

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Fabiana Correia Pereira

Imecc
Unicamp
f262293@dac.unicamp.br

João Socorro Pinheiro Ferreira

Imecc
Unicamp
j154174@dac.unicamp.br

Tomy Felixon

Imecc
Unicamp
t123735@dac.unicamp.br

Estudo analítico e geométrico de domínio numérico de matrizes

Analytical and geometric study of numerical domain of matrices

Resumo

O presente estudo tem como objetivo apresentar alguns resultados referentes ao domínio numérico de matrizes (campo de valores), abordando as principais propriedades e suas respectivas demonstrações, bem como a importância de sua representação gráfica no plano complexo e seu domínio elíptico, que revela informações valiosas sobre o comportamento dos autovalores da matriz e sua geometria associada. Para tanto, os resultados gráficos e computacionais são apresentados através de algoritmos implementados pelo programa Matlab, algoritmo proposto por Charles Johnson. Este estudo possibilitou a análise de uma diversidade de cenários, fornecendo uma compreensão sobre como as propriedades das matrizes impactam os seus domínios numéricos.

Palavras-chave: Domínio numérico; Autovalores; Algoritmo.

Abstract

The present study aims to present some results regarding the numerical domain of matrices (field of value), addressing the main properties and their respective demonstrations, as well as the importance of its graphical representation in the complex plane and its elliptical domain, which reveals valuable information about the behavior of eigenvalues. of the matrix and its associated geometry. To this end, the graphical and computational results are presented through algorithms implemented by the Matlab program, an algorithm proposed by Charles Johnson. This study enabled the analysis of a variety of scenarios, providing an understanding of how the properties of matrices impact their numerical domains.

Keywords: Numerical Domain; Eigenvalues; Algorithm



1 Introdução

O domínio numérico de uma matriz complexa, também conhecido como "campo de valores", constitui um conjunto de números complexos naturalmente associados a uma matriz $A : n \times n$, utilizado para estimar os autovalores máximos e mínimos de uma matriz hermitiana (ou simétrica) juntamente com seus respectivos autovetores [1, 2].

Segundo [1] como pode o campo de valores de uma matriz complexa arbitrária $n \times n$ ser determinada numericamente? Esta é uma questão a ser respondida em nosso trabalho.

De acordo com [2], assim como o espectro, o campo de valores é um conjunto que pode ser utilizado para extrair informações sobre a matriz e, frequentemente, oferece insights que o espectro isoladamente não proporciona. Os autovalores das matrizes hermitianas e normais apresentam propriedades especialmente interessantes, e o campo de valores captura certos aspectos dessa estrutura para matrizes em geral.

A análise do domínio numérico de matrizes complexas desempenha um papel crucial na compreensão e análise de diversas propriedades e aplicações. Algumas de suas propriedades fundamentais foram identificadas por Hausdorff e Toeplitz há mais de um século. Nas últimas décadas, o campo dos valores tem assumido uma importância crescente na análise numérica, especialmente em problemas de álgebra linear numérica que envolvem funções de matrizes e métodos iterativos para resolver sistemas de equações lineares extensos [3].

Neste trabalho, exploramos a geometria do domínio numérico como uma ferramenta poderosa para a análise de matrizes complexas e discutimos como a distribuição dos autovalores no plano complexo pode oferecer informações sobre máximos e mínimos, bem como sobre a delimitação do plano e sua direção.

Para isso, na Seção 2, apresentamos as principais definições e propriedades básicas usadas para plotar os domínios numéricos de matrizes. Para demonstrar essas propriedades, recorreremos às referências [1], [2], [4] e [5].

Na Seção 3, expomos os Resultados e as Discussões, acompanhados dos códigos-fonte e dos gráficos gerados. Nesta seção, aprofundamos certas propriedades e teoremas, distribuídos nas quatro Subseções: 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Para embasar essas demonstrações, além das referências já mencionadas ([1], [2] e [4]), recorreremos às fontes [6], [7] e [8].

2 Domínio numérico de matrizes

O domínio numérico de uma matriz é uma ferramenta importante na análise de operadores limitados em espaços de Hilbert complexos. Para uma matriz complexa A , o domínio numérico $W(A)$ é definido como a região no plano complexo formada pelos produtos internos $\langle x, Ax \rangle$, onde x percorre o espaço de Hilbert \mathcal{H} com $\|x\| = 1$.

Dado um operador limitado T em um espaço de Hilbert \mathcal{H} complexo, define-se seu domínio numérico (*numerical range, field of values*), ou domínio de Hausdorff, como sendo a região do plano complexo $W(T) \subset \mathbb{C}$ tal que [2]:

$$W(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \langle x, Tx \rangle, x \in \mathcal{H} \text{ com } \|x\| = 1\}. \quad (1)$$

Nosso interesse se concentrará no caso das transformações lineares definidas por matrizes com-

plexas $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, para as quais teremos:

$$W(A) = \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\}, \quad (2)$$

sendo $Z^\dagger = \overline{Z^T}$ o transposto conjugado matricial. Para mais detalhes sobre o domínio numérico, algumas de suas aplicações e problemas abertos, ver [2, 3].

2.1 Matriz normal

De acordo com [4], se A comuta com sua adjunta, $AA^\dagger = A^\dagger A$, então A é dita uma matriz normal. Em particular, as matrizes hermitianas ($A = A^\dagger$) e assimétricas hermitianas (anti-hermitiana: $A = -A^\dagger$) são normais. Qualquer matriz normal é diagonalizável e U pode ser escolhida como unitária. Por outro lado, se A pode ser decomposta como:

$$A = U\Lambda U^\dagger,$$

com $U^\dagger = U^{-1}$ e Λ diagonal, então Λ é normal já que $\Lambda\Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger\Lambda$ para qualquer matriz diagonal.

A análise de autovalor é particularmente útil para matrizes normais, pois elas podem ser diagonalizadas por uma matriz unitária. Uma matriz unitária U satisfaz $\|U\|_2 = \|U^{-1}\|_2 = 1$ e $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, e portanto, o comportamento das potências de A está intimamente relacionado com as potências dos autovalores, por exemplo. Matrizes não normais podem ser mais difíceis de analisar e, neste caso, estudar apenas os autovalores de A podem ser enganosos.

2.2 Propriedades básicas

Da definição (2), seguem, dentre outras, as seguintes propriedades elementares de $W(A)$. [1]

P1: Continência espectral. $\Lambda(A) \subset W(A)$, sendo $\Lambda(A)$ o espectro (complexo).

Isto é, os autovalores de uma matriz estão dentro de seu domínio numérico: $\Lambda(A) \subset W(A)$.

Para demonstrar que o espectro $\Lambda(A)$ de uma matriz A (que consiste nos autovalores complexos da matriz) está contido no invólucro convexo dos autovalores reais de A , denotado por $W(A)$, vamos as seguintes definições:

Definição 1 Definição do Espectro

O espectro de uma matriz A , denotado por $\Lambda(A)$, é o conjunto de todos os autovalores complexos de A , contabilizados com suas multiplicidades. [1, 5]

Definição 2 Invólucro Convexo

O invólucro convexo dos autovalores complexos de A , denotado por $W(A)$, é a menor região convexa que contém todos os autovalores complexos de A .

Demonstração 3 *Vamos assumir que λ é um autovalor complexo de A , o que significa que existe um vetor não nulo $Z \in \mathbb{C}^n$ tal que $AZ = \lambda Z$. Agora, vamos considerar a parte real de λ , que é $\Re(\lambda)$, a parte real de um número complexo é um número real.*

Agora, consideremos a matriz $B = A - \Re(\lambda)I$, onde I é a matriz identidade do mesmo tamanho que A . Em outras palavras, B é a matriz obtida subtraindo a parte real de λ de todos os elementos da diagonal de A . Observe que a matriz B ainda tem o autovalor complexo λ , mas com a parte real removida.

Agora, vamos considerar o invólucro convexo dos autovalores reais de B , denotado por $W(B)$. Como os autovalores de B são os mesmos de A , exceto pela remoção da parte real de λ , temos que $W(B)$ contém os autovalores reais de A .

Como $W(B)$ é o menor intervalo convexo que contém os autovalores reais de B , e $W(A)$ é o menor intervalo convexo que contém os autovalores reais de A , podemos concluir que $W(B) \subseteq W(A)$.

Agora, como λ é um autovalor de B (mesmo que a parte real de λ tenha sido removida), temos que $\Re(\lambda)$ também está contido em $W(B)$, e conseqüentemente em $W(A)$.

Portanto, a demonstração está concluída, mostrando que cada autovalor complexo λ de A (ou seja, pertencente ao espectro $\Lambda(A)$) possui sua parte real $\Re(\lambda)$ no invólucro convexo dos autovalores reais de A (ou seja, pertencente a $W(A)$). Isso pode ser escrito como $\Lambda(A) \subset W(A)$. ■

P2: Conjugado complexo. $W(A^\dagger) = \overline{W(A)}$.

Demonstração 4 Para demonstrar que $W(A^\dagger) = \overline{W(A)}$, onde A^\dagger representa o conjugado transposto (adjunto) da matriz A e $W(A)$ representa o espaço gerado pelas colunas de A , podemos utilizar as propriedades dos espaços vetoriais e as propriedades das operações de conjugado transposto e conjugado complexo.

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

Primeiro, mostraremos que $W(A^\dagger) \subseteq \overline{W(A)}$. Depois, mostraremos que $\overline{W(A)} \subseteq W(A^\dagger)$.

$$(i) \quad W(A^\dagger) \subseteq \overline{W(A)}$$

Seja $v \in W(A^\dagger)$.

Isso significa que v pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de A^\dagger .

$$v = A^\dagger Z, \text{ onde } Z \in \mathbb{C}^n$$

Sabemos que a matriz conjugado transposta A^\dagger é formada pelas conjugadas dos elementos da matriz A transposta. Portanto, o ij -ésimo elemento de A^\dagger , denotado por $(A^\dagger)_{ij}$, é a conjugada do ji -ésimo elemento de A , ou seja, $(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Assim, podemos expressar v como:

$$v = A^\dagger Z = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} & \cdots & \overline{A_{1n}} \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} & \cdots & \overline{A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A_{n1}} & \overline{A_{n2}} & \cdots & \overline{A_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \overline{A_{i1}} Z_i \\ \sum_{i=1}^n \overline{A_{i2}} Z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \overline{A_{in}} Z_i \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos observar o produto escalar entre v e cada uma das colunas de A . Tomemos a coluna j de A como A_j :

$$A_j = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{bmatrix}.$$

O produto escalar entre v e A_j é dado por:

$$\langle v, A_j \rangle = \sum_{i=1}^n (\overline{A_{ij}} x_i) = \overline{a_{1j}} x_1 + \overline{a_{2j}} x_2 + \cdots + \overline{a_{nj}} x_n.$$

Comparando esta expressão com a coluna j de v , vemos que o produto escalar entre v e A_j é igual ao j -ésimo componente de v . Portanto, o vetor v pode ser representado como uma combinação linear das colunas de A :

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v_j, A_j \rangle A_j = \sum_{j=1}^n (\overline{A_{1j}} x_1 + \overline{A_{2j}} x_2 + \cdots + \overline{A_{nj}} x_n) A_j.$$

Isso significa que $v \in W(A)$. Portanto, temos mostrado que $W(A^\dagger) \subseteq W(A)$.

(ii) $\overline{W(A)} \subseteq W(A^\dagger)$

Seja $w \in \overline{W(A)}$. Isso significa que w pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de A :

$$w = \sum_{j=1}^n c_j A_j, \quad \text{onde } c_j \in \mathbb{C} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Agora, vamos calcular o produto escalar entre w e a i -ésima linha de A^\dagger , denotada por $(A^\dagger)_{i^*}$:

$$\begin{aligned} \langle w, (A^\dagger)_{i^*} \rangle &= \sum_{j=1}^n c_j A_j^T \cdot (A^\dagger)_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j A_j^T \cdot \overline{A_{ji}} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \overline{(A_j^T \cdot A_{ji})} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \overline{(A_{ji}^T)} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \overline{A_{ij}}. \end{aligned}$$

A última igualdade se deve ao fato de que a transposta de um número complexo conjugado é o próprio número complexo.

Comparando o resultado acima com o i -ésimo componente de w , vemos que o produto escalar entre w e $(A^\dagger)_{i^*}$ é igual a esse componente. Portanto, w pode ser representado como uma combinação linear das linhas de A^\dagger :

$$w = \sum_{i=1}^m \langle w, (A^\dagger)_{ij} \rangle (A^\dagger)_{i^*} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_j \overline{A_{ij}} \right) (A^\dagger)_{i^*}.$$

Isso significa que $w \in W(A^\dagger)$. Portanto, $\overline{W(A)} \subseteq W(A^\dagger)$.

Tendo demonstrado as duas partes, podemos concluir que $W(A^\dagger) = \overline{W(A)}$.

Assim, mostramos que o espaço gerado pelas colunas de A^\dagger é o conjugado do espaço gerado pelas colunas de A , como queríamos. ■

P3: Subaditividade. $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$.

Se A e B são normais (cf. 2.1), então muito pode ser dito sobre o autovalor de $A + B$, por exemplo, $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ neste caso. Somas de matrizes surgem na prática, e a propriedade relevantes do *field of values* $W(A)$ é: o domínio numérico é subaditivo:

$$(A + B) \subseteq W(A) + W(B), \quad (3)$$

No qual o conjunto soma tem a definição natural de somas de todos os pares possíveis elemento a elemento.

Demonstração 5 Para todo A e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e a Equação (3), substituir $(A + B)$ em (2):

$$\begin{aligned} W(A + B) &= \left\{ \frac{Z^\dagger(A + B)Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= \left\{ \frac{(Z^\dagger A + Z^\dagger B)Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ + Z^\dagger BZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} + \frac{Z^\dagger BZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} + \left\{ \frac{Z^\dagger BZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\ &= W(A) + W(B). \end{aligned}$$

Portanto, $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$. ■

A combinação das propriedades (P1) e (P3) produzem as inclusões:

$$\Lambda(A + B) \subset W(A + B) \subset W(A) + W(B),$$

Portanto, se os dois domínios numéricos $W(A)$ e $W(B)$ são conhecidos, algo pode ser dito sobre o espectro da soma.

P4: Translação: $W(A + z_0 I) = W(A) + z_0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração 6 Para toda A e $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, substituir $A + z_0 I$ em (2):

$$\begin{aligned}
 W(A + z_0 I) &= \left\{ \frac{Z^\dagger (A + z_0 I) Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{(Z^\dagger A + Z^\dagger z_0 I) Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ + z_0 Z^\dagger IZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ + z_0 Z^\dagger Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} + \frac{z_0 Z^\dagger Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} + z_0 \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} + \{z_0 \in \mathbb{C}\} \\
 &= W(A) + z_0.
 \end{aligned}$$

sendo que $W(A) = \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\}$. ■

O domínio numérico de uma matriz é alterado de forma simples adicionando um múltiplo escalar na identidade (**P4**) ou multiplicando-o por um escalar (**P5**).

P5: Multiplicação por um escalar. $W(z_0 A) = z_0 W(A)$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Notem que para $z_0 = e^{i\theta}$, teremos uma rotação em \mathbb{C} .

Demonstração 7 Para toda $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e todo $z_0 \in \mathbb{C}$, substituir $z_0 A$ em (2):

$$\begin{aligned}
 W(z_0 A) &= \left\{ \frac{Z^\dagger z_0 AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \left\{ z_0 \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= \{z_0 \in \mathbb{C}\} \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\} \\
 &= z_0 W(A),
 \end{aligned}$$

sendo que $\{z_0 \in \mathbb{C}\} = z_0$ e $W(A) = \left\{ \frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\}$. ■

P6: Unitariedade. $W(UAU^\dagger) = W(A)$, para qualquer matriz unitária U .

Demonstração 8 Para todo $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com U unitária.

Como uma transformação unitária deixa a superfície da bola unitária euclidiana invariante, os números complexos que compõem os conjuntos $W(UAU^\dagger)$ e $W(A)$ são os mesmos. Se $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $U^\dagger U = I = UU^\dagger$, temos que $W(UAU^\dagger) = W(U(U^\dagger AU)U^\dagger) = W((UU^\dagger AU)U^\dagger) = W(UU^\dagger AUU^\dagger) = W(A)$. ■

P7: Matrizes normais. Se A é normal, $W(A)$ será o invólucro convexo dos autovalores de A . Em particular, se A é hermitiana, $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

P8: Convexidade. $W(A)$ é convexo. (Teorema de Hausdorff-Toeplitz).

Ver a Demonstração 20.

Essas propriedades fornecem informações valiosas sobre o comportamento dos autovalores de uma matriz e são úteis em diversas aplicações analíticas e computacionais.

3 Resultados e discussões

3.1 Domínio numérico de matriz hermitiana

A matriz normal definida na Seção 2.1, tem uma relação especial com o domínio numérico e invólucro convexo, bem como as matrizes hermitianas, pois a mesma possuem autovalores reais, que estão localizados sobre o eixo real do plano complexo.

Definição 9 O invólucro convexo dos autovalores de A é o menor intervalo convexo que contém todos esses autovalores, ou seja, é o intervalo $[\min \lambda_i, \max \lambda_i]$, onde $\min \lambda_i$ é o menor autovalor e $\max \lambda_i$ é o maior autovalor.

3.1.1 Propriedade P7: Matrizes normais

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A . Como mencionado nas propriedades de matrizes normais, os autovalores de A são os mesmos de A^\dagger . Portanto, os autovalores de A e A^\dagger são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

A conexão entre matriz normal e invólucro convexo dos autovalores

Uma vez que a matriz A é normal, ela pode ser diagonalizada por uma matriz unitária U , ou seja, $A = U\Lambda U^\dagger$, onde Λ é a matriz diagonal contendo os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Como a matriz U é unitária, ela preserva os intervalos de autovalores. Ou seja, se λ_i é um autovalor de A , então λ_i também é um autovalor de A^\dagger .

Assim, o invólucro convexo dos autovalores de A é o mesmo que o invólucro convexo dos autovalores de A^\dagger , que é o intervalo $[\min \lambda_i, \max \lambda_i]$.

Portanto, a demonstração está concluída, mostrando que se A é normal, então o invólucro convexo dos autovalores de A é dado pelo intervalo $[\min \lambda_i, \max \lambda_i]$.

Seja $Z := [Z_1, \dots, Z_n]^T, \forall Z \in \mathcal{H}$. Nós temos:

$$\begin{aligned} Z^\dagger \Lambda Z &= \begin{bmatrix} Z_1^\dagger & \cdots & Z_n^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 Z_1^\dagger & \cdots & \lambda_n Z_n^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 Z_1^\dagger Z_1 + \cdots + \lambda_n Z_n^\dagger Z_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Z^\dagger \Lambda Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^\dagger Z_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i |Z_i|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i, \quad (4)$$

onde $t_i := |Z_i|^2$. Observe que $t_i \geq 0$ e como $Z^\dagger Z = 1$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, o que mostra que $Z^\dagger \Lambda Z$ em (4) é uma combinação convexa de λ_i , $i = 1, \dots, n$. Consequentemente, $W(A)$ será o invólucro convexo dos autovalores de A . Em particular, se A é hermitiana, $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Para provar que “se A é hermitiana, $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ”, vamos demonstrar os Teoremas 10 e 13 a seguir:

Teorema 10 *Se A é hermitiana então, seus autovalores são reais.*

Demonstração 11 *Sejam A, λ e $v \neq 0$, tais que $A = \lambda v$.*

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ (Av)^\dagger &= (\lambda v)^\dagger \\ v^\dagger A^\dagger &= \bar{\lambda} v^\dagger \\ v^\dagger A &= \bar{\lambda} v^\dagger & (A^\dagger = A) \\ v^\dagger Av &= \bar{\lambda} v^\dagger v \\ v(\lambda v) &= \lambda v^\dagger v & (A = \lambda v) \\ \lambda v^\dagger v &= \bar{\lambda} v^\dagger v \\ \lambda &= \bar{\lambda}, \end{aligned}$$

mas isto significa que $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. ■

Uma outra forma de demonstrar o Teorema 10 é através de determinante, conforme a seguir:

Demonstração 12 *Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A , então $\det(A - \lambda I) = 0$ e portanto*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I)^\dagger &= \det(A - \lambda I)^\dagger \\ &= \det(A^\dagger - \lambda^\dagger I) \\ &= \det(A - \bar{\lambda} I) : \end{aligned}$$

Logo, $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e., $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, é um autovalor de A .

Teorema 13 *se A é hermitiana, então, a_{ii} é um número real.*

Demonstração 14 *Se A é hermitiana então $A = A^\dagger$, isso é, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Para $i = j$ deve ocorrer $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ que é possível apenas se $a_{ii} \in \mathbb{R}$. ■*

Teorema 15 *Se A é uma matriz hermitiana, então o invólucro convexo dos autovalores de A é dado por $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.*

Demonstração 16 *Como A é hermitiana, todos os seus autovalores são reais. Isso ocorre porque as matrizes hermitianas têm propriedades específicas que garantem que seus autovalores sejam reais.*

Vamos denotar os autovalores de A como $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, onde n é a dimensão de A . Como todos os autovalores são reais, podemos organizá-los em ordem crescente:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Agora, vamos considerar um intervalo fechado e limitado $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, onde λ_{\min} é o menor autovalor e λ_{\max} é o maior autovalor de A . Dado que todos os autovalores estão dentro desse intervalo, temos:

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{\max}$$

A matriz hermitiana A tem um conjunto completo de autovetores ortonormais. Isso significa que a matriz A pode ser diagonalizada por uma matriz unitária U :

$$A = U\Lambda U^\dagger,$$

onde D é a matriz diagonal dos autovalores de A .

Dado que A é hermitiana e Λ é diagonal, podemos afirmar que a matriz unitária U é também a matriz que diagonaliza Λ :

$$\Lambda = U^\dagger A U.$$

Portanto, os autovalores de A são iguais aos autovalores de Λ .

Consequentemente, os autovalores de A estão contidos no intervalo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Isso significa que o espectro de A está dentro do invólucro convexo dos autovalores, ou seja,

$$W(A) \subseteq [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

Por outro lado, já estabelecemos que $\lambda_{\min} \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{\max}$, o que implica que todos os autovalores de A estão dentro do intervalo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Portanto, $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \subseteq W(A)$.

Juntando as duas inclusões acima, concluímos que $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Essa demonstração mostra que, se A é uma matriz hermitiana, o invólucro convexo dos seus autovalores é igual ao intervalo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. ■

Na Figura 1 estão localizados os autovalores da matriz hermitiana (5) não simétrica e normal, i.e., $A^\dagger A = AA^\dagger$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & 0 \\ i & 0 & i & -1 \\ -1 & -i & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = A^\dagger. \quad (5)$$

em que os autovalores são $\lambda_1 = -2.50289$, $\lambda_2 = -0.53173$, $\lambda_3 = 1.68568$ e $\lambda_4 = 5.34894$. O $\lambda_{\min} = \lambda_1$ e o $\lambda_{\max} = \lambda_4$, logo o domínio numérico é:

$$W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] = [-2.5029, 5.3489], \quad (6)$$

3.1.2 Propriedade (P8)

Teorema 17 (Toeplitz-Hausdorff)

Seja A_1, \dots, A_n operadores em \mathcal{H} e $x \in \mathcal{H}$. Então o subconjunto

$$\left\{ \left(x^\dagger A_1 x, \dots, x^\dagger A_n x \right) : x^\dagger x = 1 \right\},$$

de \mathbb{C}^n tem a seguinte propriedade: com quaisquer dois pontos, contém um elipsóide (talvez degenerado) unindo-os.

(Quando $n = 1$, o elipsóide está em \mathbb{C} , então deve degenerar e, portanto, ser convexo: isso dá o resultado anterior). [6]

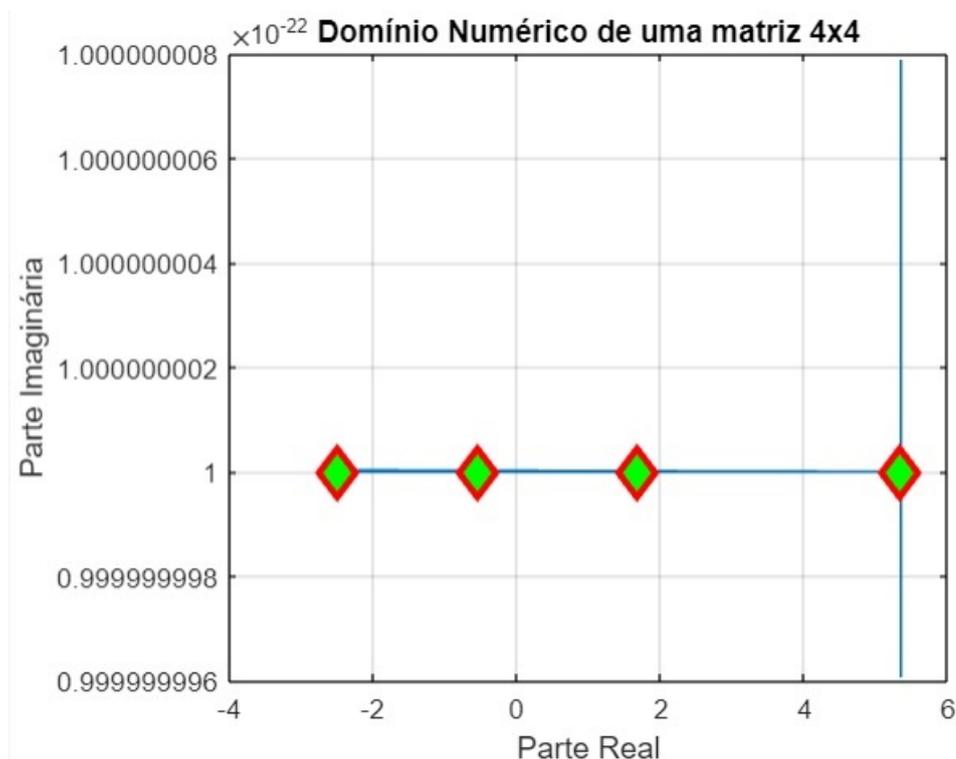


Figura 1: Domínio numérico de matriz hermitiana.

Fonte: elaborado pelos autores.

Para provar o Teorema de Hausdorff-Toeplitz, 17, precisamos das seguintes Definições 18 e 19 e dos Lemas 21 e 23, a partir da leitura [2].

Definição 18 M_n é o conjunto das matrizes complexas $n \times n$, i.e., $M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Definição 19 (Conjunto convexo, segmento)

Um subconjunto $W(A)$ de um espaço vetorial de Hilbert¹ \mathcal{H} é dito ser convexo se $s, t \in W(A)$ implica

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0s + (1 - z_0)t, \quad 0 \leq z_0 \leq 1\} \subset W(A).$$

S é chamado de segmento fechado com pontos de fronteira s e t ; qualquer outro $z \in S$ é chamado de ponto interior de S .

Demonstração 20 Para mostrar que um dado conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é convexo, basta mostrar que $z = z_0s + (1 - \alpha)t \in S$ sempre que $0 \leq z_0 \leq 1$ e $s, t \in S$. Assim, pela definição (2) para um dado

$A \in M_n$, o domínio $W(A)$ é convexo se $z = z_0 \frac{Z_1^\dagger A Z_1}{Z_1^\dagger Z_1} + (1 - z_0) \frac{Z_2^\dagger A Z_2}{Z_2^\dagger Z_2} \in W(A)$ sempre que $0 \leq$

$z_0 \leq 1$ e $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^n$ satisfazem $Z_1^\dagger Z_1 = Z_2^\dagger Z_2 = 1$.

Se $z_0 = 0$, então $z = \frac{Z_2^\dagger A Z_2}{Z_2^\dagger Z_2} \in W(A)$; e, se $z_0 = 1$, então $z = \frac{Z_1^\dagger A Z_1}{Z_1^\dagger Z_1} \in W(A)$, mapeiam toda a região $W(A)$.

¹É um espaço vetorial dotado de produto interno, ou seja, com noções de distância e ângulos. Esse espaço obedece uma relação de completude, que garante que os limites existem quando esperados, o que permite e facilita diversas definições da Análise.

Basta provar isso apenas no caso 2×2 porque precisamos considerar apenas combinações convexas associadas com pares de matrizes. Para cada par dado de vetores $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^n$, existe uma matriz unitária U e vetores $v, w \in \mathbb{C}^n$ tais que $Z_1 = Uv$, $Z_2 = Uw$, e todas as entradas de v e w após os dois primeiros são iguais a zero. Usando esta transformação, temos que substituir $Z_1^\dagger = v^\dagger U^\dagger$ e $Z_2^\dagger = w^\dagger U^\dagger$ no conjunto convexo $z_0 x^\dagger Ax + (1 - z_0) y^\dagger Ay \in F(A)$:

$$\begin{aligned} z_0 \frac{Z_1^\dagger A Z_1}{Z_1^\dagger Z_1} + (1 - z_0) \frac{Z_2^\dagger A Z_2}{Z_2^\dagger Z_2} &= z_0 v^\dagger U^\dagger A U v + (1 - z_0) w^\dagger U^\dagger A U w \\ &= z_0 v^\dagger B v + (1 - z_0) w^\dagger B w \\ &= z_0 \xi^\dagger B_{12} \xi + (1 - z_0) \eta^\dagger B_{12} \eta \end{aligned}$$

onde $B \equiv U^\dagger A U$, B_{12} é a submatriz principal 2 por 2 superior esquerda de B , ξ e $\eta \in \mathbb{C}^2$ consistem nas duas primeiras entradas de v e w , respectivamente. Assim, basta mostrar que o domínio numérico de matrizes de qualquer matriz 2×2 é convexo. Essa redução é possível devido à propriedade de unitariedade (P6). ■

Uma forma especial 2×2 suficiente

Provamos a seguir que para mostrar que $W(A)$ é convexa para toda matriz $A \in M_2$, basta demonstrar que $W \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ é convexo para qualquer $a, b \geq 0$. O lema seguinte é útil.

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - ab \implies \lambda = \pm \sqrt{ab}.$$

Lema 21 Para cada $A \in M_n$ existe uma $U \in M_2$ unitária tal que as duas entradas diagonais principais de $U^\dagger A U$ são iguais.

Demonstração 22 Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\text{tr}(A) = 0$ desde que possamos substituir A por $A - (\frac{1}{2} \text{tr}(A))I$. Precisamos mostrar que A é unitariamente semelhante a uma matriz cujas entradas diagonais são iguais a zero. Para mostrar isso, basta mostrar que existe um vetor $w \in \mathbb{C}^2$ diferente de zero tal que $w^\dagger A w = 0$. Tal vetor pode ser normalizado e usado como a primeira coluna de uma matriz unitária W , e um cálculo revela que a entrada $[W^\dagger A W]_{11}$ de $W^\dagger A W$ é zero; a entrada $[W^\dagger A W]_{22}$ de $W^\dagger A W$ também deve ser zero, pois o traço é zero. Construa o vetor w como segue; uma vez que A tem autovalores $\pm \alpha$ para algum número complexo α , seja x um autovetor normalizado associado ao $-\alpha$ e seja y um autovetor normalizado associado ao $+\alpha$. Se $\alpha = 0$, basta tomar $w = z$. Se $\alpha \neq 0$, x e y são independentes e o vetor $w = e^{i\theta} x + y$ é diferente de zero para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Um cálculo mostra que $w^\dagger A w = \alpha(e^{-i\theta} x^\dagger y - e^{i\theta} y^\dagger x) = 2i\alpha \Im(e^{-i\theta} x^\dagger y)$. Agora escolha θ de modo que $e^{-i\theta} x^\dagger y$ seja real. ■

Agora usamos o Lema 21 junto com várias das propriedades dadas na seção anterior para reduzir a questão da convexidade no caso 2×2 à consideração da forma especial declarada. Se $A \in M_2$ for dado, aplique a propriedade de translação (P4) para concluir que $W(A)$ é convexa se, e somente se, $W(A + z_0 I)$ for convexo. Se escolhermos $\alpha = -\frac{1}{2} \text{tr}(A)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que nossa matriz tem traço 0. De acordo com o Lema 21 e a propriedade (P6) de Unitariedade (ou de invariância de similaridade unitária), podemos supor ainda que ambas as entradas diagonais principais de nossa matriz sejam 0.

Assim, podemos assumir que a matriz dada tem a forma $\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$ para algum $c, d \in \mathbb{C}$. Agora podemos usar a invariância da propriedade de similaridade unitária **(P6)** e uma matriz unitária diagonal para mostrar que podemos considerar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{+i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$. Se $c = |c|e^{i\theta_1}$ e $d = |d|e^{i\theta_2}$, e se escolhermos $\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$, a última matriz torna-se $e^{i\phi} \begin{bmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{bmatrix}$ com $\phi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

Assim, basta considerar uma matriz da forma $e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ com $\varphi \in \mathbb{R}$ e $a, b \geq 0$. Finalmente, pela propriedade da multiplicação escalar **(P5)**, precisamos considerar apenas a forma especial

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b \geq 0. \quad (7)$$

Ou seja, mostramos que o domínio numérico de matrizes de toda matriz complexa 2×2 é convexo se o domínio numérico de matrizes de toda matriz da forma especial (7) for convexa.

Convexidade do domínio numérico de matrizes da forma especial 2 por 2

Lema 23 *Se $A \in M_2$ tem a forma (7), então $W(A)$ é uma elipse (com seu interior) centrada na origem. Seu eixo menor está ao longo do eixo imaginário e tem comprimento $|a - b|$. Seu eixo maior está ao longo do eixo real e tem comprimento $a + b$. Seus focos estão em $\pm\sqrt{ab}$, que são os autovalores de A . [2]*

Demonstração 24 *Sem perda de generalidade, assumimos $a \geq b \geq 0$. Como $Z^\dagger AZ = (e^{i\theta}Z)^\dagger A(e^{i\theta}Z)$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, para determinar $W(A)$, basta considerar $Z^\dagger AZ$ para vetores unitários Z cujo primeiro componente é real e não negativo. Assim, consideramos $Z^\dagger AZ$ considera o vetor $Z = [t, e^{i\theta}(1 - t^2)^{1/2}]^T$ para $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Um cálculo mostra que*

$$Z^\dagger AZ = t(1 - t^2)^{1/2} [(a + b) \cos \theta + i(a - b) \sin \theta]. \quad (8)$$

*Como θ varia de 0 a 2π , o ponto $(a + b) \cos \theta + i(a - b) \sin \theta$ traça uma elipse possivelmente degenerada e centrada na origem; o eixo maior se estende de $-(a + b)$ a $(a + b)$ no eixo real e o eixo menor se estende de $i(b - a)$ ao $i(a - b)$ no eixo imaginário no plano complexo. Como t varia de 0 a 1, o fator $t(1 - t^2)^{1/2}$ varia de 0 a $1/2$ e volta ao 0, garantindo que cada ponto no interior da elipse $\frac{1}{2}\epsilon$ seja atingido e verificar que $W(A)$ é a elipse afirmada com seu interior, que é convexo. Os dois focos da elipse $\frac{1}{2}\epsilon$ estão localizados no eixo maior à distância $[\frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2]^{1/2} = \pm\sqrt{ab}$ do centro. Isso completa o argumento para fornecer a propriedade de convexidade **(P8)**. ■*

Demonstração 25 *Da Equação (8)*

$$\begin{aligned}
Z^\dagger AZ &= \begin{bmatrix} t & e^{-i\theta}(1-t^2)^{1/2} \end{bmatrix}_{1 \times 2}^T \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} t \\ e^{i\theta}(1-t^2)^{1/2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 + be^{-i\theta}(1-t^2)^{1/2} & at + 0 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} t \\ e^{i\theta}(1-t^2)^{1/2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} be^{-i\theta}(1-t^2)^{1/2}t + ae^{i\theta}(1-t^2)^{1/2}t \end{bmatrix}_{1 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} (1-t^2)^{1/2}t (ae^{i\theta} + be^{-i\theta}) \end{bmatrix}_{1 \times 1} \\
&= \begin{bmatrix} (1-t^2)^{1/2}t [a(\cos \theta + i \sin \theta) + b(\cos \theta - i \sin \theta)] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-t^2)^{1/2}t [(a+b) \cos \theta + i(a-b) \sin \theta] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, $Z^\dagger AZ = (1-t^2)^{1/2}t [(a+b) \cos \theta + i(a-b) \sin \theta]$, $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. ■

3.2 Representação gráfica de $W(A)$

Nesta Subseção, será representado graficamente o $W(A)$. Para esta finalidade, seguiremos os mesmos passos de [1, 7]. Antes de iniciarmos o problema mais geral, é interessante considerarmos como “aquecimento” o caso de matrizes 2×2 . Vamos demonstrar o seguinte resultado clássico bem conhecido.

Teorema 26 (Domínio elíptico)

O domínio numérico de uma matriz 2×2 complexa é a região do plano complexo delimitada por uma elipse (possivelmente degenerada) com os focos em seus autovalores.

As ideias de [1] podem ser usadas para especificar um algoritmo para a determinação de $W(A)$. Focamos em $W_{In}(A, \theta)$ como nossa aproximação para $W(A)$. Suponha que $A \in M_n(\mathbb{C})$ e um nível pré-especificado de tolerância $A > 0$ sejam dados. Para um elemento arbitrário $B \in M_n(\mathbb{C})$, por conveniência definimos $H(B) = \frac{1}{2}(B + B^\dagger)$, a “parte hermitiana” de B . Nossa abordagem baseia-se principalmente nas propriedades **P1-P2** acima e nos seguintes fatos diretos. Seja $\lambda_M(B)$ o maior autovalor de B se $B \in M_n(\mathbb{C})$ for hermitiano. [1]

Suponhamos $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, as matrizes complexas $n \times n$; então o campo de valores de A é definido pela Equação (2).

Pelas propriedades **P1-P8**, vimos que $W(A)$ é convexo, fechado e limitado.

De [1], para qualquer $A \in M_n(\mathbb{C})$, temos

$$e^{-i\theta}W(e^{i\theta}A) = W(A). \quad (9)$$

Demonstração 27 Decorre de **P4** e **P5** Notem que para $z_0 = e^{i\theta}$, teremos uma rotação em \mathbb{C} . Substituir $e^{i\theta}A$ em (2):

$$W(e^{i\theta}A) = \left\{ \frac{Z^\dagger (e^{i\theta}A) Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Multiplicar à esquerda por $e^{-i\theta}$:

$$e^{-i\theta}W(e^{i\theta}A) = \left\{ e^{-i\theta} \frac{Z^\dagger (e^{i\theta}A) Z}{Z^\dagger Z} \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Escrever $e^{i\theta}$ em evidência no lado direito:

$$e^{-i\theta}W\left(e^{i\theta}A\right)=\left\{e^{-i\theta}e^{i\theta}\frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z}\in\mathbb{C}\mid 0\neq Z\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

Mas, $e^{-i\theta}e^{i\theta}=1$:

$$e^{-i\theta}W\left(e^{i\theta}A\right)=\left\{\frac{Z^\dagger AZ}{Z^\dagger Z}\in\mathbb{C}\mid 0\neq Z\in\mathbb{C}^n\right\}=W(A).$$

■

A propriedade:

$$\max_{Z\in W(A)}\Re(Z)=\max_{r\in W(H(A))}r=\lambda_M(H(A)), \quad (10)$$

onde $H(A)=\frac{1}{2}(A+A^\dagger)$.

Além disso, as três condições a seguir em $x\in\mathbb{C}^n$, satisfazendo $Z^\dagger Z=1$, são equivalentes:

$$\Re(Z^\dagger AZ)=\max_{Z\in W(A)}\Re(Z); \quad (11a)$$

$$Z^\dagger H(A)Z=\max_{z\in W(H(A))}r; \quad (11b)$$

$$H(A)Z=\lambda_M(H(A))Z. \quad (11c)$$

Demonstração 28 A equivalência de (11a) e (11b) segue do cálculo $\Re(Z^\dagger AZ)=\frac{1}{2}(Z^\dagger AZ+Z^\dagger A^\dagger Z)=Z^\dagger H(A)Z$. Se $\{Z_1,\dots,Z_n\}$ é uma base ortonormal de autovetores da matriz hermitiana $H(A)$, Z_j associado ao autovalor λ_j , então Z pode ser escrito $Z=\sum_{j=1}^n\alpha_j Z_j$ com $\sum_{j=1}^n\bar{\alpha}_j\alpha_j=1$ (desde que $Z^\dagger Z=1$). Assim, $Z^\dagger H(A)Z=\sum_{j=1}^n\bar{\alpha}_j\alpha_j\lambda_j$, de onde a equivalência de (11b) e (11c) é imediatamente deduzida. A equivalência de (11a), (11b) e (11c), é claro, implica na afirmação (10). ■

Na Figura 2 é mostrado o campo de valores da matriz A duplamente estocástica²

$$A=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2\end{bmatrix}. \quad (12)$$

Observe que a o somatório das linhas e colunas da matriz é igual a 1, pois os elementos são probabilidades. Os autovalores são $\lambda_1=0.2236i$, $\lambda_2=-0.2236i$ e $\lambda_3=1$, logo a matriz A não é hermitiana. Por exemplo, matrizes duplamente estocásticas são espectrais, ou seja,

$$\rho(A)=r(A),$$

²Uma matriz duplamente estocástica, também conhecida como matriz bistocástica, é uma matriz quadrada onde todos os elementos são não negativos e as somas de cada linha e coluna são iguais a 1. Em outras palavras, é uma matriz que representa uma distribuição de probabilidade em que as probabilidades marginais tanto para as linhas quanto para as colunas são todas igualmente 1. Formalmente, uma matriz duplamente estocástica de ordem n é uma matriz $n\times n$ cujos elementos a_{ij} satisfazem as seguintes condições: $a_{ij}\geq 0$ para todos i,j , $\sum_{j=1}^na_{ij}=1$ para todos i , ou seja, a soma dos elementos em cada linha é igual a 1.

onde $\rho(A)$ é o raio espectral e o raio numérico de $A \in M_n(\mathbb{C})$ é definido por:

$$r(A) = \max_{z \in W(A)} |z|.$$

A matriz (12) tem $\rho(A) = 1$ e $r(A) = 1 = Z_{\max}$ iguais.

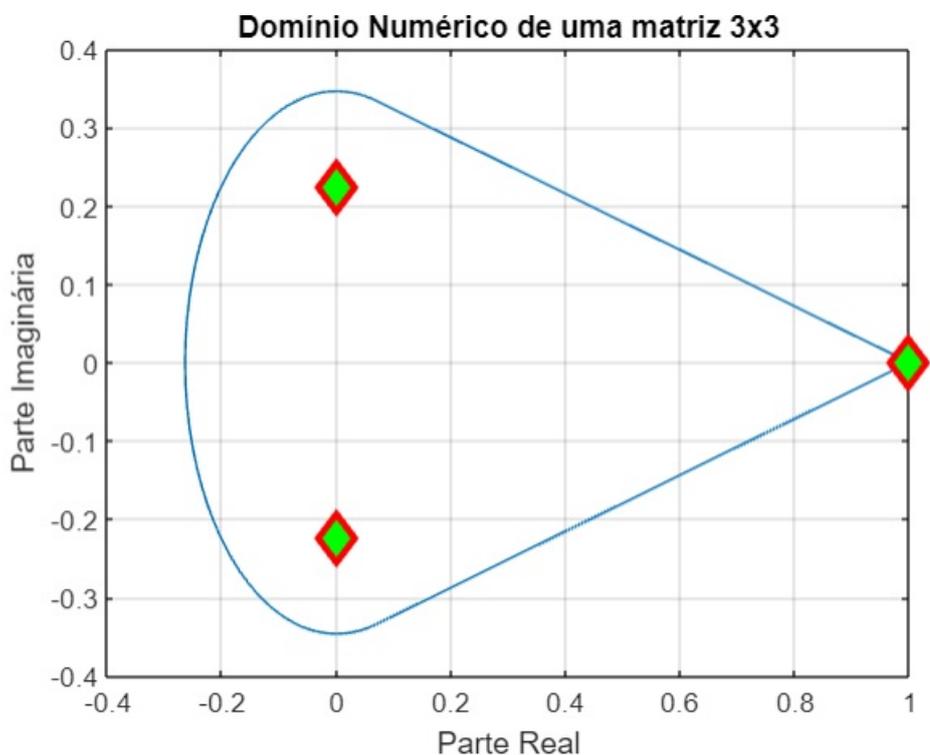
Neste caso, para a matriz (12), a parte hermitiana de A é $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$, logo,

$$H(A) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica que é a parte hermitiana de A , cujos autovalores são: $\lambda_1 = -0.2646$, $\lambda_2 = 0.2646$ e $\lambda_3 = 1.0000 = \lambda_M H(A)$.

Observe que (10) implica que a reta paralela ao eixo imaginário a uma distância $\lambda_M(H(A)) = 1$ é uma tangente a $W(A)$. A afirmação (9) pode ser usada via rotação para determinar outras tangentes.

Figura 2: Domínio numérico da matriz estocástica (12), com a reta tangente em $\lambda_M H(A) = 1$ e o ponto de tangência em $(1, 0)$.



Fonte: elaborada pelos autores a partir de [1, 8].

Para a matriz (12) implica que podemos sempre localizar o “limite esquerdo” de $W(A)$, o qual será a reta vertical com $z = \lambda_M H(A)$, o maior autovalor da matriz hermitiana $H(A)$, ver Figura 2.

Para determinar o ponto de tangência do domínio numérico da matriz (12), pode-se determinar Z_{\max} o autovetor (unitário) de $H(A)$ associado ao autovalor $z_M = \lambda_M H(A) = 1$, sendo que neste

caso, é $Z_M^\dagger = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^\dagger$. Note que $Z_M^\dagger Z_M = 1$ e que o raio numérico também pode ser determinado pela Equação (11b):

$$Z_M^\dagger H(A) Z_M = \max_{z \in W(H(A))} r = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = 1.$$

O ponto,

$$z_M = Z_M^\dagger A Z_M \in \mathbb{C}$$

É o ponto de tangência da reta vertical com $W(A)$, isto decorre diretamente das propriedades **P3** e **P7**.

$$z_M = Z_M^\dagger A Z_M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = 1.$$

Este ponto de interseção de $W(A)$ com a reta z_M é $(1, 0)$ sobre o eixo real, destacado na Figura 2 pelo autovalor $\lambda_{\max}(A) = 1$, coincidentemente.

3.3 $W(A)$ Degenerados

Para que o $Tr(UAU^\dagger)$ se anule, precisamos que:

$$\omega = \frac{c}{ae^{i\phi} + be^{-i\phi}}, \quad (13)$$

em que ω um número real e que $\tan 2\theta = 2\omega$. Ocorre que sempre é possível encontrar um $\phi \in [0, 2\pi]$ tal que $\Im\omega = 0$ em (13). (Ver Demonstração 24).

Demonstração 29 Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $Z = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ e^{i\phi} \cos \theta \end{bmatrix}$ e $Z^\dagger = e^{-i\psi} \begin{bmatrix} \sin \theta & e^{-i\phi} \cos \theta \end{bmatrix}^\dagger$, com $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ e $Z^\dagger Z = 1$. Assim, substituir na Equação (2)

$$\begin{aligned} W(A) &= \{Z^\dagger A Z \in \mathbb{C} \mid 0 \neq Z \in \mathbb{C}^n\}, \\ W\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ e^{-i\psi} \begin{bmatrix} \sin \theta & e^{-i\phi} \cos \theta \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} e^{i\psi} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ e^{i\phi} \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} be^{-i\psi} e^{-i\phi} \cos \theta & ae^{-i\psi} \sin \theta \end{bmatrix} e^{i\psi} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ e^{i\phi} \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} be^{-i\psi} e^{-i\phi} \cos \theta e^{i\psi} \sin \theta + ae^{-i\psi} \sin \theta e^{i\psi} e^{i\phi} \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} be^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta + ae^{i\phi} \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \cos \theta \sin \theta (ae^{i\phi} + be^{-i\phi}) \right\}. \end{aligned}$$

Como,

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \implies \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Portanto,

$$W\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{i\phi} + be^{-i\phi}) \right\}. \quad (14)$$

■

Isto é, $W(A)$ é o conjunto de complexos $z = x + iy$.

Desenvolver o lado direito de (14) obtém-se:

Demonstração 30 Consideremos:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (15)$$

e

$$e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi \quad (16)$$

Substituir (15) e (16) em (14), tem-se que:

$$\begin{aligned} W \left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) &= \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta (a (\cos \phi + i \sin \phi) + b (\cos \phi - i \sin \phi)) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta (a \cos \phi + ia \sin \phi + b \cos \phi - ib \sin \phi) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta ((a + b) \cos \phi + i (a - b) \sin \phi) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{(a + b)}{2} \sin 2\theta \cos \phi \right) + i \left(\frac{(a - b)}{2} \sin 2\theta \sin \phi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$x = \frac{(a + b)}{2} \sin 2\theta \cos \phi \quad (17)$$

e

$$y = \frac{(a - b)}{2} \sin 2\theta \sin \phi, \quad (18)$$

são as funções coordenadas da função complexa $z(x, y) = x(\theta, \phi) + iy(\theta, \phi)$, para $\phi, \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, \pi/2]$. ■

O caso $a = b = 0$ é trivial, $W(A)$ será um único ponto, a origem, coincidindo com o único autovalor da matriz A nesse caso. Se $a = b$, $W(A)$ será o intervalo real $[-a, a]$, o intervalo limitado pelos dois autovalores de A (ver **P7**). Estes são os casos degenerados. Em geral, teremos:

$$\frac{4x^2}{(a + b)^2} + \frac{4y^2}{(a - b)^2} = \sin^2(2\theta). \quad (19)$$

(Ver Figura 3).

Demonstração 31 Da Equação (17), escrevemos:

$$2y = (a - b) \sin 2\theta \sin \phi,$$

elevar ao quadrado:

$$4y^2 = (a - b)^2 \sin^2(2\theta) \sin^2 \phi,$$

e

$$\frac{4y^2}{(a - b)^2} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \phi. \quad (20)$$

Analogamente com a Equação (18), temos:

$$\frac{4x^2}{(a+b)^2} = \sin^2(2\theta) \cos^2 \phi. \quad (21)$$

Adicionar as Equações (21) e (20), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{(a+b)^2} + \frac{4y^2}{(a-b)^2} &= \sin^2(2\theta) \cos^2 \phi + \sin^2(2\theta) \sin^2 \phi \\ &= \sin^2(2\theta) (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= \sin^2(2\theta)(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{4x^2}{(a+b)^2} + \frac{4y^2}{(a-b)^2} = \sin^2(2\theta).$$

■

O código fonte a seguir, gera a elipse da Equação (19) e suas degenerações, conforme plotagem na Figura 3.

```
clear all
% Parâmetros da matriz
a = 2; % Valor de a
b = 1; % Valor de b

% Matriz A
A = [0 a; b 0];

% Autovetores e autovalores
[V, D] = eig\left(A\right);

% Focos da elipse (autovalores)
focus1 = D(1, 1);
focus2 = D(2, 2);

% Ângulo theta para traçar a elipse
theta = linspace(0, 2*pi, 1000);

% Pontos da elipse
x = (a + b) / 2 * sin(2 * theta);
y = (a - b) / 2 * sin(2 * theta);

%elipse= @(x,y) 4*x^2/(a+b) + 4*y^2/(a+b) - sin(2*theta);

% Focos no plano complexo
focus1_point = real(focus1) + 1i * imag(focus1);
focus2_point = real(focus2) + 1i * imag(focus2);
```

```

% Plota a elipse e os focos
figure;
plot(x, y);
hold on;
scatter(real(focus1_point), imag(focus1_point), 'r*',
'DisplayName', 'Foco 1');
scatter(real(focus2_point), imag(focus2_point), 'r*',
'DisplayName', 'Foco 2');
title('Domínio Elíptico e Focos');
xlabel('Parte Real');
ylabel('Parte Imaginária');
axis equal;
grid on;
legend('Elipse', 'Focos', 'Location', 'Best');
hold off;

```

Na Figura 3(a), a elipse da Equação (19), degenera-se em um ponto no centro $C = (0, 0)$; na Figura 3(b), a elipse degenera-se em um segmento de reta sobre o eixo real, nos vértices $V_1 = (-2, 0)$ e $V_2 = (2, 0)$; na Figura 3(c), a elipse degenera-se em um segmento de reta sobre o eixo real, nos vértices $V_1 = (-1, 0)$ e $V_2 = (1, 0)$; e, na Figura 3(d), a elipse degenera-se em um segmento de reta oblíquo ao eixo real e agora os focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$ são os autovalores, que estão plotados sobre o eixo real.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Em particular, nos quatro casos representados na Figura 3, as matrizes A são hermitianas, logo o $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

Na Figura 3(a), os autovalores são nulos, logo o $W(A) = 0$; na Figura 3(b), os autovalores são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = +2$, logo o $W(A) = [-2, +2]$; na Figura 3(c), os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$, logo o $W(A) = [-1, +1]$; e, na Figura 3(d), os autovalores são $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = +\sqrt{2}$, logo o $W(A) = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.

Demonstração 32 *Considere a seguinte matriz unitária:*

$$U = \begin{bmatrix} \sin \theta & e^{i\phi} \cos \theta \\ -e^{-i\phi} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

e a sua transposta conjugada:

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} \sin \theta & -e^{i\phi} \cos \theta \\ e^{-i\phi} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

com $\phi \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, \pi/2]$, e considerem o produto,

$$\begin{aligned} UAU^\dagger &= \begin{bmatrix} \sin \theta & e^{i\phi} \cos \theta \\ -e^{-i\phi} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & a \\ b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & -e^{i\phi} \cos \theta \\ e^{-i\phi} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c \sin \theta + b e^{i\phi} \cos \theta & a \sin \theta - c e^{i\phi} \cos \theta \\ -c e^{-i\phi} \cos \theta + b \sin \theta & -a e^{-i\phi} \cos \theta - c \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & -e^{i\phi} \cos \theta \\ e^{-i\phi} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [UAU^\dagger]_{22} &= (-ce^{-i\phi} \cos \theta + b \sin \theta)(-e^{i\phi} \cos \theta) + (-ae^{-i\phi} \cos \theta - c \sin \theta) \sin \theta \\
 &= +c \cos^2 \theta - be^{i\theta} \cos \theta \sin \theta - ae^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta - c \sin^2 \theta \\
 &= -be^{i\theta} \cos \theta \sin \theta - ae^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta - c \sin^2 \theta \\
 &= -\cos \theta \sin \theta (be^{i\theta} + ae^{-i\phi}) + c \cos^2 \theta - c \sin^2 \theta \\
 &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) + c (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$[UAU^\dagger]_{22} = -\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) - c \cos 2\theta\right).$$

As componentes diagonais do produto serão:

$$[UAU^\dagger]_{11} = -[UAU^\dagger]_{22} = \frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) - c \cos 2\theta. \quad (23)$$

Para que se anulem, precisamos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) - c \cos 2\theta &= 0 \\
 \frac{1}{2} \sin 2\theta (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) &= c \cos 2\theta \\
 \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} (ae^{-i\phi} + be^{i\phi}) &= 2c \\
 \tan 2\theta &= \frac{2c}{ae^{-i\phi} + be^{i\phi}} \\
 \tan 2\theta &= 2\omega
 \end{aligned}$$

sendo que:

$$\omega = \frac{c}{ae^{-i\phi} + be^{i\phi}}, \quad (24)$$

é um número real sempre é possível encontrar um $\phi \in [0, 2\pi]$ tal que $\Im\omega = 0$.

Demonstração 33 Para provar que ω é um número real, primeiro precisamos expressá-lo de uma forma mais conveniente e então mostrar que sua parte imaginária, $\Im(\omega)$, é igual a zero. A fórmula fornecida para ω é (24).

Primeiramente, simplificaremos a expressão no denominador usando identidades trigonométricas. Para começar multiplicamos o numerador e o denominador por $e^{i\phi}$:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{c}{ae^{-i\phi} + be^{i\phi}} \cdot \frac{e^{i\phi}}{e^{i\phi}} \\
 &= \frac{ce^{i\phi}}{ae^{-i\phi}e^{i\phi} + be^{i\phi}e^{i\phi}} \\
 &= \frac{ce^{i\phi}}{ae^0 + be^{2i\phi}} \\
 &= \frac{ce^{i\phi}}{a + be^{2i\phi}}
 \end{aligned}$$

Agora, vamos expandir $be^{2i\phi}$ usando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$:

$$be^{2i\phi} = b (\cos(2\phi) + i \sin(2\phi)).$$

Agora, podemos reescrever ω como:

$$\omega = \frac{ce^{i\phi}}{a + b(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi))}$$

A parte imaginária de ω é dada pela parte imaginária do numerador dividido pela parte real do denominador:

$$\Im(\omega) = \frac{\Im(ce^{i\phi})}{\Re(a + b(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)))}$$

Vamos calcular as partes real e imaginária de $ce^{i\phi}$:

$$\begin{aligned}\Re(ce^{i\phi}) &= c \cos(\phi) \\ \Im(ce^{i\phi}) &= c \sin(\phi)\end{aligned}$$

E a parte real do denominador, $a + b(\cos(2\phi) + i\sin(2\phi))$, é apenas $a + b \cos(2\phi)$.

Agora, podemos reescrever a parte imaginária de ω como:

$$\begin{aligned}\Im(\omega) &= \frac{c \sin(\phi)}{a + b \cos(\phi)} \\ &= \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \frac{c}{\frac{a}{\cos(\phi)} + b} \\ &= \tan(\phi) \frac{c \cos(\phi)}{a + b \cos(\phi)} \\ &= \tan(\phi) \frac{c \cos(\phi)}{a + b \cos(\phi)}.\end{aligned}$$

Agora, queremos encontrar ϕ tal que $\Im(\omega) = 0$:

$$0 = \frac{c \sin(\phi)}{a + 2b \cos(\phi)}.$$

Para que isso seja verdade, precisamos que o numerador $c \sin(\phi)$ seja igual a zero, porque o denominador não pode ser zero (caso contrário, ω não seria definido). Isso implica que $\sin(\phi) = 0$, o que acontece quando ϕ é um múltiplo inteiro de π :

$$\phi = n\pi,$$

onde $n = 0, 1, 2$. Portanto, podemos concluir que existe um $\phi \in [0, 2\pi]$ tal que $\Im(\omega) = 0$, e esse ϕ é um múltiplo inteiro de π . ■

3.4 Algoritmo

Para calcular os autovalores e os pontos de fronteira que compõem o domínio numérico, utilizamos o Algoritmo 1 com o respectivo código, tendo como entrada a matriz A e k iterações.

O domínio de valores de uma matriz é um conjunto convexo no plano complexo que contém todos os autovalores da matriz fornecida, este código plota os pontos de fronteira deste conjunto e os autovalores da matriz fornecida. O código fonte `fovals(A,k)`, é necessário declarar a matriz A quadrada e o k é o número de etapas (500 por padrão).


```
xlabel('Parte Real');  
ylabel('Parte Imaginária')  
hold off  
grid on
```

Inicialmente, tomamos a matriz não simétrica e não hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

com autovalores $\lambda = \pm\sqrt{2}$. A sua parte hermitiana é: $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix}$. Os autovalores de $H(A)$ são $\lambda = \pm 1.5 \in \mathbb{R}$, com isso, temos que a reta tangente ao se $W(A)$ “passa” por $\lambda_M H(A) = 1.5$, conforme visto na Figura 4(a). Esta matriz não é hermitiana, mas sua parte hermitiana tem autovalores reais. O código mostra que a reta tangente ao domínio numérico passa por $\lambda_M H(A) = 1.5$.

Em seguida:

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}. \quad (26)$$

com autovalores $\lambda = \pm 1$. A sua parte hermitiana é: $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix}$. Os autovalores de $H(A)$ são $\lambda = \pm 1.5 \in \mathbb{R}$, com isso, temos que a reta tangente ao se $W(A)$ “passa” por $\lambda_M H(A) = 1.5$, conforme visto na Figura 4(b), **porém**, vale destacar que os autovalores são diferentes da matriz anterior e consequentemente o formato do $W(A)$ também é diferente. Esta matriz também não é hermitiana, mas sua parte hermitiana tem autovalores reais. O código mostra que a reta tangente ao domínio numérico passa por $\lambda_M H(A) = 1.5$, mas os autovalores são diferentes da matriz anterior.

A terceira matriz a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

com autovalores $\lambda_1 = -2.2134$, $\lambda_2 = +2.2134i$, $\lambda_3 = -2.2134i$ e $\lambda_4 = 2.2134$, não é hermitiana, entretanto a sua parte hermitiana é:

$$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.0 & -2.0 \\ 0.5 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 1.5 \\ -2.0 & 0.0 & 1.5 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $H(A)$ são: $\lambda_1 H(A) = -2.6992$, $\lambda_2 H(A) = -0.4631$, $\lambda_3 H(A) = -0.4631$ e $\lambda_4 H(A) = 2.6992 \in \mathbb{R}$, com isso, temos que a reta tangente ao se $W(A)$ “passa” por $\lambda_M H(A) = 2.6992$, conforme visto na Figura 4(c). Esta matriz tem autovalores complexos, mas sua parte hermitiana tem autovalores reais. O código mostra que a reta tangente ao domínio numérico passa por $\lambda_M H(A) = 2.6992$.

O $W(A)$ da Figura 4(d) é de uma matriz randômica 10×10 e presume-se a partir de uma observação que o seu autovalor máximo seja aproximadamente 5.5. Uma matriz aleatória é gerada

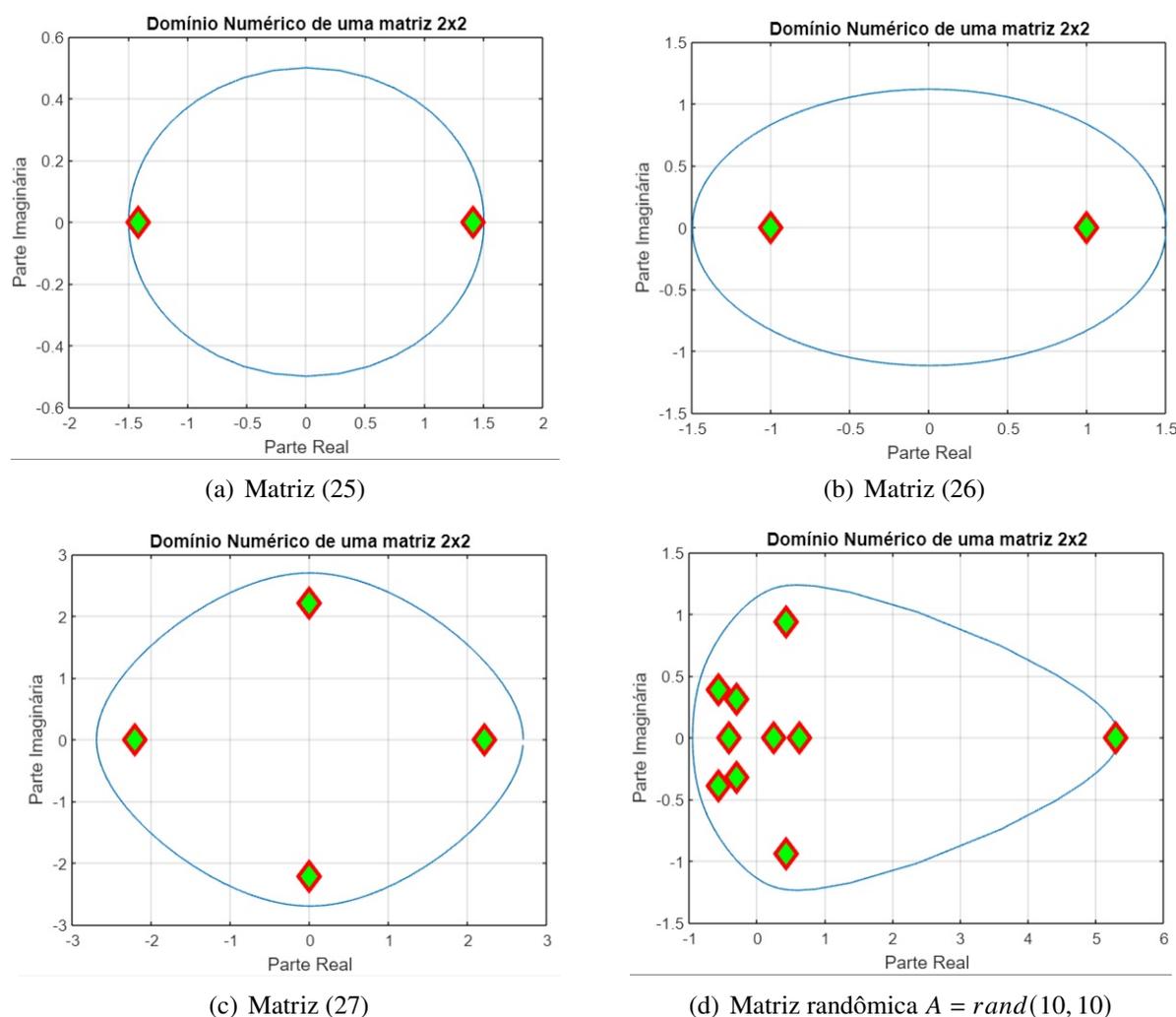


Figura 4: Domínios numéricos de matrizes.

Fonte: elaborado pelos autores.

e o código presume que seu autovalor máximo seja aproximadamente 5.5.

As Figuras 4(a)-(d) mostram os domínios numéricos das matrizes mencionadas. Essas figuras ilustram como os autovalores das diferentes partes das matrizes contribuem para a forma do domínio numérico.

4 Conclusão

Neste estudo, exploramos o conceito de domínio numérico de matrizes, investigando suas propriedades fundamentais e apresentando suas demonstrações. Nosso foco recaiu tanto na análise analítica quanto na interpretação geométrica do domínio numérico, através da análise de exemplos concretos. Ao examinar essas propriedades, destacamos as conexões intrínsecas entre esses conceitos e a distribuição dos autovalores das matrizes em questão.

Na vertente computacional, adotamos o algoritmo proposto por Charles R. Johnson, uma ferramenta essencial para visualizar o comportamento dos autovalores no plano complexo, delimitados



pela região convexa, conforme ilustrado nas figuras apresentadas neste trabalho.

Para determinar o domínio numérico de uma matriz A , representado por $W(A)$, empregamos o algoritmo da função $fovals(A,k)$, onde A é uma matriz quadrada e k é o número de iterações. Para elucidar os resultados, inicialmente consideramos uma matriz não simétrica e não hermitiana de ordem 2×2 , seguida por uma matriz não hermitiana de ordem 4×4 . Essa abordagem nos permitiu examinar uma variedade de cenários e compreender como as propriedades das matrizes influenciam seus domínios numéricos.

Referências

- [1] JOHNSON, C. R. Numerical determination of the field of values of a general complex matrix. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 15, n. 3, p. 595–602, 1978.
- [2] HORN, R. A; JOHNSON, C. R. **Topics in matrix analysis**. Cambridge: Cambridge University press, 1991.
- [3] BENZI, M. Some uses of the field of values in numerical analysis. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana** v. 14, n. 1, p. 159–177, 2021.
- [4] LEVEQUE, Randall J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [5] DEKKER, N. P. **Joint numerical range and joint spectrum of Hilbert space operators**. 1969. 93 p. Thesis (PhD). Vrije Universiteit, Amsterdam, 1969.
- [6] DAVIS, C. The Toeplitz-Hausdorff theorem explained. **Canadian Mathematical Bulletin**, v. 14, n. 2, p. 245–246, 1971.
- [7] HALMOS, P. R. **A Hilbert space problem book**. Princeton: Van Nostrand, 1967.
- [8] DAVIS, C. The shell of a Hilbert-space operator. **Acta Scientiarum Mathematicarum**.(Szeged) v. 29, n. 1-2, p. 69–86, 1968.