apresentada acima. Analisando a definição $f^{-1}(f(x)) = x$ podemos perceber que existe uma equação funcional nessa notação, pois podemos analisar essa representação como uma equação e o objetivo final desse problema é encontrar uma função que resolva essa notação, assim com base nesse conceito temos uma equação funcional.

2.2.3 Paridade de função

Quanto a paridade das funções podemos observar que existe duas definições de paridade as funções pares e funções imparares onde temos os seguintes enunciados para suas definições.
Definição 2.6 *Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é uma função par, se para todos os pontos x do seu domínio, for satisfeita a seguinte igualdade.*

$$f(x) = f(-x) \tag{3}$$

Definição 2.7 *Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é uma função ímpar se, em todos os pontos do seu domínio a igualdade abaixo for satisfeita.*

$$f(x) = -f(-x) \tag{4}$$

As definições de funções pares e impares também pode ser vista como sendo uma equação funcional, pois podemos olhar para essas expressões como sendo uma equação funcional, nos próximos capítulos iremos analisar como resolver essas equações funcionais da paridade de funções.

3 Contexto histórico

Ainda que não estudamos as equações funcionais durante a graduação ou tivemos contato com as equações dentro de outros assuntos, podemos perceber através do seu estudo que não é uma matemática nova. De acordo com [4], já havia alguns estudos desde meados do século XIV e, além disso, grandes matemáticos concederam suas contribuições no estudo das equações funcionais, onde tais matemáticos foram homenageados com seus nomes na identificação de algumas equações. Nesse capítulo iremos falar sobre esses matemáticos e identificar as suas equações funcionais.

3.1 Nicole Oresme

De acordo com [1], em 1352 foi publicado o trabalho ”Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum”. Pelo matemático Nicole Oresme, acredita-se que ele tenha nascido por volta de 1323 e faleceu por volta de 1382. Nesse trabalho, Nicole Oresme forneceu uma definição de funções lineares de forma indireta, essa definição utilizava equações funcionais. Além de matemático Nicole Oresme tinha outras formações tais como: físico, filosofo, astronauta, teólogo, biólogo e ainda tinha mais algumas formações. O trabalho ”Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum”que ele publicou tinha como objetivo a análise de movimento uniforme, ou seja, estava relacionado com os conhecimentos de física, nesse caso, com base nas definições físicas que ele estava propondo no seu tratado foi apresentado a seguinte relação:

$$\frac{y-x}{z-y} = \frac{f(y)-f(x)}{f(z)-f(y)} \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Apresentado as primeiras definições de equações funcionais, temos que a equação 5, definida por Nicole Oresme tem 3 variáveis com $z \neq y$ e a sua solução é uma função afim do tipo.

$$f(x) = ax + b \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

3.2 Augustin Louis Cauchy

O matemático francês Augustin Louis Cauchy teve sua vida dedicada basicamente os conhecimentos matemáticos, nasceu em 1789 em paris e faleceu em 1857 após seus sessenta e sete anos de vida com muitas contribuições para a matemática, na sua infância teve bastante dificuldades pois nos seus 10 primeiros anos de vida a França estava passando por um momento conturbado conhecido como revolução Francesa. As principais contribuições de Cauchy na matemática foram no campo da análise matemática, teoria de grupos infinitos, calculo diferencial e integral entre outras colaborações. Ao matemático Augustin Louis Cauchy foi atribuída a seguinte equação funcional.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Conhecida como equação funcional de Cauchy, ainda podendo ser chamada de equação aditiva de Cauchy. A respeito das equações aditivas alguns matemáticos tentaram encontrar uma solução da equação 7, mas não obtiveram êxito, somente em 1821 o matemático Augustin Louis Cauchy publicou em seu livro Cauchy's Cours d'analyse a solução da equação 7, a respeito dessa equação nos próximos capítulos iremos observar a sua solução, e algumas informações importantes que conseguimos obter fazendo algumas substituições, visto que ainda não discutimos como resolver uma equação funcional.

3.3 Gregory de Saint-Vincent

O trabalho de Cauchy foi muito importante para o desenvolvimento da teoria de equações funcionais, visto que ele já procurava solução de tais problemas. Segundo [1] foi no século XVI que nasceu o matemático Gregory de Saint-Vincent que publicou o trabalho "Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni". Nesse trabalho ele buscava estudar a quadratura geométrica do círculo em secções do cone, Gregory de Saint-Vincent ainda foi muito importante para o desenvolvimento do conceito de logaritmos sendo um dos a estudar sobre o tema. O resultado da análise desse trabalho era calcular área de algumas figuras, ao fazer o cálculo da área onde a região era uma hipérbole assim como Nicole Oresme ele fez o uso implícito de uma equação funcional.

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Até o momento as soluções das equações funcionais que foram apresentadas são funções afim, no caso da equação funcional 8, a sua solução será outro grupo de funções os logaritmos.

3.4 Jensen, D' Alembert e Ramanujan

Conforme expor [5], Jensen é um matemático que não é muito conhecido, mas ele também estudou sobre equações funcionais e ainda existe uma equação com seu nome conhecida como equação funcional de Jensen:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \tag{9}$$

O matemático Jean le Round d'Alembert desenvolveu mais trabalhos ao longo da história, sendo bastante conhecido dentre os matemáticos com várias contribuições para a matemática, além de matemático ele tinha várias formações em outras áreas. Com seu nome temos a equação conhecida como equação funcional de d'Alembert onde ela tem a seguinte forma:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{10}$$

No século passado o matemático indiano Ramanujan tem muitas contribuições para o desenvolvimento da matemática sendo um dos seus matemáticos mais brilhante do século passado, sobre os seus objetos de estudos a equação funcional não era o tema principal de seus estudos, mas em 1911 Ramanujan propôs um problema sobre o cálculo de radicais múltiplos:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots+(n-1)\sqrt{n+1\ldots}}}}}$$

Esse problema proposto por Ramanujan de maneira alguma se parece com uma equação funcional, e tão pouco a sua solução envolve equação funcional, no entanto existe uma equação funcional subentendida na solução desse problema. Em 1966 esse problema estava presente na olimpíada da Putnam, a questão pedia para provar que o $\lim a_n = 3$ onde a_n é a expressão acima.
Temos $a_n \leq a_{n+1}$ ou seja sendo uma sequência crescente, para essa demonstração devemos colocar.

$$f(x)=\lim\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\ldots+(x+n-1)\sqrt{1+n+x\ldots}}}}$$

Assim podemos concluir que $f(x)=x+1$ além disso podemos deduzir que $f(x)$ existe sendo no máximo $x+1$ dessa expressão temos ainda que $f(x)=xf(x+1)+1$ e essa ultima expressão é a equação funcional subentendia do problema de Ramanujan.

4 Equações funcionais de uma e duas variáveis e sua relação com outros assuntos.

Pensando em problemas de olimpíadas matemáticas, podemos dizer que o assunto de equações funcionais é um dos mais recorrentes, pois, sempre é proposto um problema referente a esse assunto. Analisando as palavras desse assunto separadamente, podemos perceber que equações e funções têm conceitos bastantes distintos um do outro, enquanto que a equação funcional faz a união desses conceitos, onde teremos uma expressão inicial na qual a sua solução vai ser uma função.
As equações funcionais tem como componentes um número finito de funções e um número finito de

variáveis. Quanto as funções que são soluções podem ser uma especifica ou uma família de soluções. Para resolver um problema de equação funcional será necessário a utilização de alguma substituição, ou seja, em quase todos casos iremos utilizar o método da substituição. Pois nenhuma teoria que envolva algum método de solução foi desenvolvida, assim é necessário fazer algumas substituições espertas para encontrar a função ou algum valor especifico. Dessa forma segue algumas sugestões apresentadas por [6], onde temos as seguintes orientações:

- Substituir algumas das variáveis por $-1, 0$ ou 1
- Caso a equação tenha mais de uma variável fazer uma substituição de modo a transformar em uma equação de única variável, fazendo $x = z$ e $y = -z$.
- Outra maneira de fazer uma substituição será y = - x para conseguir algum cancelamento.
- Podemos colocar uma expressão em função de novas variáveis, caso tenhamos a seguinte situação $2f(f(x))$ seria bastante interessante fazer $n = f(x)$, dessa forma teríamos a seguinte expressão $2f(n)$.
- Por último outra substituição esperta é utilizar alguma função auxiliar fazendo uma $g(x)$ igual a alguma expressão.

Com base nas sugestões acima, podemos conseguir resolver as equações funcionais, onde as principais sugestões são a primeira e terceira, pois alguns exemplos de equações funcionais pedem somente um valor especifico da função.
Além disso é importante ressalta que devemos ter uma base boa com a resolução de sistema lineares, pois ao fazermos uma substituição, iremos encontrar uma equação e, quando fizermos outra substituição iremos encontrar outra equação, dessa forma para encontramos a função devemos saber resolver os sistemas de equações.
Com o auxílio desse conhecimento prévio, e necessário já conseguimos resolver algumas questões relacionadas a esse tema. Para tal fato iremos resolver um exemplo de equação funcional com uma e duas variáveis. Logo após veremos a relação desse conteúdo com outros dois conceitos.

4.1 Exemplo de equação funcional com duas variaveis

Exemplo 1. (OBM 2003) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Analisando esse problema podemos perceber que não faremos uma das variáveis igual a zero, pois o zero não pertence ao domínio e também não pertence ao contradomínio. Como essa equação tem multiplicações e divisões é interessante substituir essas variáveis pelo número 1. Assim teremos a seguinte situação.
Faça $x = 1$ e $y = 1$.

$$f(1)f(1) - f(1 \cdot 1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$f(1)^2 - f(1) = 2 \Rightarrow$$

$$f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$$

Analisando essa expressão final podemos perceber que é uma equação do segundo grau, para melhorar essa visualização faça $z = f(1)$, assim teremos:

$$z^2 - z - 2 = 0$$

Calculando as raízes da equação do segundo grau, onde iremos utilizar a seguinte fórmula de Bhaskara:

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

Assim teremos a primeira raiz que será $z_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ a segunda raiz será dada por $z_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ dessa forma temos duas possibilidades para valores de $f(1)$, assim iremos verificar dois casos.

1. Caso: $f(1) = 2$
   Faça $y = 1$

$$f(x) \cdot f(1) - f(x \cdot 1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

2. Caso: $f(1) = -1$
   Faça $y = 1$

$$f(x) \cdot f(1) - f(x \cdot 1) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$-1f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Para cada uma das possibilidades encontramos funções diferentes como solução, mas devemos lembrar que essas soluções na verdade são candidatos a solução da equação funcional, por isso devemos verificar se as duas são soluções ou somente uma.

1. **Verificando o primeiro caso.**

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

   Fazendo distributiva e alguns cancelamentos conseguimos perceber que a igualdade é verdadeira assim para $f(1) = 2$ a função $f(x) = x + \frac{1}{x}$ é solução da equação funcional.

2. **Verificando o segundo caso.**

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{xy}{4}+\frac{x}{4y}+\frac{y}{4x}+\frac{1}{4xy}+\frac{xy}{2}+\frac{1}{2xy} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{2}{3}\left(xy+\frac{1}{xy}\right) = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

Temos que $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ não é solução pois a igualdade não é válida. Dessa forma temos somente uma solução para a equação funcional.

4.2 Exemplo de equação funcional com uma variavel

Exemplo 2. (IBERO) Ache todas as f tais que $(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ para todo x distinto de $-1, 0, 1$

Para alguns valores básicos a equação funcional não está bem definida, contudo iremos fazer a seguinte substituição: Faça $x = \frac{1-x}{1+x}$ Ou seja, onde tem x iremos substituir por $\frac{1-x}{1+x}$, analisando separadamente $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ temos:

$$f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = f\left(\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x-x+1}{1+x}}\right) = f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x)$$

As operações realizadas acima envolveram o uso de frações, assim calculamos o MMC e depois fizemos a divisão de frações para obter o resultado final. Com base na equação do exemplo iremos fazer a seguinte mudança.

$$(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow$$
$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{64x}{(f(x))^2}$$

Com base na substituição que realizamos e nessa operação da equação funcional escrevendo-a de outra maneira segue que:

$$\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^2 \cdot f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = 64\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)\cdot f(x) = 64\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Fazendo algumas substituições iremos ter as seguintes relações.

$$\left(\frac{64x}{(f(x))^2}\right)^2 \cdot f(x) = 64\cdot\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$$

$$\frac{64x^2}{(f(x))^3} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$$
$$(f(x))^3 = 64x^2 \cdot \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow$$
$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

Como encontramos uma única função que seja candidata a solução, temos assim que a função $f(x)$ acima é solução da equação funcional $(f(x))^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$

4.3 Valor numérico de uma equação funcional

Alguns problemas de equações funcionais estão querendo encontrar um valor especifico para aquela equação, nem é preciso encontrar a função que seja solução.

Exemplo 3. (OBM/2002 - 1ª fase) Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição: $f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$ para $x > 0$ o valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Neste problema iremos fazer algumas substituições, de tal modo a encontrar o valor de $f(2)$ assim: Faça $x = 2$

$$f(2) + 2f\left(\frac{2002}{2}\right) = 3 \cdot 2 \Rightarrow$$
$$f(2) + 2f(1001) = 6 \qquad (*)$$

A princípio nenhuma informação sobre o valor de $f(2)$ foi encontrada e ainda temos que surgiu $f(1001)$ na última equação. Analisando a equação da questão podemos perceber que conseguimos outra substituição de modo a encontrar $f(2)$ dessa forma:

Faça $x = 1001$

$$f(1001) + 2f\left(\frac{2002}{1001}\right) = 3 \cdot 1001 \Rightarrow$$
$$f(1001) + 2f(2) = 3003 \qquad (**)$$

.

Com duas equações e duas incógnitas conseguimos resolver esse problema por sistema de equações.

$$\begin{cases} f(2) + 2f(1001) = 6 \\ f(1001) + 2f(2) = 3003 \end{cases}$$

Fazendo $(*) - 2(**)$

$$\begin{cases} f(2) + 2f(1001) = 6 \\ -2f(1001) - 4f(2) = -6006 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo método da adição temos:

$$f(2) + 2f(1001) - 2f(1001) - 4f(2) = 6 - 6006$$
$$-3f(2) = -6000$$
$$f(2) = 2000$$

Logo o valor de $f(2)$ é igual a 2000.

4.4 Solução da equação funcional de Augustin Louis Cauchy

A equação funcional de Cauchy, foi uma das primeiras equações a ser cohecida, visto que esse matemático gastou bastante tempo no estudo desse assunto. Na seção 3.2 foi apresentado um pouco sobre o matemático Augustin Louis Cauchy e ainda apresentamos a equação 7 que leva o seu nome. Logo após a apresentação das maneiras de resolver uma equação funcional que foram enunciadas no inicio da seção 4 podemos usar essas tecnicas para resolver a equação funcional de Cauchy, seguindo esses passos temos.

Faça $x = y = 0$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \Rightarrow$$
$$f(0+0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow$$
$$f(0) = 2f(0) \quad \Rightarrow$$
$$2f(0) - f(0) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$f(0) = 0$$

Temos uma informação muito importante e valiosa sobre essa equação que $f(0) = 0$, assim vamos fazer mais uma substituição de forma a ter um cancelamento de termos para obter um valor de $f(0) = 0$, dessa forma teremos.

Faça $y = -x$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \Rightarrow$$
$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \quad \Rightarrow$$
$$f(0) = f(x) + f(-x) \quad \Rightarrow$$
$$f(x) + f(-x) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$f(x) = -f(-x)$$

Por fim chegamos nessa última expressão da equação funcional, que levar um conceito muito conhecido dentro da área de funções, onde esse tipo de expressão tem o nome de função ímpar apresentado na seção 2.2.3. Assim conseguimos encontrar a solução desse tipo de equação pois na seção 5.1 foi solucionado essa equação funcional impar, a única coisa que devemos ter atenção será no expoente pois solução da equação funcional de Cauchy apresentará somente as funções lineares logo a solução geral da equação funcional de Cauchy será $f(x) = ax$, pois quando $r > 1$ teremos alguns termos a acrescentar na expressão dessa forma não irá satisfazer a relação da equação funcional de Cauchy.

4.5 Relação das equações multiplicativas e função de Möbius com equações funcionais

Uma das equações funcionais mais conhecidas são as chamadas equações funcionais multiplicativas, que são atribuídas ao matemático Augustin Louis Cauchy, onde essas são definidas pela seguinte relação:

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{11}$$

Dessa forma conseguimos fazer uma relação entre as equações funcionais multiplicativas e função de Möbius, a função de Möbius tem a seguinte definições: Para n inteiro positivo, definimos:

$$\mu(n)\begin{cases}1, \text{se n=1}\\ 0, \text{se } \ p^2|n \ \text{ para algum p primo}\\ (-1)^r\text{se } \ n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \ \text{ onde } \ p_r \ \text{ são primos distintos}\end{cases}$$

Exemplo 4. Calcule o valor de $\mu(48), \mu(8), \mu(6)$ para verificar se a função de Möbius é multiplicativa, nesses valores. Para resolver esse problema devemos escrever cada um desses números em fatores primos, para depois analisar em qual sentença iremos encontrar o valor da função, visto que a função de Möbius está definida através de sentenças.

$$\mu(48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3$$

Como um dos números primos está elevado ao quadrado, temos o resultado de $\mu(48) = 0$.

$$\mu(48) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot = 2^2 \cdot 2 = 0$$

Novamente um dos fatores está elevado ao quadrado, sendo assim $\mu(8) = 0$

$$\mu(6) = 2 \cdot 3 = 1$$

Para $\mu(6)$ conseguimos escrever o número 6 como a multiplicação de dois números primos, dessa forma iremos utilizar a última sentença da função de Möbius assim teremos $(-1)^2 = 1$. Verificando se para esses valores a função é multiplicativa temos que fazer a seguinte analise.

$$\mu(48) = \mu(8)\mu(6) \Rightarrow$$

$$0 = 0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

Logo para os valores do exemplo temos que a função é multiplica, mas isso se verificar para toda a função de Möbius, ou seja ela sempre será multiplicativa.

5 Equações funcionais no ensino médio

Embora o conteúdo de equações funcionais esteja ausente do ensino básico e tão pouco é estudado no ensino superior, ainda assim podemos perceber algumas equações funcionais em definições básicas a respeito de funções, tais como definições de paridade e função inversa. Nesta seção temos a oportunidade de expor essas equações, e verificar como que iremos encontrar a sua solução, para que dessa forma possamos analisar a veracidade dessas afirmações.

5.1 Função impar e equações funcionais

Na seção 2 desse trabalho apresentamos algumas definições a respeito de paridade de função, nesse capítulo iremos olhar para essas definições como sendo uma equação funcional. Na definição 2.6 temos o conceito que estabelece a propriedade de função ímpar, no contexto do ensino médio podemos enxergar essa definição somente como uma propriedade, no entanto podemos observar como uma equação funcional $f(x) = -f(-x)$. Vamos fazer uso das definições básicas de como resolver uma equação funcional apresentadas na seção 4, para isso vamos substituir o valor de $x = 0$ na equação 4, assim teremos:

$$f(x) = -f(-x) \Rightarrow$$

$$f(0) = -f(-0) \Rightarrow$$

$$f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$2f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$f(0) = 0$$

Assim conseguimos uma informação muito importante de que $f(0) = 0$ logo iremos verificar essa propriedade para os polinômios, para resolver esse problema devemos analisar essa equação com muito cuidado, pois a maneira de resolver esse problema não é trivial. Faça $f(x) = a(x^r)$, $a \in \mathbb{N}$ com $r \in \mathbb{N}$ assim teremos.

$$a(x^r) = -a((-x)^r) \Rightarrow$$

$$a(x^r) + a((-x)^r) = 0 \Rightarrow$$

$$a(x^r) + a(-1)^r \cdot x^r = 0 \Rightarrow$$

$$a(x^r)(1 + (-1)^r = 0$$

Temos que $x^r \neq 0$ pois essa expressão nunca será zero, assim para que essa igualdade seja verdadeira.

$$1 + (-1)^r = 0 \Rightarrow$$

$$(1-)^r = -1$$

Por fim, essa última expressão será solução somente quando r for um natural ímpar, assim as funções da forma $f(x) = a(x^r)$ que serão solução será os polinômios de grau ímpar.

5.2 Uma abordagem das equações funcionais no ensino médio através de funções inversas

Agora iremos trabalhar um caso particular de equação funcional no ensino médio, onde esse problema é mais conhecido como função inversa, podemos perceber essa relação entre as funções inversas e equações funcionais na definição 2.5 apresentada na seção 2 . Os problemas de função inversa que os materiais propõem para solução, envolve alguns passos apresentados na seção 4 a respeito da solução de uma equação funcional. Fazendo uma leitura do que essa propriedade diz sobre função inversa, temos que a composição da função com sua inversa é igual a função identidade. Para compreensão dessa relação vejamos a solução de um exemplo.

Exemplo 5. Encontre a função inversa de $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ analisando como uma equação funcional.

A primeira atitude nossa para resolver o problema será substituir na definição 2.5 assim teremos que.

$$f^{-1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = x$$

Faça $y = \frac{x-3}{x+1}$ agora iremos organizar essa expressão para encontrar o valor de x.

$$y(x+1) = x - 3 \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} yx + y = x - 3 \quad &\Rightarrow \\ yx - x = -y - 3 \quad &\Rightarrow \\ x(y-1) = -(y+3) \quad &\Rightarrow \\ x = \frac{-(y+3)}{y-1} \end{aligned}$$

Fazendo as substituições temos que:

$$f^{-1}(y) = \frac{-(y+3)}{y-1}$$

A função que encontramos está na variável y mas pode ser facilmente transformada para variável x fazendo $x = y$. Os problemas de função inversa seguem as definições básicas de equações funcionais pois podemos observar a equação 2 da definição de função inversa como sendo uma equação, onde a solução desse problema será uma função. Logo podemos dizer que a definição de função inversa é uma equação funcional. Como esse assunto está no ensino básico dessa forma conseguimos fazer uma abordagem dos conceitos de equações funcionais no ensino médio.

6 Considerações finais

Portanto, com base no desenvolvimento desse trabalho acerca das equações funcionais, podemos perceber o quanto esse assunto é importante, pois a resolução dos problemas que envolve equações funcionais é um pouco complexa. Mesmo sendo desafiador a resolução desses problemas percebe-se o quão interessante eles são, pois nos obriga a pensar um pouco mais e desenvolver estratégias afim de encontrar a solução, dessa forma aprimorando o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Dentro da graduação pouco se percebe o estudo desse conteúdo, as vezes que observamos algumas equações funcionais principalmente a aditiva, estava relacionada a outros conceitos matemáticos, visto que esse assunto está presente em olímpiadas matemáticas. Contudo conseguimos mostrar através desse trabalho a interdisciplinaridade desse conteúdo com assuntos como equações e funções que estão presente na educação básica, pois a introdução desse assunto no ensino fundamental e médio além de trazer novos conhecimentos e desafios, pode proporcionar há alguns alunos a inserção na matemática olímpica, trazendo novas oportunidades para os estudantes.

Quanto aos objetivos, conseguimos mostrar as principais ferramentas para encontrar a solução das equações funcionais, sua relação com outros conceitos tais como equação diofantina onde, podemos analisar sua solução como funções, e funções multiplicativas que tem uma relação com equações funcionais multiplicativas.

A respeito desse trabalho podemos verificar algumas contribuições na relação desses conteúdos, visto que fizemos a análise do conceito de paridade das funções par e ímpar, logo após analisamos essa definição de tal maneira que fosse possível observar uma equação funcional, dessa forma apresentado uma solução para essa equação funcional.

Sobre esse tema podemos perceber uma carência das pesquisas relacionadas as equações funcionais em português. Como esse trabalho apresentou o assunto, maneiras de resolver, exemplos e relação com outros conteúdos, ainda assim podemos ter algumas indagações sobre as aplicações das equações funcionais, e isso pode ser problemática para pesquisas posteriores.

Dessa forma, conseguimos fazer a apresentação desse conteúdo, que de certa forma é desconhecido até na graduação. Contudo, fizemos algumas apresentações e relações desse assunto com conceitos básicos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua infinita graça e misericórdia.
Agradeço a meus familiares e amigos.
Agradeço ao meus professores pela contribuição nesse trabalho.
Agradeço a instituição IFPI Campus Corrente que proporcionou a realização da pesquisa.

Referências

[1] SMALL, C. G. **Functional equations and how to solve them**. New York: Springer, c2007. (Problem Books in Mathematics). p. 13.

[2] IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013, v. 6.

[3] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da matemática elementar:** conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

[4] FREIRE, A. S. **Princípios sobre a teoria das equações funcionais via aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico**. 2021. 109 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2021.

[5] BUCHAIM, V. K. **Técnicas de resolução e embasamento teórico de equações funcionais**. 2021. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2021.

[6] PROLÍMPICO. Equações funcionais: uma primeira abordagem. 4. ed. [Rio de Janeiro: IPMA], 2022. 1 vídeo (1h11min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vk3sXkLbd2c. Acesso em: 11 dez. 2023.