Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 23, n. 2, dez. 2023
Artigo de Iniciação Científica

Mateus Fernando Araújo Silva
Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
mateus.fernando@ufu.br

Francielle Rodrigues de Castro Coelho
Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
francielle@ufu.br

Alguns cálculos de ends de grupos

Some Group Ends Calculations

Resumo

A Teoria de Ends de Grupos é bastante relevante em Álgebra Homológica. Nesta área, o conceito de ends de grupos, definido algebricamente por Specker em 1950, está relacionado com a dimensão de um espaço quociente sobre $\mathbb{Z}_2$.
Neste trabalho, o principal objetivo é apresentar conceitos e resultados sobre ends de um grupo G, $e(G)$. Mais especificamente, calculamos o número de ends de grupos finitos, grupos cíclicos infinitos e grupos não enumeráveis.
Palavras-chave: Espaços Vetoriais sobre $\mathbb{Z}_2$. Ends de Grupos Finitos. Ends de Grupos Cíclicos Infinitos. Ends de Grupos não Enumeráveis.

Abstract

The Theory of Ends of Groups is very relevant in Homological Algebra. In this area, the concept of group ends, algebraically defined by Specker in 1950, is related to the dimension of a quotient space over $\mathbb{Z}_2$.
In this work, the main objective is to present concepts and results on ends of a group G, $e(G)$. More specifically, we compute the number of ends of finite groups, infinite cyclic groups, and uncountable groups.
Keywords: Vector Spaces over $\mathbb{Z}_2$. Ends of Finite Groups. Ends of Infinite Cyclic Groups. Ends of Uncountable Groups.

Artigo recebido em ago. 2023 e aceito em dez. 2023

1 Introdução

A Topologia Algébrica é uma área importante da Matemática na qual se resolvem problemas de Topologia com auxílio da Álgebra. Nesta área, a Álgebra Homológica (na qual se estuda o conceito de ends de grupos) se faz presente e tem bastante relevância.

A teoria de ends de grupos (mais precisamente, número de ends de um grupo) teve sua origem na teoria de ends de espaços topológicos devido a Freudenthal [1] e Hopf [2] que definiu o número de ends, $e(G)$, de um grupo finitamente gerado G, como sendo o número de ends de um espaço conveniente. Depois, em 1950, Specker [3], definiu de forma algébrica o número de ends de um grupo G qualquer.

O conjunto das partes de G, $P(G)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$, conforme mostraremos na seção 2. Ainda na seção 2, mediante tal estrutura, mostraremos que os conjuntos $F(G) = \{X \in P(G) \mid X \text{ é finito}\}$ e $Q(G) = \{X \in P(X) \mid X + gX \in F(G),\ \forall\ g \in G\}$ são subespaços vetoriais de $P(G)$, com $F(G)$ sendo um subespaço vetorial de $Q(G)$. Sendo assim, o conceito de ends de um grupo G, $e(G)$, é definido como sendo a dimensão do espaço quociente $Q(G)/F(G)$ sobre $\mathbb{Z}_2$, $e(G) = dim\ Q(G)/F(G)$.

Nas seções 3, 4 e 5, realizamos o cálculo do número de ends para grupos finitos, grupo cíclico infinito e grupos não enumeráveis, respectivamente.

Além das referências já citadas ([1], [2] e [3]), para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizadas as referências [4], [5] e [6].

2 Espaços vetoriais sobre $\mathbb{Z}_2$

Definição 1. *Um conjunto não vazio V é um* ***espaço vetorial sobre um corpo K*** *ou um* $K-$***espaço vetorial*** *(cujos elementos são denominados vetores), se estiverem definidas as seguintes duas operações:*

(A) *A cada par (u, v) de vetores de $V \times V$ se associa um vetor $u + v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que:*

(A_1) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$.

(A_2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$.

(A_3) *Exista um vetor em V, denominado vetor nulo e denotado por 0, tal que $0 + v = v$.*

(A_4) *Para cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$.*

(M) *A cada par (α, v) de vetores de $K \times V$ se associa um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado multiplicação por escalar de α por v, de modo que:*

(M_1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in K$ *e* $\forall v \in V$.

(M_2) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$ *(onde 1 é o escalar unidade de K).*

(M_3) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in K$ *e* $\forall u, v \in V$.

(M_4) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall \alpha, \beta \in K$ *e* $v \in V$.

Note que as condições A_1 a A_4 nos dizem que $(V, +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo 2. *Seja $A \neq \emptyset$ e consideremos $V = P(A) = \{X | X \subset A\}$. Podemos verificar que $(P(A), +)$ é um grupo abeliano (em que todo elemento não nulo tem ordem 2) com a operação diferença simétrica, isto é,*

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y),$$

que iremos indicar sempre aditivamente, ou seja, $X + Y = X \triangle Y$.

Considere a multiplicação por escalar $\mathbb{Z}_2 \times P(A) \to P(A)$ dada por $\overline{0} \cdot X = \emptyset$ e $\overline{1} \cdot X = X$. Esta multiplicação está bem definida e verifica os demais axiomas da definição de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Assim, $P(A)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$ para todo $A \neq \emptyset$. Em particular, se G é um grupo, $P(G)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$.

Este $\mathbb{Z}_2-$espaço vetorial será de fundamental importância na definição de ends de G.

Definição 3. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Um subconjunto W de V é um* ***subespaço vetorial de*** *V se:*

(i) $0 \in W$ (ou $W \neq \emptyset$);

(ii) $v, w \in W$ implica $av + bw \in W$ para todo $a, b \in K$.

Exemplo 4. *Sejam $A \neq \emptyset$ e $F(A) = \{X \in P(A) | \ X$ é finito$\}$, $F(A)$ é um subespaço do $\mathbb{Z}_2-$espaço vetorial $P(A)$ dado no exemplo 2.*

(i) O conjunto vazio é finito (com zero elemento) e assim pertence a $F(A)$.

(ii) $X, Y \in F(A)$, implica $a \cdot X + b \cdot Y \in F(A)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}_2$, pois

$a = \overline{0}, b = \overline{0} \Longrightarrow a \cdot X + b \cdot Y = \emptyset.$

$a = \overline{1}, b = \overline{0} \Longrightarrow a \cdot X + b \cdot Y = X.$

$a = \overline{0}, b = \overline{1} \Longrightarrow a \cdot X + b \cdot Y = Y.$

$a = \overline{1}, b = \overline{1} \Longrightarrow a \cdot X + b \cdot Y = X + Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \subset X \cup Y.$

Como $\emptyset$, X, Y e $X \cup Y$ são finitos, segue que $a \cdot X + b \cdot Y \in F(A)$.

Observação 5. *No exemplo anterior temos:*

- *Se A é finito então $F(A) = P(A)$.*
- *Se A é infinito então necessariamente $F(A) \neq P(A)$, pois $A \in P(A)$ e $A \notin F(A)$.*

Por exemplo, $\mathbb{Z} \in P(\mathbb{Z})$, mas $\mathbb{Z} \notin F(\mathbb{Z})$.

Exemplo 6. *Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Considere o $\mathbb{Z}_2-$espaço vetorial $P(G)$. Seja*

$$Q(G) = \{X \subset G | \ X + gX \in F(G), \forall g \in G\}.$$

Aqui, dado $g \in G, gX := \{g \cdot x | x \in X\}$, onde " $\cdot$ " indica a operação do grupo.

Observemos que:

- *$g(X \cup Y) = gX \cup gY$ (claro).*
- *$g(X \cap Y) = gX \cap gY$, pois $g \cdot x = g \cdot y \Longleftrightarrow g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot g \cdot y \Longleftrightarrow x = y$.*
- *$gX^c = (gX)^c$, pois $G = gG = g(X \cup X^c) = gX \cup gX^c$ e $\emptyset = g(X \cap X^c) = gX \cap gX^c$.*
- *$g(X+Y) = g[(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)] = g(X \cap Y^c) \cup g(X^c \cap Y) = [gX \cap (gY)^c] \cup [(gX)^c \cap gY] = gX + gY$.*

Agora, mostremos que $Q(G)$ é um subespaço vetorial de $P(G)$. De fato,

- *$Q(G) \neq \emptyset$, pois $\emptyset \in Q(G)$.*
- *$\forall X, Y \in Q(G), (X + Y) + g(X + Y) = X + Y + gX + gY = (X + gX) + (Y + gY) \in F(G)$. Logo, $X + Y \in Q(G)$.*
- *$\forall k \in \mathbb{Z}_2$ e $\forall X \in Q(G), k \cdot X \in Q(G)$ pois $\overline{0} \cdot X + g(\overline{0} \cdot X) = \emptyset \in F(G)$ e $\overline{1} \cdot X + g(\overline{1} \cdot X) = X + gX \in F(G)$.*

Observação 7. *Se $X \in F(G)$ então $X + gX$ será finito, para todo $g \in G$. Daí, $X \in Q(G)$, isto é, $F(G) \subset Q(G)$. Além disso, $F(G)$ é um subespaço vetorial de $Q(G)$.*

Observação 8. *No caso em que G é finito temos que $P(G) = F(G) = Q(G)$.*

3 Definição de número de ends de grupo e o seu cálculo para grupos finitos

Dado um grupo G, vimos nos exemplos 2, 4 e 6 que $P(G) = \{A |\, A \subset G\}$ é um $\mathbb{Z}_2-$espaço vetorial, $F(G) = \{A \in P(G) |\, A$ é finito$\}$ e $Q(G) = \{A \in P(G) |\, \forall g \in G, A + gA \in F(G)\}$ são $\mathbb{Z}_2-$subespaços vetoriais de $P(G)$, onde $A+B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (diferença simétrica) e $\overline{0} \cdot A = \emptyset$, $\overline{1} \cdot A = A, \forall A, B \subset G$.

Definição 9. *Dado um grupo G, o número de ends de G, denotado por $e(G)$, é definido por $e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(Q(G)/F(G))$, que denotamos apenas por $dim(Q(G)/F(G))$.*

Proposição 10. *Seja G um grupo.*
(i) Se G é infinito, então $\overline{\emptyset}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em $Q(G)/F(G)$ e portanto, $e(G) \geq 1$.
(ii) G é finito se, e somente se, $e(G) = 0$.
(iii) $e(G) \geq 2$ se, e somente se, existe $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$. Neste caso, $\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^c}, \overline{G}$ são elementos distintos em $Q(G)/F(G)$.
(iv) $e(G) = 2$ se, e somente se, existe $\overline{A}$ como em (iii) tal que para qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$, $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$.

Demonstração. (i) Dado um grupo G, temos que $G \in Q(G)$, pois para qualquer $g \in G, G + gG = G + G = \emptyset \in F(G)$. Assim, $\overline{G} \in Q(G)/F(G)$.

Agora, como G é infinito segue que $G \notin F(G)$. Logo, $G + F(G) \neq \emptyset + F(G)$ e então $\overline{G} \neq \overline{\emptyset}$. Portanto, $e(G) = dim(Q(G)/F(G)) \geq 1$.

(ii) Como G é finito, temos que $P(G) = F(G) = Q(G)$. Consequentemente, $e(G) = dim(Q(G)/F(G)) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que G seja infinito. Então, por (i), temos que $e(G) \geq 1$, o que contradiz a hipótese. Portanto, G é finito.

(iii) Claramente, $e(G) \geq 2$ se, e somente se, existe $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$. Neste caso, considerando um tal A, temos:

• $\forall g \in G, A^c + gA^c = (A^c \cap (gA^c)^c) \cup (A \cap (gA^c)) = (A^c \cap gA) \cup (A \cap (gA)^c) = A + gA \in F(G)$ pois $A \in Q(G)$. Daí, $\overline{A^c} \in Q(G)/F(G)$.

• $\overline{A^c} \neq \overline{A}$. De fato, se $\overline{A^c} = \overline{A}$ então $A^c + A = G \in F(G)$, o que é uma contradição, pois G é infinito.

• $\overline{A^c} \neq \overline{\emptyset}$, pois como $\overline{A} \neq \overline{G}$ segue que $A^c = A + G \notin F(G)$.

• $\overline{A^c} \neq \overline{G}$ pois se $\overline{A^c} = \overline{G}$ então $A^c + G = A \in F(G)$, o que é um absurdo, já que A é infinito.

Logo, $\{\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^c}, \overline{G}\} \subset Q(G)/F(G)$ e como $\{\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^c}, \overline{G}\} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ segue que $e(G) \geq 2$.

(iv) Consequência imediata de (iii). □

Exemplo 11. *Temos que $e(\mathbb{Z}_n) = 0, e(S_3) = 0$ e $e(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6) = 0$ pois $\mathbb{Z}_n, S_3$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ são finitos. Agora, como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ são infinitos segue que $e(\mathbb{Z}) \geq 1$ e $e(\mathbb{R}) \geq 1$.*

Observação 12. *$e(G)$ é um invariante algébrico, isto é, se $G_1 \cong G_2$ (grupos isomorfos) então $e(G_1) = e(G_2)$ pois se $G_1 \cong G_2$, então $Q(G_1)/F(G_1) \cong Q(G_2)/F(G_2)$ como $\mathbb{Z}_2-$espaços vetoriais.*

4 Cálculo do número de ends do grupo cíclico infinito

Teorema 13. *Se G é o grupo cíclico infinito, isto é, $G = [a] \cong \mathbb{Z}$, então $e(G) = 2$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 10, basta mostrar que existe $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$, e para qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$, $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ temos que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$. Para isso, seja $A = \{a^n | \, n > 0\} \subset G$. Assim,

• $\overline{A} \in Q(G)/F(G)$, pois para todo $g = a^k \in G$, $gA = \{a^{k+n} | \, n > 0\}$ e $(A \cap (gA^c)) \cup (A^c \cap gA)$ é finito (observe que para $k > 0$, $A \cap gA^c = \{a, ..., a^k\}$ e $A^c \cap gA = \emptyset$; para $k < 0$, $A \cap gA^c = \emptyset$ e $A^c \cap gA = \{a^{k+1}, a^{k+2}, ..., a^0\}$; para $k = 0$, $g = 1$ e $A + A = \emptyset$).

• $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ pois $A \notin F(G)$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$ pois $A^c \notin F(G)$.

Agora provemos a seguinte afirmação:

Se $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ então para quase todo n (isto é, exceto um número finito $n_1, ..., n_r$) $a^n \in B$ implica que $a^{n-1} \in B$.

De fato, se $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ então $B \in Q(G)$ e assim, para todo $g \in G$, $B + gB \in F(G)$, ou seja, $\overline{gB} = \overline{B}$. Em particular, para $g = a$. Suponhamos que existam infinitos n's tais que:

(1) $a^n \in B$ e $a^{n+1} \notin B$ ou

(2) $a^n \in B$ e $a^{n-1} \notin B$ (equivalentemente, $a^n \notin aB$).

Então existiriam infinitos n's tais que:

(1) $a^{n+1} = aa^n \in aB$ (pois $a^n \in B$) e $a^{n+1} \notin B$, logo, $a^{n+1} \in aB \cap B^c$ ou

(2) $a^n = aa^{n-1} \notin aB$ (pois $a^{n-1} \notin B$) e $a^n \in B$, logo, $a^n \in (aB)^c \cap B$.

Assim, $aB+B = ((aB) \cap B^c) \cup ((aB)^c \cap B)$ seria infinito, isto é, $B \notin Q(G)$ e daí $\overline{B} \notin Q(G)/F(G)$, o que é uma contradição.

Portanto, a afirmação acima é verdadeira e note que ela nos diz que pode existir apenas um número finito de elementos de B que satisfaz: $a^n \in B$ mas $a^{n+1} \notin B$ ou $a^{n-1} \notin B$. Em particular, isto obviamente é verdadeiro se B é finito (assim o caso de interesse é quando B é infinito) e também é verdadeiro para $B = A = \{a^n | \, n > 0\}$ pois apenas para $n = 1$ tem-se que $a^n \in B$ mas $a^{n-1} \notin B$. Para $n \geq 2$, $a^n \in B$ e temos $a^{n+1} \in B$ e $a^{n-1} \in B$.

Agora, dado $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ e A como acima, temos as quatro seguintes possibilidades para os conjuntos $B \cap A$ e $B \cap A^c$:

(i) $B \cap A$ finito e $B \cap A^c$ finito.

Isso implica em B ser finito pois $B = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$.

Logo, $\overline{B} = \overline{\emptyset}$.

(ii) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^c$ infinito.

Do fato de $B \cap A$ ser infinito obtemos que B é infinito e da afirmação anterior segue que existe um inteiro positivo m_1 tal que $a^n \in B \cap A$, $\forall n > m_1$. Para ver isto, tome $m_0 = max\{n_1, ..., n_r\}$ onde $n_1, ..., n_r$ são os inteiros dados na afirmação. Como $B \cap A$ é infinito, $\exists m_1 > m_0$, $m_1 > 0$ tal que $a^{m_1} \in B \cap A$ e como $m_1 \neq n_i$, $i = 1, ..., r$, então $a^{m_1+1}, a^{m_1+2}, ... \in B \cap A$, isto é, $a^m \in B \cap A$, $\forall m > m_1$. Consequentemente, $A \cap B^c \subset \{a^k | \, 0 \leq k \leq m_1\}$ e portanto, é finito.

Analogamente, usando que $B \cap A^c$ é infinito e a afirmação anterior, temos que existe um inteiro m_2 tal que $a^n \in B \cap A^c$, $\forall n > m_2$. Tome $m_0 = min\{n_1, ..., n_r\}$. Como $B \cap A^c$ é infinito, $\exists m_2 < m_0$, $m_2 < 0$ tal que $a^{m_2} \in B \cap A^c$ e tem-se $a^m \in B \cap A^c$, $\forall m < m_2$. Daí, $A^c \cap B^c \subset \{a^k | \, m_2 \leq k \leq 0\}$ e portanto, é finito.

Logo, $B^c = B^c \cap (A \cup A^c) = (B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c)$ é finito.

Assim, $\overline{B^c} = \overline{\emptyset}$, ou equivalentemente, $\overline{B} = \overline{G}$.

(iii) $B \cap A$ finito e $B \cap A^c$ infinito.

Como vimos em (ii), $B \cap A^c$ infinito implica em $A^c \cap B^c$ finito.

Logo, $B + A^c = (B \cap A) \cup (B^c \cap A^c)$ é finito e portanto, $\overline{B} = \overline{A^c}$.
(iv) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^c$ finito.
Conforme vimos em (ii), $B \cap A$ infinito implica em $A \cap B^c$ finito.
Assim, $B + A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)$ é finito. Logo, $\overline{B} = \overline{A}$.
Daí, dado qualquer $\overline{B} \in Q(G)/F(G)$ com $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^c}$.
Portanto, $e(G) = 2$. □

Observação 14. *Em particular, quando $G = \mathbb{Z}$, o conjunto dado na demonstração do teorema anterior é $A = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^*$, $A^c = \{..., -2, -1, 0\}$, $Q(\mathbb{Z})/F(\mathbb{Z}) = \{\overline{\emptyset}, \overline{\mathbb{Z}}, \overline{A}, \overline{A^c}\}$ e uma base para $Q(\mathbb{Z})/F(\mathbb{Z})$ é $\{\overline{A}, \overline{A^c}\}$.*

5 Cálculo do número de ends de um grupo não enumerável

Apresentamos aqui alguns conceitos e resultados sobre enumerabilidade que serão importantes para a demonstração do principal teorema desta subseção (Teorema 35, sobre o número de ends de um grupo não enumerável).

Definição 15. *Dois conjuntos A e B são ditos equivalentes ou equipotentes (mesma potência) se existe uma função bijetora de A em B.*

Notação: $A \approx B$.

Observação 16. *A relação de equipotência definida anteriormente é de equivalência.*

Definição 17. *Usando o conceito anterior, temos que um conjunto A é finito se $A = \emptyset$ ou, em caso contrário, se existir $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $A \approx \{1, 2, ..., n\}$. Se A não é um conjunto finito, então A é dito infinito, ou seja, A não é equipotente a nenhum dos subconjuntos $\{1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N}^*$.*

Os seguintes resultados decorrem diretamente da definição dada anteriormente:
• Se $A \subset U$ é finito e $x \in U - A$, então $A \cup \{x\}$ também é finito.
• Se A é um conjunto infinito, então $A - \{x\}$ também é infinito, para qualquer que seja $x \in A$.

Observação 18. *Dois conjuntos finitos são equipotentes se, e somente se, eles têm o mesmo número de elementos.*

Definição 19. *Seja A um conjunto. A diz-se enumerável se A é equipotente a algum subconjunto de $\mathbb{N}^*$, isto é, se $A \approx L \subset \mathbb{N}^*$.*

Exemplo 20. *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato,*
• *$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}^*$, pois $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ dada por $f(n) = n + 1$ é bijetora.*
• *$\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$, pois $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = \begin{cases} 2n, & se \quad n \geq 0 \\ -2n - 1, & se \quad n < 0 \end{cases}$ é bijetora*
Daí, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}^*$ e portanto, $\mathbb{Z}$ é enumerável. Em particular, todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Daremos a seguir a definição de partição em um conjunto que nos será útil na demonstração do Teorema 24.

Definição 21. *Dado um conjunto A, uma **partição** em A é uma família $(A_i)_{i \in I}$ (onde I é o conjunto de índices) de subconjuntos de A tais que:*
(i) $A_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$;
(ii) $\bigcup A_i = A$;
(iii) $\forall A_i, A_j \in (A_i)_{i \in I}$, vale uma, e só, das igualdades: $A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Teorema 22. *Um conjunto A é enumerável se, e somente se, existe $L \subset \mathbb{N}^*$ e existe $f : L \longrightarrow A$ aplicação sobrejetora.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Por hipótese, A é enumerável e então existem $L \subset \mathbb{N}^*$ e $f : L \longrightarrow A$ tal que f é bijetora. Portanto, f é sobrejetora.

($\Longleftarrow$) Seja $f : L \longrightarrow A$ sobrejetora. Para cada $a \in A$, seja $L_a = \{x \in L | \, f(x) = a\}$. Considere $(L_a)_{a \in A}$ uma partição de L e $M \subset L$ um subconjunto que contém um único elemento de cada $L_a, a \in A$.

Assim, temos que $f|M : M \longrightarrow A$ é bijetora e como $M \subset L \subset \mathbb{N}^*$ segue que A é enumerável. □

Lema 23. *Se existe $f : A \longrightarrow B$ sobrejetora e A é enumerável, então B também é enumerável.*

Demonstração. Como A é enumerável, segue que existem $M \subset \mathbb{N}^*$ e $g : M \longrightarrow A$ sobrejetora. Então, $f \circ g : M \longrightarrow B$ é sobrejetora pois é a composta de duas funções sobrejetoras.

Logo, pelo teorema anterior, podemos concluir que B é enumerável. □

Teorema 24. (i) *Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.*

(ii) *Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. (i) Sejam A um conjunto infinito e $x_1 \in A$. Consideremos a partição de A formada por $\{x_1\}$ e $A - \{x_1\}$. Como os conjuntos $\{x_1\}$ e $A - \{x_1\}$ são não-vazios e disjuntos, pelo Axioma da escolha (Munkres, p. 59) existe o subconjunto $\{x_1, x_2\} \subset A$, onde $x_2 \in A - \{x_1\}$, ou seja, $x_1 \neq x_2$.

Agora, consideremos a partição de A formada por $\{x_1\}, \{x_2\}$ e $A - \{x_1, x_2\}$, novamente, pelo Axioma da escolha, podemos garantir que existe o subconjunto $\{x_1, x_2, x_3\} \subset A$, onde $x_3 \in A - \{x_1, x_2\}$, ou seja, $x_3 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_2$.

E assim, sucessivamente, usando o raciocínio acima, obtemos o subconjunto $E = \{x_1, x_2, ...\}$ que é enumerável.

(ii) Sejam A um conjunto enumerável, B um subconjunto infinito de A e fixemos $b \in B$.

A aplicação $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = x, \forall x \in B$, e $f(x) = b, \forall x \in A - B$, é sobrejetora.

Portanto, pelo lema anterior, como A é enumerável e f é sobrejetora temos que B também é enumerável. □

Observação 25. *Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são enumeráveis, então $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ também é enumerável. Mais geralmente, se $A_1, A_2, ...$ são subconjuntos enumeráveis de um mesmo conjunto U, então $A = A_1 \cup A_2 \cup ...$ também é enumerável.*

Observação 26. *Se A e B são enumeráveis então $A \times B$ também é enumerável.*

Proposição 27. *Sejam G um grupo e H_1 e H_2 subconjuntos de G. Se H_1 e H_2 são enumeráveis, então $H_1 \cdot H_2$ é enumerável, onde $H_1 \cdot H_2 = \{h_1 \cdot h_2 | \, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$.*

Demonstração. Como H_1 e H_2 são enumeráveis então $H_1 \times H_2$ é enumerável.

Seja $\varphi : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_1 \cdot H_2$ tal que $\varphi(h_1, h_2) = h_1 \cdot h_2$. Temos que φ é sobrejetora, pois para qualquer $y \in H_1 \cdot H_2, y = h_1 \cdot h_2 = \varphi(h_1, h_2)$, para algum $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$.

Logo, pelo Lema 23 segue que $H_1 \cdot H_2$ é enumerável. □

Corolário 28. *Sejam G um grupo e $H_1, ..., H_n$ subconjuntos de $G, n \geq 2$. Se $H_1, ..., H_n$ são enumeráveis, então $H_1 \cdot ... \cdot H_n$ é enumerável.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre n.

Para $n = 2$, foi provado na proposição anterior.

Suponhamos a afirmação verdadeira para $n = k$, ou seja, se $H_1, ..., H_k$ são enumeráveis, então $H_1 \cdot ... \cdot H_k$ é enumerável.

Agora, sejam $H_1, ..., H_k, H_{k+1}$ subconjuntos de G enumeráveis. Assim,

$$H_1 \cdot ... \cdot H_k \cdot H_{k+1} = (H_1 \cdot ... \cdot H_k) \cdot H_{k+1}.$$

Mas, por hipótese de indução, $H_1 \cdot ... \cdot H_k$ é enumerável. Daí, pela proposição anterior, $H_1 \cdot ... \cdot H_k \cdot H_{k+1}$ é enumerável. □

Proposição 29. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é enumerável.*

Demonstração. Sejam $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b}, a, b > 0, a, b \in \mathbb{N} | \, mdc(a, b) = 1\}$ e $\mathbb{Q}^- = \{-x | \, x \in \mathbb{Q}^+\}$. É claro que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Temos que os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ são enumeráveis. Se identificarmos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ com $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos uma bijeção de $\mathbb{Q}^+$ em um subconjunto infinito T de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como todo subconjunto infinito de conjunto enumerável é enumerável (Teorema 24 (ii)), segue que T, e portanto $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ uma enumeração de $\mathbb{Q}^+$. Então, considerando $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, dada por $h(x) = -x$, tem-se que $h \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^-$ enumera $\mathbb{Q}^-$.

Sendo $\mathbb{Q}$ a união de três conjuntos enumeráveis, temos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável. □

Nem todos os conjuntos são enumeráveis. Veremos alguns exemplos de conjuntos não enumeráveis. Para tanto, necessitamos da seguinte propriedade do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais:

Princípio dos Intervalos Encaixantes: Sejam $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], ...$ tais que $I_1 \supset I_2 \supset ...$. Então existe ao menos um ponto comum a todos esses intervalos.

De fato, da hipótese $I_1 \supset I_2 \supset ...$ decorre que $a_1 \leq a_2 \leq ...$ e $b_1 \geq b_2 \geq ...$

Como $m \leq n$ implica $a_m \leq a_n \leq b_n$ e $n < m$ implica $a_m < b_m \leq b_n$, então $a_m < b_n$, para quaisquer índices m e n. Logo, cada b_m é um limite superior de $A = \{a_1, a_2, ...\}$ e portanto existe em $\mathbb{R}$ o elemento $S = sup(A)$. Assim, para cada índice m teremos $a_m \leq S$ pois $S = sup(A)$ e $S \leq b_m$ pois cada b_m é um limite superior de A. Daí, $a_m \leq S \leq b_m$, para todo índice $m \geq 1$, o que prova nossa afirmação.

Proposição 30. *O intervalo $I = [0, 1]$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que I seja enumerável, ou seja, $I = \{x_1, x_2, ...\}$. Consideremos I dividido em três subintervalos de mesma amplitude:

$$\left[\ 0, \tfrac{1}{3}\ \right] \cup \left[\ \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\ \right] \cup \left[\ \tfrac{2}{3}, 0\ \right]$$

e seja I_1 o primeiro desses intervalos, na ordem que foram escritos, que não contém x_1.

Façamos o mesmo tipo de subdivisão em I_1 e seja I_2 o primeiro dos subintervalos de I_1 (pelo mesmo critério anterior de ordenação) que não contém x_2. A repetição desse raciocínio dará origem a uma sequência $I_1 \supset I_2 \supset ...$ de intervalos fechados.

Pela propriedade do Princípio dos Intervalos Encaixantes, existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cap I_2 \cap ...$ e portanto $x \neq x_i$, para todo x_i. Mas isto é impossível, uma vez que $x \in I$.

Logo, I não é enumerável. □

Corolário 31. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Se $\mathbb{R}$ fosse enumerável, então I também teria que ser, uma vez que $I \subset \mathbb{R}$. $\square$

Corolário 32. *O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais não é enumerável.*

Demonstração. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ fosse enumerável, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ também seria já que $\mathbb{Q}$ é enumerável, o que é uma contradição em vista do corolário anterior. $\square$

Corolário 33. $S^1 = \{cost + isent | t \in \mathbb{R}\}$ *é um conjunto não enumerável.*

Demonstração. Basta lembrarmos que $[0,1[$ é não enumerável e $\varphi : [0,1[\to S^1$ tal que $\varphi(x) = cos(2\pi x) + isen(2\pi x)$ é uma aplicação bijetora. $\square$

Lema 34. *Sejam G um grupo e H um subconjunto de G tal que $H \in Q(G)$ e $H \notin F(G)$. Então,*
(i) H gera G.
(ii) Se H é enumerável, então G é enumerável.

Demonstração. (i) Dado $g \in G$, como $H \in Q(G)$ temos que $gH + H \in F(G)$, ou seja, $(gH \cap H^c) \cup ((gH)^c \cap H)$ é finito. Daí, $gH \cap H^c$ e $(gH)^c \cap H$ são finitos.

Agora, $gH = gH \cap G = gH \cap (H \cup H^c) = (gH \cap H) \cup (gH \cap H^c)$ e como gH é infinito (pois H é infinito) e $gH \cap H^c$ é finito, segue que $gH \cap H$ é infinito (portanto não vazio).

Assim, existe $h_0 \in gH \cap H$, isto é, $h_0 = gh_1$, com $h_1 \in H$, ou seja, $g = h_0 h_1^{-1}$.

Logo, $g \in [H]$ e portanto $G = [H]$.

(ii) Para qualquer $g \in G$, como $G = [H]$, $g = l_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot l_k^{\varepsilon_k}, l_i \in H, \varepsilon_i = 1$ ou $\varepsilon_i = -1$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, seja $G_k = \{h_0^{\varepsilon_0} \cdot \ldots \cdot h_k^{\varepsilon_k} | \, h_i \in H$ e $\varepsilon_i \in \{1, -1\}\}$. Assim, $G_k = (H \cup H^{-1}) \cdot \ldots \cdot (H \cup H^{-1})$ e pelo Corolário 28, temos que G_k é enumerável.

Agora, como $G = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$, segue da Observação 25 que G é enumerável. $\square$

Teorema 35. *Seja G um grupo não enumerável.*
(i) Então $e(G) = 1$ ou $e(G) = \infty$.
(ii) Se G também for abeliano, então $e(G) = 1$.

Demonstração. (i) Como G não é enumerável, então G não é finito. Assim, $e(G) \neq 0$ e portanto $e(G) \geq 1$.

Se $e(G) = 1$, não há nada a demonstrar. Neste caso, como G é infinito, teremos só os elementos $\overline{\emptyset}$ e $\overline{G}$ distintos em $Q(G)/F(G)$.

Suponhamos $e(G) > 1$ e mostremos que $e(G) = \infty$.

Como $e(G) > 1$, pela Proposição 10 (iii), existe $\overline{H} \in Q(G)/F(G)$ (portanto, H é subconjunto de G com $H \in Q(G)$) tal que $\overline{H} \neq \overline{\emptyset}, \overline{H} \neq \overline{G}$ e $\overline{\emptyset}, \overline{H}, \overline{H^c}, \overline{G}$ são elementos distintos em $Q(G)/F(G)$. Daí, $H \notin F(G), H \neq G$ e $H^c \notin F(G)$.

Agora, provemos a seguinte afirmação:

Para tal H, existem subconjuntos H_1 e H_2 de G tais que $H_1 \cup H_2 = H, H_1 \cap H_2 = \emptyset, H_1, H_2 \in Q(G)$ e são infinitos.

De fato, como H e H^c são infinitos, podemos considerar $C_1 \subset H, C_2 \subset H^c$ tais que C_1, C_2 são enumeráveis infinitos. Então $C = C_1 \cup C_2$ é enumerável infinito e existe uma bijeção entre $\mathbb{N}^*$ e C. Assim, $C = \{c_i | \, i \in \mathbb{N}^*\}$.

Temos que $H \cap C^{-1} H^c$ é enumerável pois:

(1) Como $H \in Q(G)$, $(H \cap gH^c) \cup (H^c \cap gH)$ é finito, $\forall g \in G$. Daí, $H \cap gH^c$ e $H^c \cap gH$ são finitos para qualquer $g \in G$. Em particular, para $g = c_i^{-1}$, $H \cap c_i^{-1}H^c$ é finito.

(2) $H \cap C^{-1}H^c = H \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{c_i^{-1}\} \right) H^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} (H \cap c_i^{-1}H^c)$ (isto é, $H \cap C^{-1}H^c$ é uma reunião enumerável de conjuntos finitos e portanto enumerável).

Por outro lado, pelo lema anterior temos que H é não enumerável, pois se H fosse enumerável, como $H \in Q(G)$ e $H \notin F(G)$, G seria enumerável por (ii), o que contradiz a hipótese. Portanto, $H \cap C^{-1}H^c \subset H$ e $H \cap C^{-1}H^c \neq H$. Logo, existe $h_0 \in H$ tal que $h_0 \notin H \cap C^{-1}H^c$, ou seja, $h_0 \notin C^{-1}H^c$ e daí, $h_0 \notin c_i^{-1}H^c, \forall i \in \mathbb{N}^*$. Assim, $h_0 \in (c_i^{-1}H^c)^c = c_i^{-1}H, \forall i \in \mathbb{N}^*$ e então $h_0 = c_i^{-1}h_i, h_i \in H$. Daí, $c_i h_0 = h_i \in H, \forall i \in \mathbb{N}^*$ e portanto,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \{c_i\} h_0 = Ch_0 \subset H. \tag{1}$$

Tomemos $H_1 = H \cap Hh_0$ e $H_2 = H \cap H^c h_0$ e temos que:

- $H_1 \cup H_2 = (H \cap Hh_0) \cup (H \cap H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cup H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cup (Hh_0)^c) = H \cap G = H$.
- $H_1 \cap H_2 = (H \cap Hh_0) \cap (H \cap H^c h_0) = H \cap (Hh_0 \cap (Hh_0)^c) = H \cap \emptyset = \emptyset$.
- Dado $g \in G$,

$$\begin{aligned}
H_1 + gH_1 &= H \cap Hh_0 + g(H \cap Hh_0) \\
&= H \cap Hh_0 + (gH \cap gHh_0) \\
&= [(H \cap Hh_0) \cap (gH \cap gHh_0)^c] \cup [(H \cap Hh_0)^c \cap (gH \cap gHh_0)] \\
&= [(H \cap Hh_0) \cap (gH^c \cup gH^c h_0)] \cup [(H^c \cup H^c h_0) \cap (gH \cap gHh_0)] \\
&= [(H \cap Hh_0 \cap gH^c) \cup (H \cap Hh_0 \cap gH^c h_0)] \\
&\quad \cup [(H^c \cap gH \cap gHh_0) \cup (H^c h_0 \cap gH \cap gHh_0)] \\
&= [(H \cap gH^c) \cap Hh_0] \cup [H \cap (H \cap gH^c)h_0] \\
&\quad \cup [(H^c \cap gH) \cap gHh_0] \cup [(H^c \cap gH)h_0 \cap gH] \in F(G)
\end{aligned}$$

já que $H \cap gH^c \in F(G)$ e $H^c \cap gH \in F(G)$ pois $H \in Q(G)$. Portanto, $H_1 \in Q(G)$.

$$\begin{aligned}
H_2 + gH_2 &= H \cap H^c h_0 + g(H \cap H^c h_0) \\
&= [(H \cap H^c h_0) \cap (gH \cap gH^c h_0)^c] \cup [(H \cap H^c h_0)^c \cap (gH \cap gH^c h_0)] \\
&= [(H \cap H^c h_0) \cap (gH^c \cup gHh_0)] \cup [(H^c \cup Hh_0) \cap (gH \cap gH^c h_0)] \\
&= [(H \cap H^c h_0 \cap gH^c) \cup (H \cap H^c h_0 \cap gHh_0)] \\
&\quad \cup [(H^c \cap gH \cap gH^c h_0) \cup (Hh_0 \cap gH \cap gH^c h_0)] \\
&= [(H \cap gH^c) \cap H^c h_0] \cup [H \cap (H^c \cap gH)h_0] \\
&\quad \cup [(H^c \cap gH) \cap gH^c h_0] \cup [(H \cap gH^c)h_0 \cap gH] \in F(G)
\end{aligned}$$

já que $H \cap gH^c$ e $H^c \cap gH$ são finitos. Portanto, $H_2 \in Q(G)$.

- H_1 e H_2 são infinitos. De fato:

Temos que $C_1 h_0 \subset H_1 = H \cap Hh_0$ pois,

$$C_1 \subset C \Longrightarrow C_1 h_0 \subset Ch_0 \subset H \text{ (por 1) e } C_1 \subset H \Longrightarrow C_1 h_0 \subset Hh_0.$$

Logo, $C_1 h_0 \subset H \cap Hh_0 = H_1$.

Agora, temos que $C_2 h_0 \subset H_2 = H \cap H^c h_0$ pois,

$$C_2 \subset C \Longrightarrow C_2h_0 \subset Ch_0 \subset H \text{ (por 1) e } C_2 \subset H^c \Longrightarrow C_2h_0 \subset H^ch_0.$$

Assim, $C_2h_0 \subset H \cap H^ch_0 = H_2$.

Portanto, como C_1 e C_2 são infinitos segue que H_1 e H_2 são infinitos.

Com isso, a afirmação inicial está provada.

Agora, observe que:

- $\overline{H_1} \in Q(G)/F(G)$, pois $H_1 \in Q(G)$.
- $\overline{H_1} \neq \overline{\emptyset}$, pois H_1 é infinito.
- $\overline{H_1} \neq \overline{L}, \forall L$ com $H \subset L$ e $L \in Q(G)$, pois

$$\overline{H_1} = \overline{L} \Longrightarrow H_1 + L \in F(G).$$

Mas, $H_1 + L = (H_1 \cap L^c) \cup ((H_1)^c \cap L)$. Como $H_2 \subset H_1^c$ e $H_2 \subset H \subset L$, segue que $H_2 \subset H_1^c \cap L$. Agora, $H_1 \subset H$ e $H \subset L$ implica em $H_1 \cap L^c = \emptyset$. Daí, $H_1 + L = \emptyset \cup (H_1^c \cup L) \supset H_2$ que é infinito. Logo, $H_1 + L$ é infinito, o que contradiz a afirmação. Portanto, $\overline{H_1} \neq \overline{L}$.

Logo, $\overline{H_1} \in Q(G)/F(G)$ e $\overline{H_1} \notin \{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{H}\}$ e então os elementos de $\{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}\}$ são distintos.

Note que, como $\overline{H_1} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{H_1} \neq \overline{G}$, a afirmação inicial também é verdadeira para H_1 (no lugar de H), isto é, $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$ com $H_{11}, H_{12} \in Q(G)$, $H_{11} \cap H_{12} = \emptyset$ e H_{11}, H_{12} infinitos. Também conclui-se que $\overline{H_{11}} \in Q(G)/F(G)$ e $\overline{H_{11}} \notin \{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}\}$ pois H_{11} é infinito e $\overline{H_{11}} \neq \overline{L}, \forall L$ com $H_1 \subset L$, como vimos anteriormente.

Aplicando sucessivamente o mesmo processo obtemos uma sequência infinita de elementos distintos em $Q(G)/F(G)$, ou seja, $\{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{H_1}, \overline{H_{11}}, \overline{H_{111}}, ...\}$.

Logo, supondo $e(G) > 1$ obtemos que $e(G) = \infty$.

Portanto, $e(G) = 1$ ou $e(G) = \infty$.

(ii) Agora, suponhamos que G seja abeliano e $e(G) > 1$.

Se $e(G) > 1$ então teríamos como no caso (i), que o conjunto H_2 da construção anterior seria infinito, mas, por outro lado, temos que $H_2 = H \cap H^ch_0 = H \cap h_0H^c$ e como $H \in Q(G)$ segue que H_2 é finito, o que é uma contradição.

Portanto, no caso em que G é abeliano e não enumerável, teremos necessariamente $e(G) = 1$. □

Exemplo 36. *Se G é um dos seguintes grupos:* $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot), (S^1, \cdot), (S^1 \times S^1, \cdot), (\mathbb{R}[t], +)$*, onde* $\mathbb{R}[t]$ *é o anel dos polinômios com coeficientes em* $\mathbb{R}$*, então* $e(G) = 1$ *pois todos os grupos são abelianos não enumeráveis.*

Exemplo 37. $e(S_3 \times \mathbb{R}) = 1$ *ou* ∞ *pois* $S_3 \times \mathbb{R}$ *não é um grupo abeliano e é não enumerável (aqui* S_3 *indica o grupo das bijeções de* $\{1, 2, 3\}$*).*

Referências

[1] FREUDENTHAL, H. Uber die Enden diskreter Raume und Gruppen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 17, p. 1-38, 1944.

[2] HOPF, H. Enden offener raume and unendlicher diskontinuierliche gruppen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 16, p. 81-100, 1943.

[3] SPECKER, F. Endenverbande von Raume und Gruppen. **Mathematische Annalen**, v. 122, n. 2, p. 167-174, 1950.

[4] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018. (Coleção Matemática Universitária).

[5] SCOTT, G. P.; WALL, T. Topological methods in group theory. *In*: WALL, C. T. C. (ed.). **Homological group theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972. p. 167-174. (London Mathematical Society Lecture Note Series, 36).

[6] CIOCA, D. M. **Cohomologia e ends de grupos**. 1997. 150 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 1997.

[7] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.