

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Pesquisa

Luís Cláudio Yamaoka

Escola Paulista de Política, Economia e Negócios

Universidade Federal de São Paulo

luis.yamaoka@unifesp.br

Os caminhos das raízes da função quadrática

The paths of the roots of the quadratic function

Resumo

Neste artigo fixamos dois coeficientes reais e variamos o coeficiente real remanescente da função quadrática (função polinomial do segundo grau) para obter os caminhos descritos pelas duas raízes da função no plano complexo. Tais caminhos repousam em circunferências cujos centros estão no eixo real, no eixo real, em paralelas ao eixo imaginário ou no eixo imaginário, e na origem. Nas situações pertinentes, as Figuras especificam qual ou quais pontos devem ser excluídos das circunferências e das retas. Comentários também acompanham as Figuras. Diferenciamos os sentidos dos percursos das raízes reais quando da existência ou não de raízes complexas não reais. Determinamos as situações nas quais as raízes duplas aparecem. Determinamos o(s) ponto(s) aderente(s) comum(ns) aos dois conjuntos formados pelos pontos dos caminhos de ambas as raízes. Usamos Pré-Cálculo, Cálculo de uma variável real e Análise para provar estes resultados.

Palavras-chave: Função quadrática. Polinômio do segundo grau. Raízes. Raízes complexas. Raízes reais. Raízes duplas. Caminhos.

Abstract

In this paper we fix two real coefficients and vary the remaining real coefficient of the quadratic function (second degree polynomial function) to obtain the paths described by the two roots of the function in the complex plane. Such paths rest on circumferences whose centers are on the real axis, on the real axis, on parallels to the imaginary axis or on the imaginary axis, and at the origin. In the appropriate situations, the Figures specify which point or points must be excluded from the circumferences and from the straight lines. Comments also accompany the Figures. We differentiate the directions of the paths of the real roots when the existence or not of non-real complex roots. We determine the situations in which double roots appear. We determine the common adherent point(s) to the two sets formed by the points of the paths of both roots. We used Pre Calculus, Calculus of one real variable and Analysis to prove these results.

Keywords: Quadratic function. Second degree polynomial. Roots. Complex roots. Real roots. Double roots. Paths.



1 Introdução

Equações quadráticas eram conhecidas há muito tempo pelos babilônios e egípcios. Elas aparecem em textos do período babilônico que datam de uns 4.000 anos atrás. Mais tarde, outros povos - gregos, chineses, indianos e árabes - também desenvolveram métodos para resolver equações quadráticas. No entanto, a fórmula para resolver a equação quadrática como a conhecemos hoje só surgiu na história Moderna, na Europa. Essa fórmula possui algumas nomenclaturas pelo mundo, mas somente no Brasil ela é conhecida como fórmula de Bhaskara. Vale ressaltar que até o início da Idade Moderna não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Para obter informações detalhadas sobre as abordagens e os métodos de solução adotados pelos primeiros e posteriores matemáticos, consulte Boyer (1974) e Smith (1958).

O corpo discente da oitava série aprende a calcular as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. No ensino médio, com a introdução dos números complexos e das funções polinomiais, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = az^2 + bz + c$, onde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, o corpo discente sabe que as raízes complexas de f são $z_1 \doteq x_1 + y_1i = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (primeira raiz) e $z_2 \doteq x_2 + y_2i = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (segunda raiz), onde $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, e esse corpo discente é também capaz de localizá-las no plano complexo.

Então, nos perguntamos: em relação à função quadrática f com coeficientes reais, qual seria um possível próximo passo para estudantes de um curso de graduação em Matemática? A pergunta nos pareceu bastante natural, assim como a resposta: fixaremos dois dos três coeficientes reais e variaremos em \mathbb{R} o coeficiente remanescente de f , com a condição $a \neq 0$, para obter os dois caminhos descritos por ambas as raízes de f no plano complexo ($x0y$), ou seja, conforme o coeficiente remanescente é variado em \mathbb{R} , com $a \neq 0$, cada raiz descreve um *caminho*. Portanto, estudamos:

- Primeiro caso: b_0 e c_0 são fixados; $a \in \mathbb{R}^*$ (9 subcasos).
- Segundo caso: $a_0 \neq 0$ e c_0 são fixados; $b \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).
- Terceiro caso: $a_0 \neq 0$ e b_0 são fixados; $c \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).

A f assume uma nova notação em cada caso: fixados b_0 e c_0 , para cada $a \in \mathbb{R}^*$ $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$ tem duas raízes; fixados $a_0 \neq 0$ e c_0 , para cada $b \in \mathbb{R}$ $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$ tem duas raízes; fixados $a_0 \neq 0$ e b_0 , para cada $c \in \mathbb{R}$ $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$ tem duas raízes.

Em cada Figura do texto, dada uma raiz, para cada intervalo (aberto ou degenerado) do coeficiente variável em verde corresponde um *pedaço do caminho* da raiz. Para um valor específico do coeficiente variável, é bastante simples decidir em qual pedaço do caminho cada raiz está localizada, e como ela passa a se movimentar à medida que o coeficiente variável aumenta, como se pode ver, por exemplo, nas Figuras 2, 12 e 21. O mapeamento completo e detalhado aqui obtido dos caminhos das duas raízes, bem como as conclusões que se seguem, não são encontrados na literatura, e são, aos nossos olhos, excelentes ferramentas educacionais.

Três específicos pedaços de caminhos no caso das funções polinomiais do segundo grau aparecem em Long (1971). Exemplos de caminhos de raízes para polinômios de maior grau podem ser vistos em Mosier (1986) e em Gautschi (1978). Em Xu (2020), o autor nomeia alguns pontos dos caminhos das raízes reais para polinômios de grau ímpar com parâmetros. Ademais, mencionamos duas referências que estão relacionadas ao assunto: Beauzamy (1999) analisa duas maneiras de obter estimativas mais precisas para as raízes de um polinômio que variam com os seus coeficientes e

Marden (2005) abrange alguns estudos das raízes de um polinômio em função de seus coeficientes - entre os problemas, o de determinar um limite superior para os módulos das raízes do polinômio.

2 Primeiro caso

Estudaremos os seguintes nove subcasos:

2.1 $b_0 > 0$, $c_0 > 0$

Solução:

(a) $a < b_0^2/4c_0$ e $a \neq 0$

Seja $S = \{a \in \mathbb{R} \mid a < b_0^2/4c_0, a \neq 0\}$. A primeira raiz e a sua primeira derivada são

$$x_1(a) = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a} \in \mathbb{R}, \forall a \in S, \quad x'_1(a) = \frac{2ac_0 + b_0\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} - b_0^2}{2a^2\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}, \forall a \in S.$$

Seja $a \in S$. Então,

$$\begin{aligned} a < b_0^2/4c_0 &\implies \begin{cases} 0 < b_0^2 - 4ac_0 \\ \text{e} \\ a < b_0^2/2c_0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 0 < b_0^2 - 4ac_0 \\ \text{e} \\ \frac{b_0^2 - 2ac_0}{b_0} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$a \neq 0 \implies a^2 > 0, \text{ ou seja, } b_0^2 - 4ac_0 < \left(\frac{b_0^2 - 2ac_0}{b_0}\right)^2. \quad (2)$$

De (1) e (2), obtemos

$$\begin{cases} 0 < b_0^2 - 4ac_0 < \left(\frac{b_0^2 - 2ac_0}{b_0}\right)^2 \\ \text{e} \\ \frac{b_0^2 - 2ac_0}{b_0} > 0 \end{cases}$$

$$\implies \sqrt{b_0^2 - 4ac_0} < \frac{b_0^2 - 2ac_0}{b_0} \implies 2ac_0 + b_0\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} - b_0^2 < 0. \quad (3)$$

Da primeira desigualdade de (1), (2) e (3) temos $x'_1(a) < 0$. Como a é qualquer elemento de S , provamos que $x'_1(a) < 0, \forall a \in S$. Note que $-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}$ e $2a$ são contínuas em S . Logo,

$$x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente em } S. \quad (4)$$

Temos (LH: regra de L'Hospital)

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} x_1(a) \stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-c_0}{\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0^-} x_1(a) \stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{-c_0}{\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}} = -\frac{c_0}{b_0}, \quad (5)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} x_1(a) \stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-c_0}{\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}} = -\frac{c_0}{b_0}, \quad \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}} x_1(a) = -\frac{2c_0}{b_0}. \quad (6)$$

A segunda raiz e a sua primeira derivada são

$$x_2(a) = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a} \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in S, \quad x_2'(a) = \frac{-2ac_0 + b_0\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} + b_0^2}{2a^2\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}, \quad \forall a \in S.$$

Seja $a \in S$. Então,

$$\begin{aligned} a < b_0^2/4c_0 &\implies \begin{cases} b_0^2 - 4ac_0 > 0 \\ \text{e} \\ a < b_0^2/2c_0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} b_0^2 - 4ac_0 > 0 \\ \text{e} \\ \frac{2ac_0 - b_0^2}{b_0} < 0 \end{cases} \\ &\implies \sqrt{b_0^2 - 4ac_0} > \frac{2ac_0 - b_0^2}{b_0} \\ &\implies -2ac_0 + b_0\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} + b_0^2 > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

e

$$a \neq 0 \implies a^2 > 0. \quad (8)$$

Uma vez que $\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} > 0$, de (7) e (8) obtemos $x_2'(a) > 0$. Como a é qualquer elemento de S , provamos que $x_2'(a) > 0$, $\forall a \in S$. Note que $-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}$ e $2a$ são contínuas em S . Logo,

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente crescente em } S. \quad (9)$$

Temos

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} x_2(a) \stackrel{LH}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{c_0}{\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0^-} x_2(a) = \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{-b_0}{a} = +\infty, \quad (10)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} x_2(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-b_0}{a} = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}} x_2(a) = -\frac{2c_0}{b_0}. \quad (11)$$

(b) $a = b_0^2/4c_0$

As fórmulas de $x_1(a)$ e $x_2(a)$ em (a) são válidas para $a = b_0^2/4c_0$: temos

$$x_1\left(\frac{b_0^2}{4c_0}\right) = x_2\left(\frac{b_0^2}{4c_0}\right) = -\frac{2c_0}{b_0}. \quad (12)$$

(c) $a > b_0^2/4c_0$

A primeira raiz é

$$z_1(a) = \underbrace{-\frac{b_0}{2a}}_{X_1} + \underbrace{\frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}}_{Y_1} i, \quad \forall a > b_0^2/4c_0.$$

Da definição de X_1 tiramos

$$a = -\frac{b_0}{2X_1}, \quad (13)$$

que em $a > b_0^2/4c_0$ nos dá

$$a = -\frac{b_0}{2X_1} > \frac{b_0^2}{4c_0} \iff \frac{-2b_0c_0 - b_0^2X_1}{4c_0X_1} > 0 \iff -\frac{2c_0}{b_0} < X_1 < 0. \quad (14)$$

Da definição de Y_1 , (13) e (14) obtemos

$$Y_1(X_1) = \sqrt{-\frac{2c_0}{b_0}X_1 - X_1^2}, \quad \text{ou seja,}$$

$Y_1(X_1)$ é a semicircunferência positiva com centro $(-c_0/b_0, 0)$ e raio c_0/b_0 (15)

já que $Y = \pm\sqrt{-\frac{2c_0}{b_0}X_1 - X_1^2} \iff (X_1 + \frac{c_0}{b_0})^2 + Y^2 = (\frac{c_0}{b_0})^2.$

Na Figura 1:

A) Traçamos o caminho da primeira raiz de (4), (5), (6), (12), da definição de X_1 e de (15). A primeira raiz está confinada ao diâmetro (exceto $(0, 0)$ e $(-c_0/b_0, 0)$) e à semicircunferência positiva, e seu caminho tem o sentido horário;

B) Traçamos o caminho da segunda raiz de (9), (10), (11), (12) e que para $a > b_0^2/4c_0$ a segunda raiz z_2 é o complexo conjugado de z_1 . Para $a < 0$, ela é real e percorre os valores crescentes em $]0, +\infty[$. Para $0 < a \leq b_0^2/4c_0$, ela é real e percorre os valores crescentes em $] -\infty, -2c_0/b_0]$. Para $a \geq b_0^2/4c_0$, ela vai do ponto $(-2c_0/b_0, 0)$ e ao longo da semicircunferência negativa no sentido anti-horário;

C) Quando $a \rightarrow -\infty$, no eixo real ambas as raízes iniciam de pontos cada vez mais próximos da origem (a primeira raiz é negativa, a segunda raiz é positiva), e seguem em sentidos opostos para $a < 0$. Quando $a \rightarrow +\infty$, ambas as raízes retornam ao longo das semicircunferências para pontos cada vez mais próximos da origem. Temos $|z_1(a)| = |z_2(a)| = c_0/b_0, \forall a > b_0^2/4c_0$. Note que $z_1\left(\frac{b_0^2}{2c_0}\right) = -\frac{c_0}{b_0} + \frac{c_0}{b_0}i$ e $z_2\left(\frac{b_0^2}{2c_0}\right) = -\frac{c_0}{b_0} - \frac{c_0}{b_0}i$. As semicircunferências positiva e negativa são cobertas pelo intervalo infinito $a > b_0^2/4c_0$.

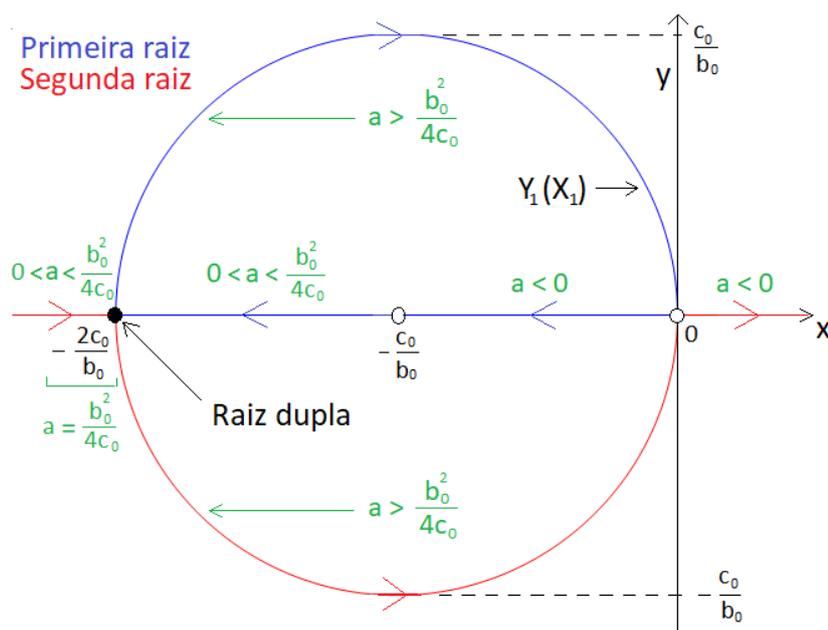


Figura 1: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0$ ($b_0 > 0, c_0 > 0$)

Por exemplo, se $f_a(z) = az^2 + 2z + 1$, decida em quais pedaços dos caminhos a primeira e a segunda raízes estão localizadas, respectivamente, para: (i) $a = 2$; (ii) $a = 3$; (iii) $a = -3$; (iv) $a = -2$; (v) $a = 1/10$; (vi) $a = 1/4$; (vii) $a = 1$. Na Figura 2, desenhamos os pedaços dos caminhos rotulados de 1 a 7. Então, respondemos: (i) Rótulos 3 e 6 (a primeira raiz em $(-1/2, 1/2)$, a segunda raiz em $(-1/2, -1/2)$ - veja C)); (ii) Rótulos 3 e 6, mas ambas as raízes mais próximas da origem do que para $a = 2$; (iii) Rótulos 1 e 4; (iv) Rótulos 1 e 4, mas ambas as raízes mais afastadas da origem do que para $a = -3$; (v) Rótulos 2 e 5; (vi) Rótulos 2 e 5, mas ambas as raízes mais próximas de $(-1, 0)$ do que para $a = 1/10$; (vii) Rótulo 7.

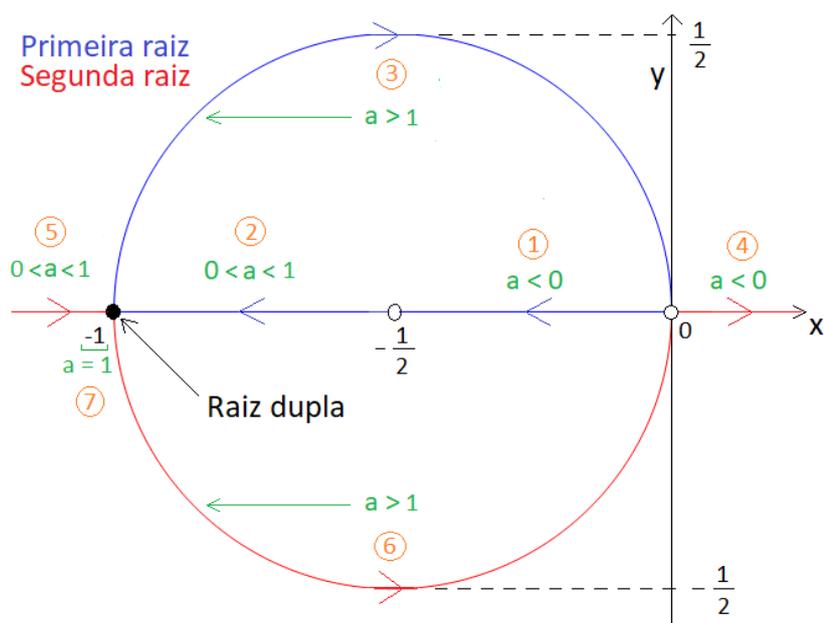


Figura 2: Raízes de $f_a(z) = az^2 + 2z + 1$, $a \neq 0$

2.2 $b_0 < 0, c_0 > 0$

Solução: A prova é similar.

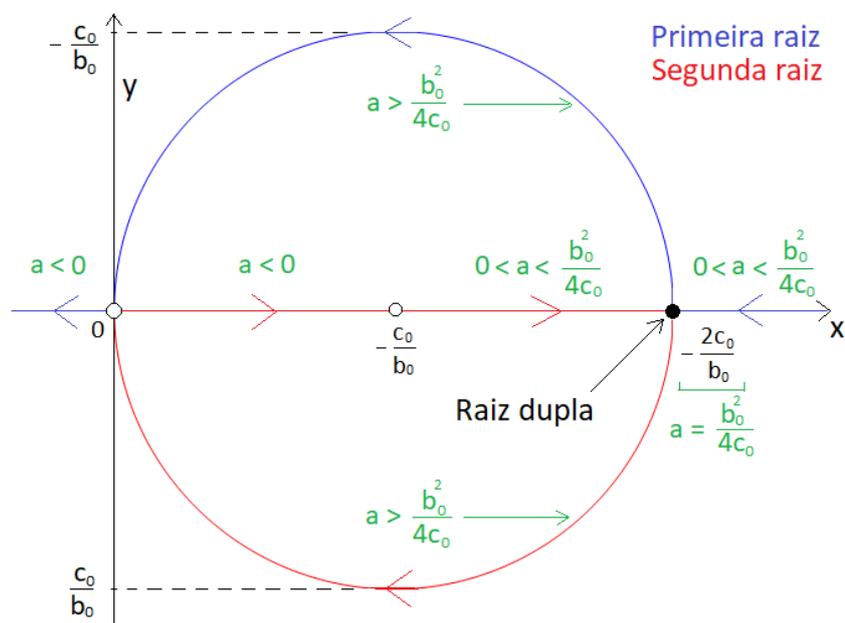


Figura 3: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0$ ($b_0 < 0, c_0 > 0$)

2.3 $b_0 > 0, c_0 < 0$

Solução: A prova é similar.

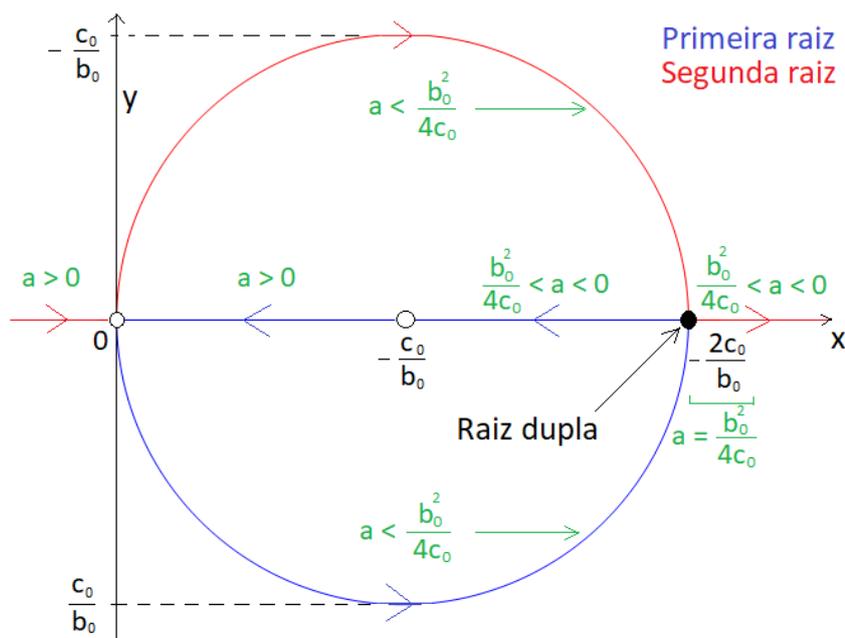


Figura 4: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0$ ($b_0 > 0, c_0 < 0$)

2.4 $b_0 < 0, c_0 < 0$

Solução: A prova é similar.

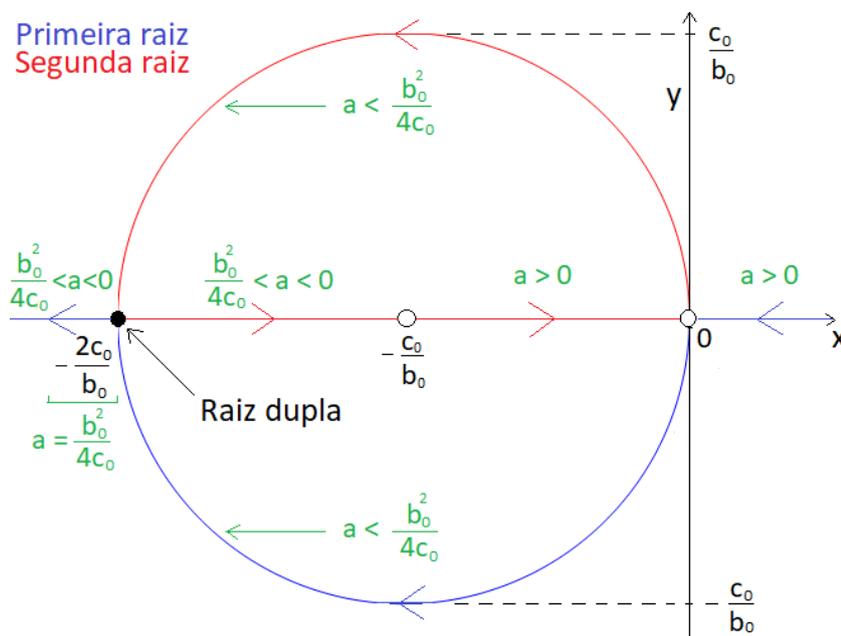


Figura 5: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0$ ($b_0 < 0, c_0 < 0$)

Note nas Figuras 1, 3, 4 e 5: uma das raízes está confinada; 0 não é uma raiz de f_a ; a abscissa $-c_0/b_0$ do centro da circunferência não é uma raiz de f_a ($-c_0/b_0$ é a raiz da função polinomial do primeiro grau $b_0z + c_0$); para $a = b_0^2/4c_0$ ambos os caminhos interceptam em $(-2c_0/b_0, 0)$: é um “ponto de colisão” (veja exemplos em Mosier (1986) e em Gautschi (1978)).

2.5 $b_0 = 0, c_0 > 0$

Solução:

(a) $a < 0$

A primeira raiz é

$$x_1(a) = -\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{-a}} < 0, \quad \forall a < 0,$$

e a sua primeira derivada é

$$x_1'(a) = -\frac{\sqrt{c_0}}{2(\sqrt{-a})^3} < 0, \quad \forall a < 0.$$

Note que $-\sqrt{c_0}$ e $\sqrt{-a}$ são contínuas, $\forall a < 0$. Logo,

$$x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall a < 0. \quad (16)$$

Além disso,

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} x_1(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{-a}} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0^-} x_1(a) = \lim_{a \rightarrow 0^-} -\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{-a}} = -\infty. \quad (17)$$

A segunda raiz é

$$x_2(a) = -x_1(a), \quad \forall a < 0.$$

(b) $a > 0$

A primeira raiz é

$$z_1(a) = \underbrace{\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{a}}}_{Y_1(a)} i, \quad \forall a > 0. \quad (18)$$

$$Y_1'(a) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{a^3}} < 0, \quad \forall a > 0.$$

Note que $\sqrt{c_0}$ e \sqrt{a} são contínuas, $\forall a > 0$. Logo,

$$Y_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall a > 0. \quad (19)$$

$$\text{E } \lim_{a \rightarrow 0^+} Y_1(a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{a}} = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} Y_1(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{a}} = 0. \quad (20)$$

Na Figure 6 traçamos os caminhos:

A) Da primeira raiz de (16), (17), (18), (19) e (20). Para $a < 0$, ela é real e percorre os valores decrescentes em $] -\infty, 0[$. Para $a > 0$, ela vem pelos valores decrescentes em $]0, +\infty[$ no eixo imaginário;

B) Da segunda raiz do fato de que para $a < 0$ temos $x_2 = -x_1$, e que para $a > 0$ a segunda raiz z_2 é o complexo conjugado de z_1 . Para $a < 0$, ela é real e vai pelos valores crescentes em $]0, +\infty[$. Para $a > 0$, ela vem pelos valores crescentes em $] -\infty, 0[$ no eixo imaginário.

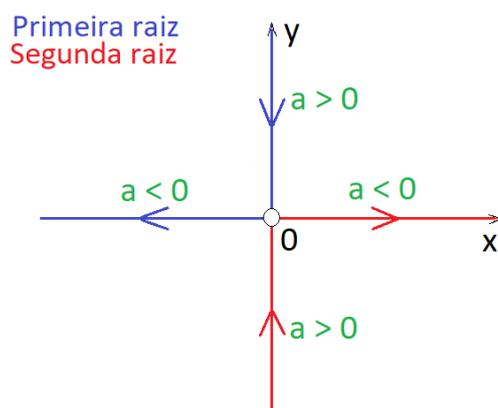


Figura 6: Raízes de $f_a(z) = az^2 + c_0$, $a \neq 0$ ($c_0 > 0$)

Note na Figura 6: 0 não é uma raiz de f_a ; não há ponto de interseção dos caminhos.

2.6 $b_0 = 0$, $c_0 < 0$

Solução: A prova é similar. Na Figura 7, 0 não é uma raiz de f_a ; não há ponto de interseção dos caminhos.

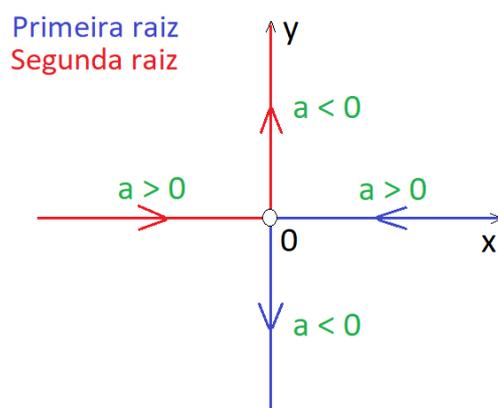


Figura 7: Raízes de $f_a(z) = az^2 + c_0$, $a \neq 0$ ($c_0 < 0$)

2.7 $b_0 > 0$, $c_0 = 0$

Solução:

A primeira raiz é

$$x_1(a) = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2}}{2a} = \frac{-b_0 + b_0}{2a} = 0, \forall a \neq 0. \quad (21)$$

A segunda raiz é

$$x_2(a) = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2}}{2a} = \frac{-b_0 - b_0}{2a} = -\frac{b_0}{a}, \forall a \neq 0.$$

$$x_2'(a) = \frac{b_0}{a^2} > 0, \forall a \neq 0.$$

Note que $-b_0$ e a são contínuas, $\forall a \neq 0$. Logo,

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente crescente, } \forall a \neq 0. \quad (22)$$

Além disso,

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} x_2(a) = 0, \quad \lim_{a \rightarrow 0^-} x_2(a) = +\infty, \quad (23)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} x_2(a) = -\infty, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} x_2(a) = 0. \quad (24)$$

Na Figura 8 traçamos os caminhos:

A) Da primeira raiz de (21). Ela está na origem, $\forall a \neq 0$;

B) Da segunda raiz de (22), (23) e (24). Para $a < 0$, ela vai pelos valores crescentes de $]0, +\infty[$ no eixo real. Para $a > 0$, ela vem pelos valores crescentes de $] - \infty, 0[$ no eixo real. Temos $\lim_{a \rightarrow 0} |x_2(a)| = +\infty$.

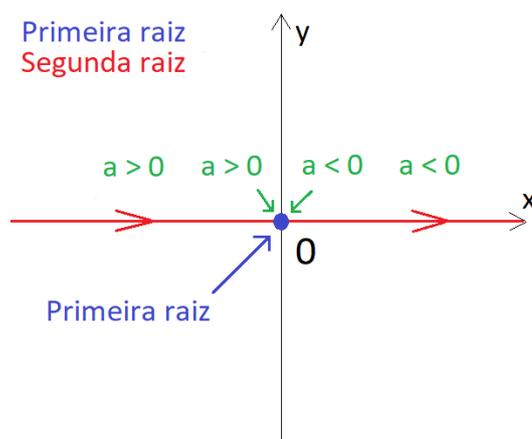


Figura 8: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z$, $a \neq 0$ ($b_0 > 0$)

2.8 $b_0 < 0$, $c_0 = 0$

Solução: A prova é similar.

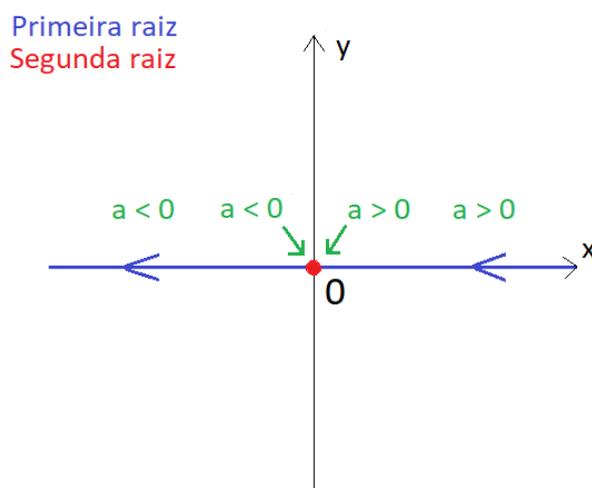


Figura 9: Raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z$, $a \neq 0$ ($b_0 < 0$)

Note nas Figuras 8 e 9: cada ponto do eixo real é raiz de f_a para algum $a \in \mathbb{R}^*$; não existe ponto de interseção dos caminhos.

2.9 $b_0 = 0$, $c_0 = 0$

Solução:

Note na Figure 10 que ambos os caminhos estão na origem, $\forall a \neq 0$.

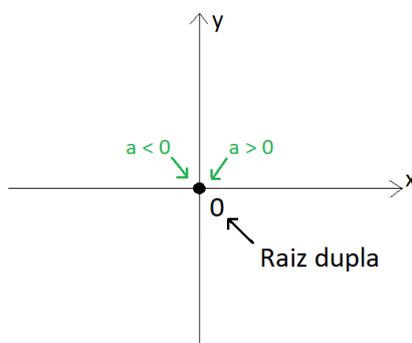


Figura 10: Raízes de $f_a(z) = az^2$, $a \neq 0$

3 Segundo caso

Estudaremos os seguintes seis subcasos:

3.1 $a_0 > 0, c_0 > 0$

Solução:

(a) $b < -2\sqrt{a_0c_0}$ ou $b > 2\sqrt{a_0c_0}$

Seja $S = \{b \in \mathbb{R} \mid b < -2\sqrt{a_0c_0} \text{ ou } b > 2\sqrt{a_0c_0}\}$. Para a primeira raiz temos

$$x_1(b) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}}{2a_0} \in \mathbb{R}, \forall b \in S, \quad x'_1(b) = \frac{-\sqrt{b^2 - 4a_0c_0} + b}{2a_0\sqrt{b^2 - 4a_0c_0}}, \forall b \in S. \quad (25)$$

Seja $S_1 = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 2\sqrt{a_0c_0}\}$ e seja $b \in S_1$. Então,

$$\begin{aligned} b > 2\sqrt{a_0c_0} &\implies \begin{cases} b^2 - 4a_0c_0 > 0 \\ e \\ b > 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} b^2 > b^2 - 4a_0c_0 > 0 \\ e \\ b > 0 \end{cases} \\ &\implies \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} < b \\ &\implies -\sqrt{b^2 - 4a_0c_0} + b > 0 \\ &\implies x'_1(b) > 0, \text{ já que } 2a_0 > 0 \text{ e } \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} > 0. \end{aligned}$$

Como b é qualquer elemento de S_1 , provamos que $x'_1(b) > 0, \forall b \in S_1$. Note que $-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}$ e $2a_0$ são contínuas em S_1 . Logo,

$$\text{em } S_1, x_1 \text{ é contínua e estritamente crescente.} \quad (26)$$

Temos

$$\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0c_0}^+} x_1(b) = -\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \quad (27)$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} x_1(b) = \frac{1}{2a_0} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}) \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0})}{(b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0})} \right] = 0. \quad (28)$$

Seja $S_2 = \{b \in \mathbb{R} \mid b < -2\sqrt{a_0c_0}\}$ e seja $b \in S_2$. Então,

$$\begin{aligned} b < -2\sqrt{a_0c_0} &\implies \begin{cases} b^2 - 4a_0c_0 > 0 \\ e \\ b < 0 \end{cases} \\ &\implies \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} > b \\ &\implies -\sqrt{b^2 - 4a_0c_0} + b < 0 \\ &\implies x'_1(b) < 0, \text{ já que } 2a_0 > 0 \text{ e } \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} > 0. \end{aligned}$$

Como b é qualquer elemento de S_2 , provamos que $x'_1(b) < 0$, $\forall b \in S_2$. Note que $-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}$ e $2a_0$ são contínuas em S_2 . Logo,

$$\text{em } S_2, x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente.} \quad (29)$$

Também temos

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} x_1(b) = +\infty, \quad \lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}} x_1(b) = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}. \quad (30)$$

A segunda raiz é

$$x_2(b) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}}{2a_0} \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in S. \quad (31)$$

Por mudança de variáveis, obtemos $x_2(-b) = -x_1(b)$. Logo,

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente crescente } \forall b < -2\sqrt{a_0c_0} \quad (32)$$

$$\text{já que } -b_2 < -b_1 < -2\sqrt{a_0c_0} \Leftrightarrow b_2 > b_1 > 2\sqrt{a_0c_0} \stackrel{(26)}{\Rightarrow} x_1(b_2) > x_1(b_1) \Leftrightarrow -x_1(b_2) < -x_1(b_1) \Leftrightarrow x_2(-b_2) < x_2(-b_1),$$

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente decrescente } \forall b > 2\sqrt{a_0c_0} \quad (33)$$

$$\text{já que } -b_1 > -b_2 > 2\sqrt{a_0c_0} \Leftrightarrow b_1 < b_2 < -2\sqrt{a_0c_0} \stackrel{(29)}{\Rightarrow} x_1(b_2) < x_1(b_1) \Leftrightarrow -x_1(b_2) > -x_1(b_1) \Leftrightarrow x_2(-b_2) > x_2(-b_1), \text{ e}$$

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} x_2(b) = 0, \quad \lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}} x_2(b) = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \quad (34)$$

$$\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0c_0}^+} x_2(b) = -\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} x_2(b) = -\infty. \quad (35)$$

$$(b) \quad b = \pm 2\sqrt{a_0c_0}$$

As fórmulas de $x_1(b)$ em (25) e $x_2(b)$ em (31) são válidas para $b = \pm 2\sqrt{a_0c_0}$: temos

$$x_1(-2\sqrt{a_0c_0}) = x_2(-2\sqrt{a_0c_0}) = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \quad (36)$$

$$x_1(2\sqrt{a_0c_0}) = x_2(2\sqrt{a_0c_0}) = -\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}. \quad (37)$$

(c) $-2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}$

A primeira raiz é

$$z_1(b) = \underbrace{-\frac{b}{2a_0}}_{X_1} + \underbrace{\frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0}}_{Y_1} i, \quad \forall -2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}.$$

Da definição de X_1 tiramos

$$b = -2a_0X_1, \quad (38)$$

que em $-2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}$ é equivalente a

$$-\sqrt{\frac{c_0}{a_0}} < X_1 < \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}. \quad (39)$$

Da definição de Y_1 , (38) e (39) obtemos

$$Y_1(X_1) = \sqrt{\frac{c_0}{a_0} - X_1^2}, \quad \text{ou seja,}$$

$$Y_1(X_1) \text{ é a semicircunferência positiva com centro } (0, 0) \text{ e raio } \sqrt{c_0/a_0} \quad (40)$$

$$\text{já que } Y = \pm \sqrt{\frac{c_0}{a_0} - X_1^2} \Leftrightarrow X_1^2 + Y^2 = \frac{c_0}{a_0}.$$

Na Figura 11 traçamos os caminhos:

A) Da primeira raiz de (26), (27), (28), (29), (30), (36), (37), da definição de X_1 e de (40). A primeira raiz entra na região circular. Mais precisamente, ela vem pelos valores decrescentes em $[\sqrt{c_0/a_0}, +\infty[$ no eixo real, segue ao longo da semicircunferência positiva no sentido anti-horário até retornar ao eixo real em $-\sqrt{c_0/a_0}$ e, a partir daí, passa pelos valores crescentes em $[-\sqrt{c_0/a_0}, 0[$ no eixo real;

B) Da segunda raiz de (32), (33), (34), (35), (36), (37) e que para $-2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}$ a segunda raiz z_2 é o complexo conjugado de z_1 . A segunda raiz sai da região circular. Mais precisamente, ela passa pelos valores crescentes em $]0, \sqrt{c_0/a_0}]$ no eixo real, segue ao longo da semicircunferência negativa no sentido horário até retornar ao eixo real em $-\sqrt{c_0/a_0}$ e, a partir daí, percorre os valores decrescentes em $] -\infty, -\sqrt{c_0/a_0}]$ no eixo real.

Por exemplo, se $f_b(z) = 2z^2 + bz + 2$, decida em quais pedaços dos caminhos a primeira e a segunda raízes estão localizadas, respectivamente, para: (i) $b = -5$; (ii) $b = 7$; (iii) $b = 2$; (iv) $b = 3$; (v) $b = -2$; (vi) $b = 4$; (vii) $b = 0$; (viii) $b = -4$. Na Figura 12, desenhemos os pedaços dos caminhos rotulados de 1 a 12. Então, respondemos: (i) Rótulos 1 e 6; (ii) Rótulos 5 e 10, ; (iii) Rótulos 4 e 9; (iv) Rótulos 4 e 9, mas ambas as raízes mais próximas de $(-1, 0)$ do que para $b = 2$; (v) Rótulos 2 e 7; (vi) Rótulo 12; (vii) Rótulos 3 e 8; (viii) Rótulo 11.

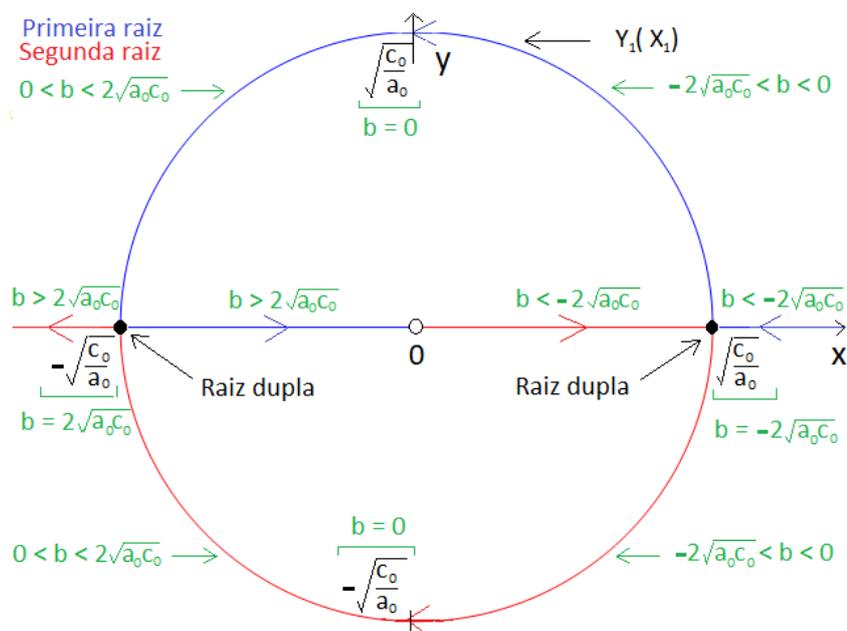


Figura 11: Raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$ ($a_0 > 0, c_0 > 0$)

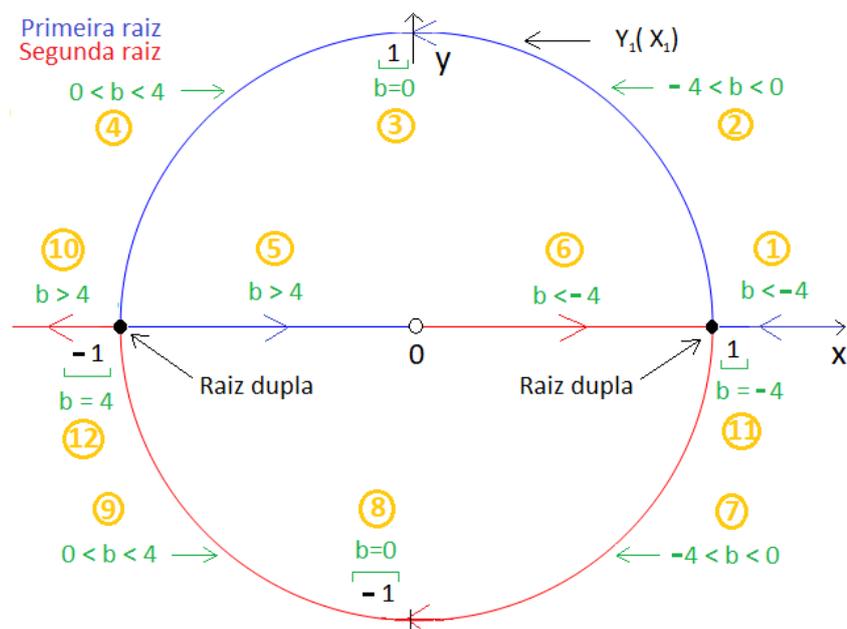


Figura 12: Raízes de $f_b(z) = 2z^2 + bz + 2$

3.2 $a_0 < 0, c_0 < 0$

Solução: A prova é similar.

Observe nas Figuras 11 e 13: a primeira raiz entra na região circular e a segunda raiz sai da região circular; a abscissa do centro da circunferência não é raiz de f_b ; os pontos de interseção de ambos os caminhos são $(-\sqrt{c_0/a_0}, 0)$ e $(\sqrt{c_0/a_0}, 0)$: eles são “pontos de colisão”; $|z_1(b)| = |z_2(b)| = \sqrt{c_0/a_0}$,

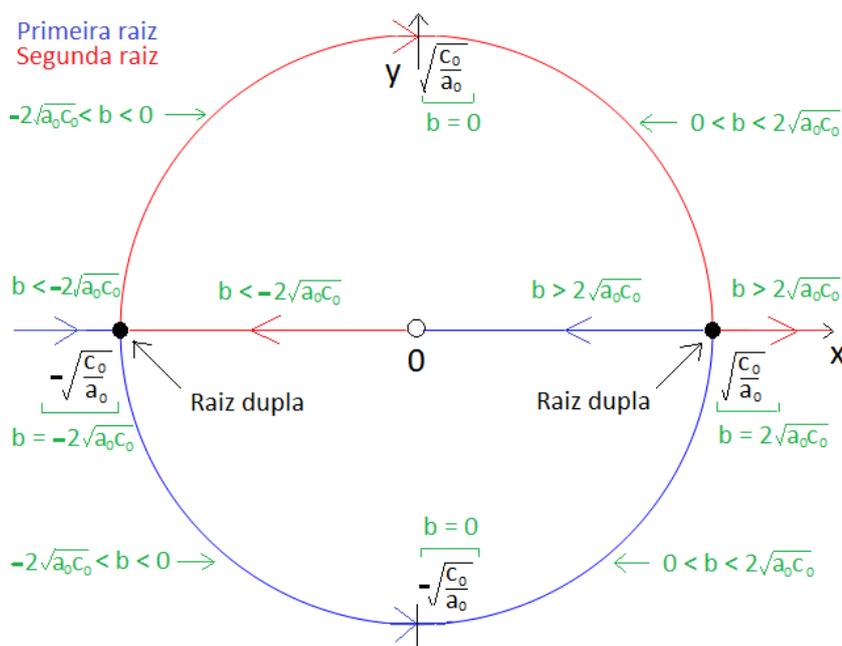


Figura 13: Raízes de $f_b(z) = a_0 z^2 + bz + c_0$ ($a_0 < 0, c_0 < 0$)

$\forall -2\sqrt{a_0 c_0} < b < 2\sqrt{a_0 c_0}$; as semicircunferências positiva e negativa são cobertas pelo *intervalo finito* $-2\sqrt{a_0 c_0} < b < 2\sqrt{a_0 c_0}$.

3.3 $a_0 > 0, c_0 < 0$

Solução:

Temos $b^2 - 4a_0 c_0 > b^2$, $\forall b \in \mathbb{R}$. As fórmulas de $x_1(b)$ e $x'_1(b)$ são as mesmas de (25), $\forall b \in \mathbb{R}$. Note que $-b + \sqrt{b^2 - 4a_0 c_0}$ e $2a_0$ são contínuas, $\forall b \in \mathbb{R}$. Como $a_0 > 0$ e $x'_1(b) < 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, segue que

$$x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall b \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Ademais,

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} x_1(b) = +\infty, \quad \lim_{b \rightarrow 0^-} x_1(b) = \sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}, \quad (42)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} x_1(b) = \sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} x_1(b) = 0, \quad x_1(0) = \sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}. \quad (43)$$

A fórmula de $x_2(b)$ é a mesma de (31), $\forall b \in \mathbb{R}$, e $x_2(-b) = -x_1(b)$. Logo,

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall b \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

e

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} x_2(b) = -\infty, \quad \lim_{b \rightarrow 0^+} x_2(b) = -\sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}, \quad (45)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^-} x_2(b) = -\sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}, \quad \lim_{b \rightarrow -\infty} x_2(b) = 0, \quad , \quad x_2(0) = -\sqrt{-\frac{c_0}{a_0}}. \quad (46)$$

Na Figura 14 traçamos os caminhos:

A) Da primeira raiz de (41), (42) e (43). Ela é real e percorre os valores decrescentes em $]0, +\infty[$;

B) Da segunda raiz de (44), (45), (46). Ela é real e percorre os valores decrescentes em $] -\infty, 0[$.

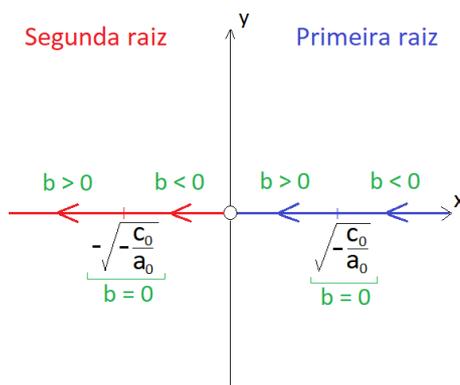


Figura 14: Raízes de $f_b(z) = a_0 z^2 + b z + c_0$ ($a_0 > 0, c_0 < 0$)

3.4 $a_0 < 0, c_0 > 0$

Solução: A prova é similar.

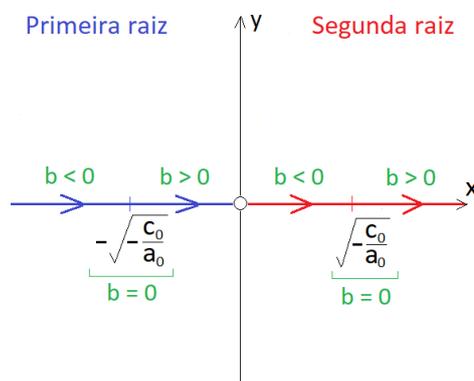


Figura 15: Raízes de $f_b(z) = a_0 z^2 + b z + c_0$ ($a_0 < 0, c_0 > 0$)

Note nas Figuras 14 e 15: 0 não é uma raiz de f_b ; não existe ponto de interseção dos caminhos, a origem os separa: um no eixo real positivo, o outro no eixo real negativo.

3.5 $a_0 > 0, c_0 = 0$

Solução:

A primeira raiz é

$$x_1(b) = \frac{-b + |b|}{2a_0} = \begin{cases} 0, & b \geq 0, \\ -\frac{b}{a_0}, & b < 0. \end{cases} \quad (47)$$

$$x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall b < 0. \quad (48)$$

Temos

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} x_1(b) = +\infty \quad , \quad \lim_{b \rightarrow 0^-} x_1(b) = 0. \quad (49)$$

A segunda raiz é

$$x_2(b) = \frac{-b - |b|}{2a_0} = \begin{cases} 0, & b \leq 0, \\ -\frac{b}{a_0}, & b > 0. \end{cases} \quad (50)$$

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall b > 0. \quad (51)$$

Temos

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} x_2(b) = 0 \quad , \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} x_2(b) = -\infty. \quad (52)$$

Nas Figuras 16 e 17 (ambas as raízes são reais):

A) Traçamos o caminho da primeira raiz de (47), (48) e (49). Para $b < 0$, ela vem pelos valores decrescentes em $]0, +\infty[$. Para $b \geq 0$, ela está na origem;

B) Traçamos o caminho da segunda raiz de (50), (51) e (52). Para $b \leq 0$, ela está na origem. Para $b > 0$, ela vai pelos valores decrescentes em $] -\infty, 0[$;

C) Cada ponto no eixo real é raiz de f_b para algum $b \in \mathbb{R}$;

D) Para $b = 0$ ambos os caminhos interceptam na origem (raiz dupla).

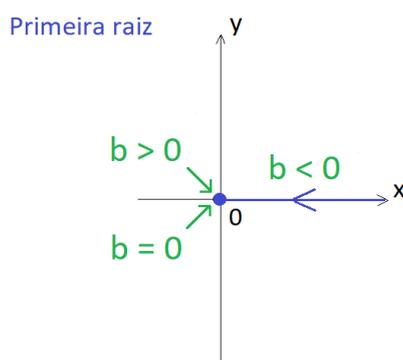


Figura 16: $a_0 > 0, c_0 = 0$

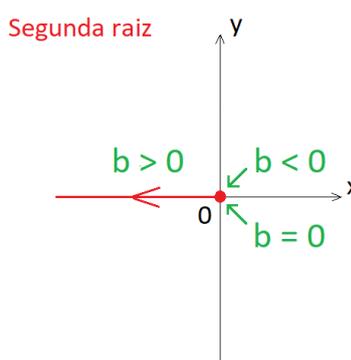


Figura 17: $a_0 > 0, c_0 = 0$

3.6 $a_0 < 0, c_0 = 0$

Solução: A prova é similar. Veja nas Figuras 18 e 19: cada ponto no eixo real é raiz de f_b para algum $b \in \mathbb{R}$; para $b = 0$ ambos os caminhos interceptam na origem (raiz dupla).

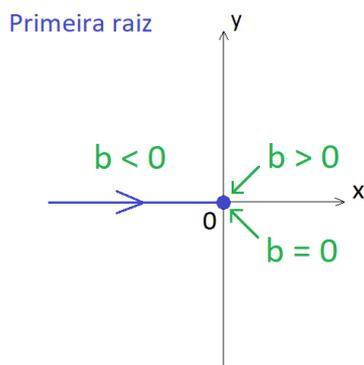


Figura 18: $a_0 < 0, c_0 = 0$

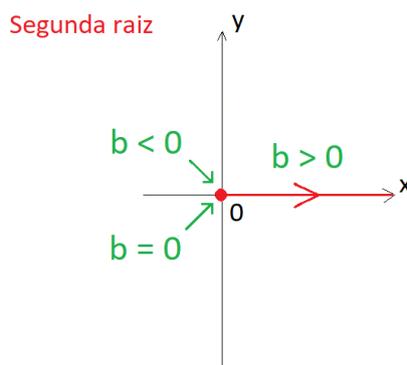


Figura 19: $a_0 < 0, c_0 = 0$

4 Terceiro caso

Estudaremos os seguintes seis subcasos:

4.1 $a_0 > 0, b_0 > 0$

Solução:

(a) $c < b_0^2/4a_0$

A primeira raiz é

$$x_1(c) = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c}}{2a_0} \in \mathbb{R}, \quad \forall c < b_0^2/4a_0,$$

e a sua primeira derivada é

$$x_1'(c) = -\frac{1}{\sqrt{b_0^2 - 4a_0c}} < 0, \quad \forall c < b_0^2/4a_0.$$

Note que $-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0c}$ e $2a_0$ são contínuas, $\forall c < b_0^2/4a_0$. Como $a_0 > 0$ então

$$x_1 \text{ é contínua e estritamente decrescente, } \forall c < b_0^2/4a_0. \quad (53)$$

Temos

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} x_1(c) = +\infty, \quad \lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}} x_1(c) = -\frac{b_0}{2a_0}. \quad (54)$$

A segunda raiz é

$$x_2(c) = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4a_0c}}{2a_0} \in \mathbb{R}, \quad \forall c < b_0^2/4a_0,$$

e a sua primeira derivada é

$$x_2'(c) = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 - 4a_0c}} > 0, \quad \forall c < b_0^2/4a_0.$$

Note que $-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4a_0c}$ e $2a_0$ são contínuas, $\forall c < b_0^2/4a_0$. Como $a_0 > 0$ então

$$x_2 \text{ é contínua e estritamente crescente, } \forall c < b_0^2/4a_0. \quad (55)$$

Temos

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} x_2(c) = -\infty, \quad \lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}} x_2(c) = -\frac{b_0}{2a_0}. \quad (56)$$

(b) $c = b_0^2/4a_0$

As fórmulas de $x_1(c)$ e $x_2(c)$ em (a) são válidas para $c = b_0^2/4a_0$: temos

$$x_1\left(\frac{b_0^2}{4a_0}\right) = x_2\left(\frac{b_0^2}{4a_0}\right) = -\frac{b_0}{2a_0}. \quad (57)$$

(c) $c > b_0^2/4a_0$

A primeira raiz é

$$z_1(c) = \underbrace{-\frac{b_0}{2a_0}}_{x_1} + \underbrace{\frac{\sqrt{4a_0c - b_0^2}}{2a_0}}_{Y_1} i, \quad \forall c > b_0^2/4a_0. \quad (58)$$

$$Y_1'(c) = \frac{1}{\sqrt{4a_0c - b_0^2}} > 0, \quad \forall c > b_0^2/4a_0.$$

Note que $\sqrt{4a_0c - b_0^2}$ e $2a_0$ são contínuas, $\forall c > b_0^2/4a_0$. Como $a_0 > 0$ então

$$Y_1 \text{ é contínua e estritamente crescente, } \forall c > b_0^2/4a_0. \quad (59)$$

Temos

$$\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^+} Y_1(c) = 0, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} Y_1(c) = +\infty. \quad (60)$$

Na Figura 20: A) traçamos o caminho da primeira raiz de (53), (54), (57), (58), (59) e (60); B) traçamos o caminho da segunda raiz de (55), (56), (57) e que para $c > b_0^2/4a_0$ a segunda raiz z_2 é o complexo conjugado de z_1 ; C) a primeira e a segunda raízes vêm no eixo real em sentidos opostos

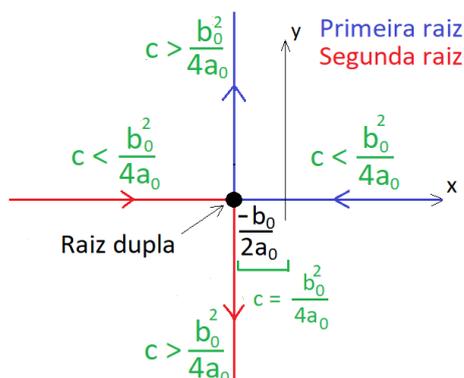


Figura 20: Raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$ ($a_0 > 0, b_0 > 0$)

e se encontram em $-b_0/2a_0$ (“ponto de colisão”) para $c = b_0^2/4a_0$, e então se separam e seguem perpendicularmente em pares conjugados complexos.

Por exemplo, se $f_c(z) = z^2 + 2z + c$, decida em quais pedaços dos caminhos a primeira e a segunda raízes estão localizadas, respectivamente, para: (i) $c = 2$; (ii) $c = 3$; (iii) $c = 1$; (iv) $c = -3$; (v) $c = -2$. Na Figura 21, desenhamos os pedaços dos caminhos rotulados de 1 a 5. Então, respondemos: (i) Rótulos 2 e 4; (ii) Rótulos 2 e 4, mas ambas as raízes mais distantes de $(-1, 0)$ do que para $c = 2$; (iii) Rótulo 5; (iv) Rótulos 1 e 3; (v) Rótulos 1 e 3, mas ambas as raízes mais próximas de $(-1, 0)$ do que para $c = -3$.

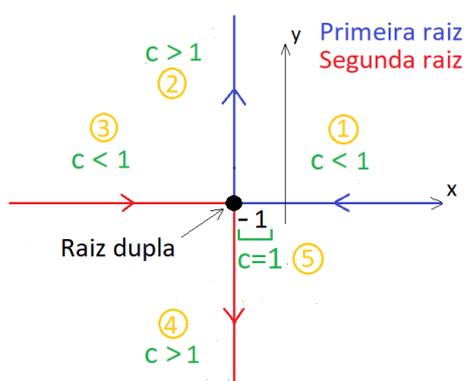


Figura 21: Raízes de $f_c(z) = z^2 + 2z + c$

4.2 $a_0 > 0, b_0 < 0$

Solução: A prova é similar.

4.3 $a_0 < 0, b_0 < 0$

Solução: A prova é similar.

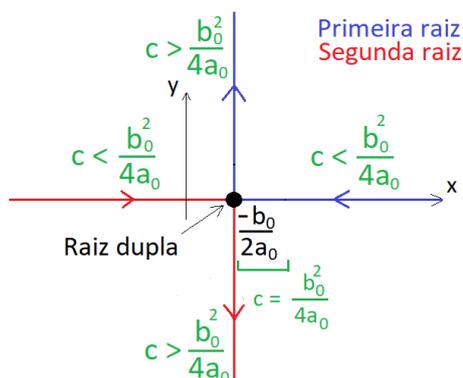


Figura 22: Raízes de $f_c(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c$ ($a_0 > 0, b_0 < 0$)

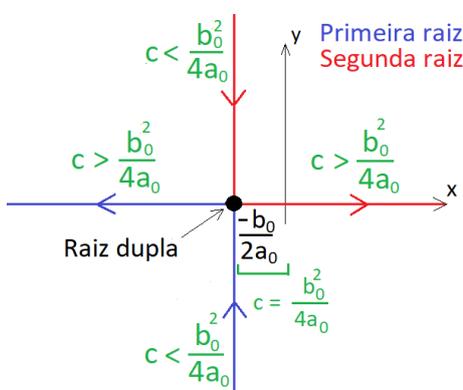


Figura 23: Raízes de $f_c(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c$ ($a_0 < 0, b_0 < 0$)

4.4 $a_0 < 0, b_0 > 0$

Solução: A prova é similar.

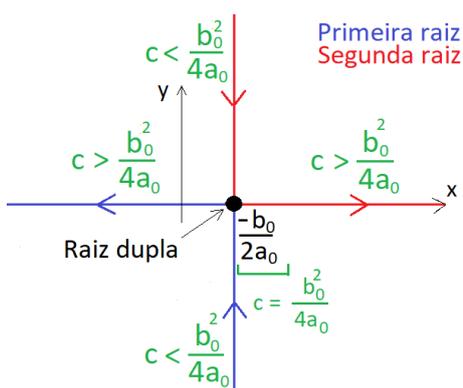


Figura 24: Raízes de $f_c(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c$ ($a_0 < 0, b_0 > 0$)

4.5 $a_0 > 0, b_0 = 0$

Solução: A prova é similar. Cada ponto no eixo imaginário é raiz de f_c para algum $c \geq 0$.

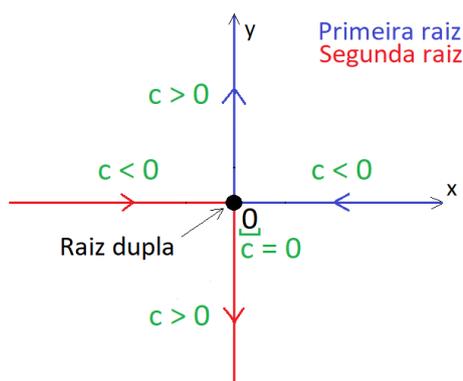


Figura 25: Raízes de $f_c(z) = a_0 z^2 + c$ ($a_0 > 0$)

4.6 $a_0 < 0, b_0 = 0$

Solução: A prova é similar. Cada ponto no eixo imaginário é raiz de f_c para algum $c \leq 0$.

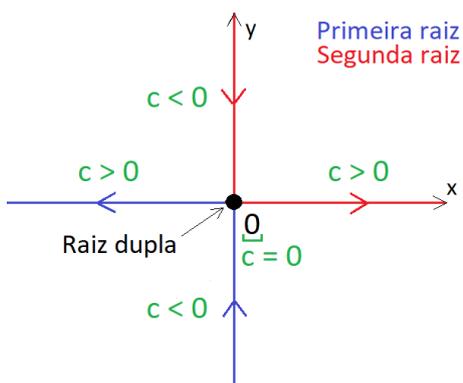


Figura 26: Raízes de $f_c(z) = a_0 z^2 + c$ ($a_0 < 0$)

Note nas Figuras 20, 22, 23, 24, 25 e 26: cada ponto no eixo real é raiz de f_c para algum $c \in \mathbb{R}$; o ponto de interseção de ambos os caminhos é a raiz dupla (“ponto de colisão” - veja Albin (2018) -).

5 Conclusões

1. Mapeamos todos os caminhos possíveis da primeira e da segunda raízes da função quadrática, fixando-se dois coeficientes reais e variando-se o coeficiente real remanescente.
2. As duas raízes cobrem:
 - Todo o eixo real (Figuras 8, 9, 16 e 17, 18 e 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26); ou
 - Todo o eixo real, com exceção do 0 (Figuras 6, 7, 11, 13, 14, 15); ou
 - Todo o eixo real, com exceção do 0 e do $-c_0/b_0$ (Figuras 1, 3, 4, 5); ou
 - Somente a origem (Figura 10).

Em 3., 4. e 5. abaixo nos referimos a cada intervalo aberto do coeficiente variável em verde especificado nas Figuras.

3. Nos subcasos que admitem raízes complexas não reais, para cada intervalo aberto do coeficiente variável para o qual a primeira e a segunda raízes são reais:
 - A primeira e a segunda raízes descrevem pedaços dos caminhos em sentidos opostos (Figuras 1, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 20, 22, 23, 24, 25, 26).
4. Nos subcasos que não admitem raízes complexas não reais, para cada intervalo aberto do coeficiente variável:
 - A primeira e a segunda raízes são zero (Figura 10); ou
 - A primeira (segunda) raiz é zero e o pedaço do caminho da segunda (primeira) raiz tem sentido único (Figuras 8, 9, 16 e 17, 18 e 19); ou
 - A primeira e a segunda raízes descrevem pedaços dos caminhos no mesmo sentido (ambas vão para a esquerda na Figura 14, ambas vão para a direita na Figura 15).
5. Nos subcasos que admitem primeira e segunda raízes que têm pedaços de caminhos em semicircunferências, para cada intervalo aberto do coeficiente variável para o qual a primeira e a segunda raízes são reais:
 - A primeira (segunda) raiz é um elemento de um intervalo finito e a segunda (primeira) raiz é um elemento de um intervalo infinito (Figuras 1, 3, 4, 5, 11, 13).
6. As raízes duplas aparecem em cinco situações:
 - A primeira e a segunda raízes vêm no eixo real em sentidos opostos, se encontram e então se separam e seguem em pares complexos conjugados (esta situação ocorre uma vez em cada um dos seguintes 7 subcasos: Figuras 1, 3, 11, 13, 20, 22, 25).
 - A primeira e a segunda raízes vêm em pares complexos conjugados, se encontram e então se separam e seguem em sentidos opostos no eixo real (esta situação ocorre uma vez em cada um dos seguintes 7 subcasos: Figuras 4, 5, 11, 13, 23, 24, 26).
 - A primeira raiz vem da direita para a esquerda no eixo real enquanto a segunda raiz está fixada na origem, elas se encontram na origem e então a primeira raiz agora fica fixada na origem enquanto a segunda raiz vai da direita para a esquerda no eixo real (esta situação ocorre no seguinte subcaso: Figuras 16 e 17).
 - A primeira raiz vem da esquerda para a direita no eixo real enquanto a segunda raiz está fixada na origem, elas se encontram na origem e então a primeira raiz agora fica fixada na origem enquanto a segunda raiz vai da esquerda para a direita no eixo real (esta situação ocorre no seguinte subcaso: Figuras 18 e 19).
 - A raiz dupla está fixada na origem (esta situação ocorre no seguinte subcaso: Figura 10).
7. Em cada subcaso, seja $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da primeira raiz em \mathbb{R}^2 e $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da segunda raiz em \mathbb{R}^2 . O(s) ponto(s) aderente(s) comum(ns) a G_1 e a G_2 é (são):

Primeiro caso:

 - $b_0 > 0, c_0 > 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$ e $(-2c_0/b_0, 0)$ [raiz dupla];

- $b_0 < 0, c_0 > 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$ e $(-2c_0/b_0, 0)$ [raiz dupla];
- $b_0 > 0, c_0 < 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$ e $(-2c_0/b_0, 0)$ [raiz dupla];
- $b_0 < 0, c_0 < 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$ e $(-2c_0/b_0, 0)$ [raiz dupla];
- $b_0 = 0, c_0 > 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 = 0, c_0 < 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 > 0, c_0 = 0$: $(0, 0) [\in G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 < 0, c_0 = 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \in G_2]$;
- $b_0 = 0, c_0 = 0$: $(0, 0)$ [raiz dupla];

Segundo caso (r.d.: raiz dupla):

- $a_0 > 0, c_0 > 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$, $(-\sqrt{c_0/a_0}, 0)$ [r.d.] , $(\sqrt{c_0/a_0}, 0)$ [r.d.];
- $a_0 < 0, c_0 < 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$, $(-\sqrt{c_0/a_0}, 0)$ [r.d.] , $(\sqrt{c_0/a_0}, 0)$ [r.d.];
- $a_0 > 0, c_0 < 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $a_0 < 0, c_0 > 0$: $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $a_0 > 0, c_0 = 0$: $(0, 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 < 0, c_0 = 0$: $(0, 0)$ [raiz dupla];

Terceiro caso:

- $a_0 > 0, b_0 > 0$: $(-b_0/(2a_0), 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 > 0, b_0 < 0$: $(-b_0/(2a_0), 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 < 0$: $(-b_0/(2a_0), 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 > 0$: $(-b_0/(2a_0), 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 > 0, b_0 = 0$: $(0, 0)$ [raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 = 0$: $(0, 0)$ [raiz dupla];

Conforme visto acima no primeiro, no segundo e no terceiro casos, para cada subcaso existe pelo menos um ponto P no eixo real tal que toda bola aberta em \mathbb{R}^2 com centro P contém algum ponto de G_1 e de G_2 , ou seja, P é um ponto aderente a G_1 e a G_2 , ou seja, $P \in \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$, onde $\overline{G_i}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a $G_i, i = 1, 2$, o que implica que a distância entre G_1 e G_2 é $d(G_1, G_2) = d(\overline{G_1}, \overline{G_2}) = 0$.

6 Bibliografia

ALBIN, N. **Math 340**: intro to bifurcation theory. [Manhattan, KS: Kansas State University], 2018. Disponível em:
https://www.math.ksu.edu/~albin/teaching/math340_fall2018/slides/03_bifurcations.html.
 Acesso em: 8 nov. 2022.

BEAUZAMY, B. How the roots of a polynomial vary with its coefficients: a local quantitative



result. **Canadian Mathematical Bulletin**, v. 42, n. 1, 3-12, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

GAUTSCHI, W. Questions of numerical condition related to polynomials. *In*: DE BOOR, C.; GOLUB, G. H. (ed.). **Recent advances in numerical analysis**. New York: Academic Press, 1978, p. 45-72.

LONG, C. A. A note on the geometry of zeros of polynomials. **Mathematics Magazine**, v. 44, n. 3, p. 157-159, 1971.

MARDEN, M. **Geometry of polynomials**. Providence: American Mathematical Society, 2005. (Mathematical surveys and monographs, n. 3).

MOSIER, R. G. Root neighborhoods of a polynomial. **Mathematics of Computation**, v. 47, n. 175, p. 265-273, 1986.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, 1958.

XU, J. Paths of real roots for odd-degree polynomials with parameters. **Abstract and Applied Analysis**, v. 2020, Article ID 4729872, 2020.