



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Lucas Lima Ferreira

Campus II - Alagoinhas
Universidade do Estado da Bahia -
UNEB
novolucasferreira@hotmail.com

Jefferson Correia da Conceição

Campus II - Alagoinhas
Universidade do Estado da Bahia -
UNEB
jeffersoncorreia2@gmail.com

Maridete Cunha Brito Ferreira

Campus II - Alagoinhas
Universidade do Estado da Bahia -
UNEB
marideteferreira@yahoo.com.br

Desenvolvendo a visualização: uma prática envolvendo GeoGebra 3D e elementos da Geometria Descritiva

Developing visualization: a practice involving 3D GeoGebra and elements of Descriptive Geometry

Resumo

Este é um recorte de uma pesquisa que objetivou investigar se a prática em construir e projetar objetos geométricos através do Geogebra 3D, contribui com o desenvolvimento da Visualização. É uma pesquisa bibliográfica, experimental e qualitativa. Com a revisão de literatura compreendemos o fenômeno da Visualização, os benefícios do uso de softwares de geometria dinâmica no estudo de geometria e a contribuição da Geometria Descritiva com relação a imaginarmos objetos no espaço. A teoria que nos embasa é posta por Angel Gutiérrez com respeito a uma caracterização para a Visualização. Obtemos a resposta para a questão de pesquisa através de uma atividade aplicada em licenciandos de matemática da Universidade do Estado da Bahia. Em suma, com a análise dos dados coletados detectamos indícios de ganhos nas Habilidades de Visualização dos participantes.

Palavras-chave: Geogebra 3D. Geometria Descritiva. Visualização.

Abstract

This is part of a research that aimed to investigate whether the practice of building and designing geometric objects through 3D Geogebra contributes to the development of Visualization. It is a bibliographical, experimental and qualitative research. With the literature review we understand the phenomenon of Visualization, the benefits of using dynamic geometry software in the study of geometry and the contribution of Descriptive Geometry in relation to imagining objects in space. The theory that supports us is proposed by Angel Gutiérrez with respect to a characterization for Visualization. We obtained the answer to the research question through an activity applied to mathematics graduates at the State University of Bahia. In short, with the analysis of the collected data, we detected signs of gains in the participants' Visualization Skills.

Keywords: Geogebra 3D. Descriptive geometry. Visualization.





1 Introdução

Nossa pesquisa é motivada por vivências e percepções adquiridas durante a licenciatura em matemática. Uma parte dessas experiências estão concentradas nas dificuldades que enfrentamos com relação à transposição de enunciados de questões no tópico geometria de posição e na superação dessas dificuldades através do uso do Geogebra 3D. Além disso, a intuição de que os conhecimentos da Geometria Descritiva (GD) de alguma forma contribuem com a tarefa de “ver mentalmente” objetos geométricos no espaço, também nos motivou.

A partir disso decidimos investir sobre a junção desses dois recursos, GD e Geogebra 3D, com o seguinte intuito: de alguma maneira usa-los para contribuir com o ensino e aprendizagem de Geometria, mais especificamente com a transposição de enunciados de questões envolvendo objetos geométricos, assim como, melhorar em estudantes de matemática a capacidade de visualizar mentalmente configurações envolvendo objetos geométricos.

Assim, realizamos leituras de pesquisas antecedentes e encontramos em Palles e Silva (2012, p. 12) que “um dos principais problemas encontrados no ensino de Geometria é a dificuldade de Visualização”. Com respeito ao uso de softwares de geometria dinâmica em aulas de matemática Gutiérrez (1991, p. 4, tradução nossa) afirma que “essas novas possibilidades precisam ser investigadas e analisadas em profundidade, como primeiro passo para sua implementação em sala de aula”.

Dessa forma, Gutiérrez (1996, p. 5, tradução nossa) aponta que uma das vantagens no uso de softwares de geometria dinâmica é a possibilidade dos usuários de dinamicamente manipular e transformar objetos geométricos. Além disso, a representação do objeto geométrico oferecida pelo software pode configurar-se como uma novidade em relação as representações normalmente postas pelos livros didáticos.

Ainda na pesquisa bibliográfica verificamos que a GD, segundo Montenegro (2015) “se presta para desenvolver a habilidade de imaginar objetos ou projetos no espaço e não apenas leitura ou interpretação de desenhos”. Esses achados nos fizeram ter certeza acerca da relevância do tema e assim buscamos na literatura específica os resultados de pesquisas que tratam da Visualização.

Dentre os trabalhos que encontramos em busca do entendimento acerca da atividade cognitiva da Visualização, Gutiérrez (1996, p. 3, tradução nossa) nos chamou atenção, dado que, ele afirma: “a Visualização é uma das bases da cognição humana” e ainda, “as Habilidades de Visualização podem ser adquiridas e desenvolvidas”. Essas afirmações nos inquietaram, e nos indagamos, se essas Habilidades podem ser adquiridas e desenvolvidas, qual o papel do professor de matemática diante dessa possibilidade?

As leituras que realizamos nos deram embasamento para focar nosso objetivo geral: investigar se a prática em construir e projetar em planos, por meio do software Geogebra 3D, objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização. Assim, desenvolvemos a investigação em busca de responder a seguinte questão de pesquisa: em que medida a utilização do Geogebra 3D para construir e projetar em planos, objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização?

No próximo tópico apresentamos a fundamentação teórica da pesquisa, posteriormente a metodologia que foi adotada. E logo após, tratamos da atividade que construímos e aplicamos, junto às análises dos dados coletados. Por fim, encerramos com as considerações finais.



2 Observação perceptual sensorial (visualização)

Em busca de entendermos do que se trata a Visualização nos ocupamos em examinar os trabalhos de Angel Gutiérrez, com foco em seu título *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*, onde ele traz além de suas próprias convicções, diversos resultados propostos por autores importantes nessa área de estudo, tais como: Hoffer, Bishop, Yakimanskaya, Kosslyn, Presmeg, Dreyfus e outros mais. Esses resultados juntos nos possibilitam ter visão ampliada do assunto, uma vez que, a Visualização é objeto de estudo de diversos campos do conhecimento.

Gutiérrez (1996, p. 9, tradução nossa) afirma que a Visualização é “um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades”, constituída por quatro elementos principais: as Imagens Mentais, as Representações Externas, os Processos de Visualização e as Habilidades de Visualização.

Para entendermos do que se trata esses quatro elementos e como eles são integrados entre si, lembremos que estudantes de Matemática e Geometria vivem em um mundo concreto, mas constantemente precisam investigar objetos que não existem nesse mundo, existem apenas em ideias. No entanto, precisam ter acesso a esses objetos para examina-los e por isso é necessário representa-los em alguma plataforma física. É na relação entre objeto e a sua representação que vamos pontuar acerca dos elementos integradores da Visualização.

Segundo Gutiérrez (1996, p. 9, tradução nossa) as Imagens Mentais são “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais”. Ele ainda coloca que as Imagens Mentais são “as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relacionamentos, conceitos, etc” (Gutiérrez, 1991, p. 44, tradução nossa).

Já as Representações Externas são as representações do tipo verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, que contribuem com a criação ou transformação de Imagens Mentais (Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa). Isto é, quando acessamos o objeto matemático através de alguma de suas representações, se essa, está em nossa mente, então se trata de uma Imagem Mental. Mas, se a representação está em um meio físico, como por exemplo, desenhada em um papel, escrita em um quadro negro, exposta na tela do computador ou tablet ou até posta verbalmente, então é uma Representação Externa do objeto (FERREIRA, 2022, p. 35).

O acesso às “Representações Externas poderá se dá através da visão ocular, da audição - pois as Representações Externas são também postas verbalmente - ou através da Percepção Cinestésica” (FERREIRA, 2022, p. 35).

Com relação aos Processos de Visualização trata-se de ações mentais onde as Imagens Mentais estão envolvidas. Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) coloca que os Processos de Visualização ocorrem quando acessamos alguma informação e geramos Imagens Mentais ou quando acessamos as Imagens Mentais já existentes e a partir delas criamos alguma informação.

E as Habilidades de Visualização são capacidades próprias de nossa cognição que são responsáveis por impulsionar o funcionamento dos Processos de Visualização. Veja que Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) chama a atenção para o seguinte “os indivíduos devem adquirir e aprimorar um conjunto de Habilidades de Visualização para realizar os Processos necessários com Imagens Mentais específicas”.

Assim, consideramos que os Processos de Visualização tem a finalidade de movimentar Imagens Mentais e as Habilidades de Visualização de “nutri-los”, fortificando os Processos, a fins de que eles se tornem eficientes e dinâmicos nas tarefas de transformar informações em Imagens Mentais,



manipular as Imagens Mentais e criar informações a partir de Imagens Mentais já existentes.

Vale salientar que a formação de Imagens Mentais depende exclusivamente do nosso acesso a Representações Externas. Isto é, quando acessamos um objeto matemático através de alguma de suas representações, forma-se em nossa cognição, mais especificamente em nossa Memória Visual, uma imagem daquele objeto. Logo, quanto mais diversificado for o acesso a essas representações, maior e mais rico será nosso repertório de Imagens Mentais.

Apresentaremos a seguir um conjunto de Habilidades de Visualização, todas elas postas em Gutiérrez (1996), algumas expostas a partir de suas próprias percepções e outras provenientes das convicções de outros autores.

Habilidades de Visualização por McGee (1979, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 8, tradução nossa):

- Capacidade de determinar relações entre diferentes objetos;
- Capacidade de perceber padrões espaciais e compara-los entre si;
- Capacidade de compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação;
- Capacidade de visualizar uma configuração em que haja movimento entre suas partes.

Habilidades de Visualização por Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa):

- Constância Perceptiva - a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma Imagem Mental) são independentes da cor, tamanho, textura ou posição, e permanecer sem confusão quando um objeto é percebido em diferentes orientações;
- Percepção de Posições Espaciais - a capacidade de relacionar um objeto, imagem ou Imagem Mental a si mesmo;
- Percepção de Relações Espaciais – a capacidade de relacionar vários objetos e Imagens Mentais entre si, ou consigo mesmo.

Habilidades de Visualização por Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 8, tradução nossa):

- Gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação;
- Inspeccionar uma Imagem Mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos;
- Usar uma Imagem Mental para responder uma pergunta.

Habilidades de Visualização por Hoffer (1977, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa)

- Habilidade de Memória Visual que é responsável por lembrar de Imagens Mentais de objetos que não são mais vistos.

Habilidades de Visualização por Bishop (1983, *apud* Gutierrez, 1996, p. 7, tradução nossa)

- Habilidade de Processamento Visual da Informação, isto é, tradução de relações abstratas e dados não figurativos em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais e a transformação de uma imagem visual em outra.
- Habilidade da Interpretação da Informação Figurativa que envolve o conhecimento das convenções visuais e vocabulário espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos, e a leitura e interpretação de imagens visuais, seja mental ou física, para obter deles qualquer informação que ajude a resolver um problema.



3 Caracterização da pesquisa

Nossa pesquisa com relação ao delineamento técnico é bibliográfica, tendo como base livros, artigos, dissertações e teses, Gil (2002, p. 44) indica que a pesquisa bibliográfica é o primeiro passo para uma pesquisa científica.

A respeito do método utilizado é qualitativa, uma vez que, o objeto de estudo selecionado trata-se de uma atividade cognitiva (Visualização), não tendendo em geral à quantificação. Além disso, como estivemos envolvidos em todo o processo, desde vivências e intuições, e a partir de uma base teórica culminamos em uma hipótese, nossa pesquisa é de ação e participação.

Como selecionamos o objeto de estudo e agimos sobre ele através de formas de controle sobre as variáveis que poderiam influenciá-lo, através de uma atividade de investigação de autoria própria, nossa pesquisa experimental quanto aos objetivos. Fontelles (2009, p. 6) afirma a respeito das pesquisas experimentais que “pelo fato das variáveis poderem ser manipuladas pelo pesquisador, equívocos e vieses praticamente desaparecem, sendo por essa razão considerada o melhor tipo de pesquisa científica”.

4 Procedimentos metodológicos

Além de revisarmos uma bibliografia que foi essencial para nossa pesquisa, elaboramos situações-problema envolvendo configurações geométricas formadas por objetos bidimensionais e tridimensionais, as quais foram aplicadas da seguinte maneira:

- 1ª etapa - solicitamos aos participantes que solucionassem três problemas com recursos papel e lápis;
- 2ª etapa - realizamos uma oficina envolvendo construções geométricas no Geogebra 3D com os participantes;
- 3ª etapa - pedimos aos respondentes que analisassem as respostas dadas na 1ª etapa para cada questão e que avaliassem mudá-las ou complementá-las caso a participação na oficina oferecesse alguma mudança em suas ideias.

Para analisar os dados coletados realizamos gravações em áudio e recolhemos todos os registros gráficos elaborados pelos participantes. Aplicamos a técnica do emparelhamento nas análises dos dados, que conforme Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 138, 139) “consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio. Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles”.

Assim, emparelhamos as estratégias utilizadas na solução das questões com as Habilidades descritas por Gutierrez. Além disso, também emparelhamos as estratégias e soluções da 1ª e 3ª etapas entre si, a fins de observarmos as possíveis diferenças.

5 Atividade de investigação

Participaram da atividade de investigação sete (7) alunos de um curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia que já haviam cursado o componente Geometria Descritiva e estavam ou já haviam cursado o componente Geometria Espacial.



Os participantes foram divididos em pequenos grupos e solicitamos que toda e qualquer conversa entre eles fossem gravadas em áudio, via aplicativo de mensagem ou gravador de voz. A nossa ideia era ter no momento das análises esses registros para entender quais foram os caminhos e estratégias utilizadas para chegarem em suas respectivas conclusões.

Nomeamos os respondentes com letras do alfabeto - A,B,C,D,E,F e G - para possibilitar o anonimato de cada um com relação as suas respostas e *aplicamos as questões unicamente em forma de texto*, sem oferecer nenhum outro tipo de registro gráfico, a ideia é que eles tentassem “ver mentalmente” cada situação proposta.

Esse é um dos pontos centrais de nossa investigação: oferecermos a Representação Externa - nesse caso o enunciado da questão - unicamente em forma de texto para que ao acessá-la, o participante pudesse criar uma outra representação para a configuração oferecida, só que dessa vez em Imagens Mentais, e pudesse movimentá-las, transformando-as para obtenção da solução para o problema. O nosso papel foi aplicar o emparelhamento nas novas informações produzidas.

5.1 Situações-problema aplicada

Responda o que se pede e justifique como achar adequado, seja com textos, áudios ou desenhos.

- 1ª questão - Seja um triângulo qualquer ABC no espaço, projeta-se ABC simultaneamente nos três planos auxiliares de projeção. Comente sobre cada uma das situações descritas:
 - a - A projeção de ABC no plano horizontal (PH) é um segmento
 - b - A projeção de ABC no PH é um triângulo congruente a ABC
 - c - A projeção de ABC no PH é um triângulo que não é congruente a ABC
 - d - Ao projetarmos o triângulo ABC nos três planos de projeção simultaneamente obtemos em suas projeções pelo menos dois triângulos congruentes a ABC

5.2 Oficina com GeoGebra 3D

Nossa oficina aconteceu no Laboratório 1 de Informática do Campus II da UNEB, todos os sete (7) participantes da pesquisa estiveram presentes. Essa etapa teve uma duração de aproximadamente 120 minutos e nela realizou-se as construções propostas em paralelo há um constante diálogo acerca dos conhecimentos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva entre o mediador e os participantes. Uma das construções trabalhadas foi a seguinte:

- Sejam no espaço dois segmentos distintos AB e CD com mesmo comprimento, sendo que eles se interceptam exatamente em seus respectivos pontos médios. Projetamos ambos simultaneamente nos três planos de projeção, de maneira a responder o seguinte questionamento: se as projeções de AB e CD no PH e no PL forem um único traço, um plano alfa que contém essas projeções é oblíquo em relação ao PV? Nesse caso, se uma reta r contém a projeção de AB e CD no PH, qual a posição relativa entre a reta r e a Linha de Terra?

A seguir, na Figura 1 - clique no link e acesse: <https://www.geogebra.org/m/et6skqma> - apresentamos uma possível representação para a configuração posta no enunciado anterior, essa representação também servirá para relembrar o leitor acerca dos elementos da Geometria Descritiva que estão inseridos em nosso trabalho.

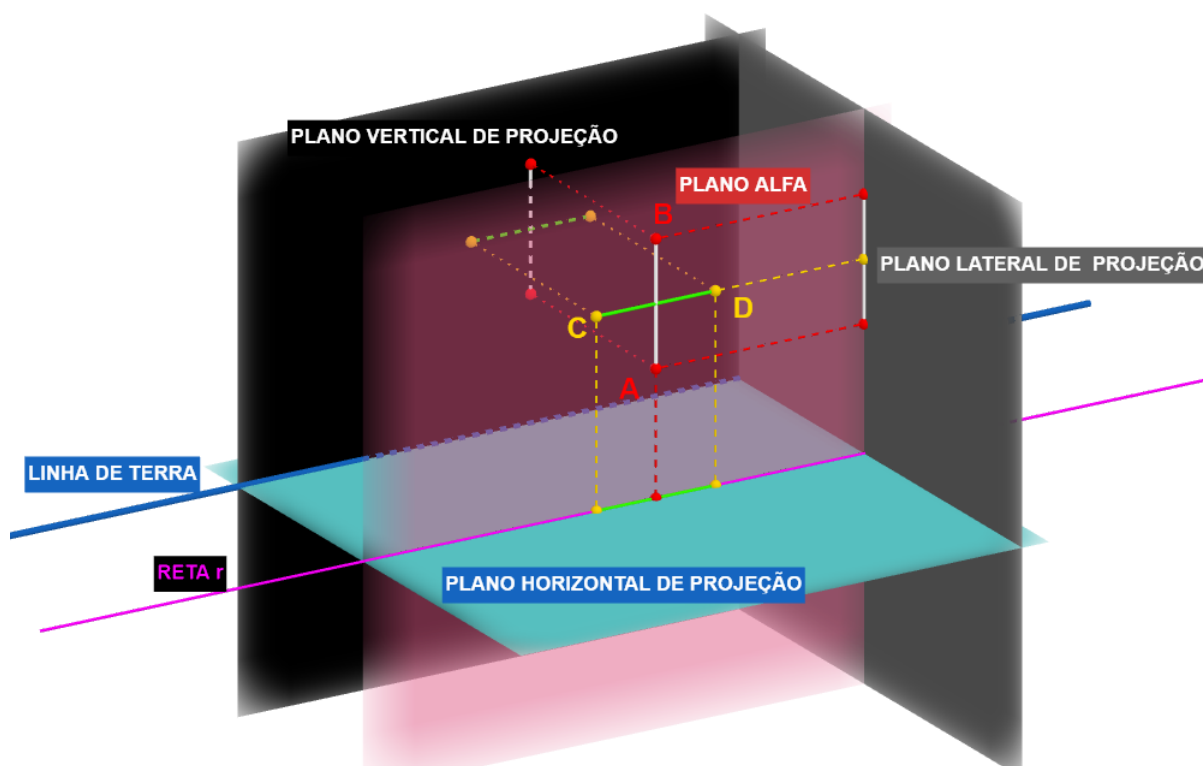


Figura 1: Segmentos AB e CD projetados simultaneamente no PH, PV e PL.

Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D.

6 Análise dos dados coletados

Dupla C e D - 1ª etapa, registro em áudio, referente ao item *a* da questão 1:

”A informação não é verdadeira, pois não se sabe ao certo como esse triângulo está disposto, se estiver paralelo ao plano vertical ou ao lateral aí sim sua projeção sobre o plano horizontal será um segmento”.

Nota-se que conseguiram visualizar que o paralelismo do triângulo ABC em relação aos PL e PV faz com que sua projeção seja um segmento no PH, no entanto, não identificaram que existe a possibilidade de que o triângulo ABC esteja oblíquo em relação ao PL e PV e mesmo assim esteja perpendicular em relação ao PH, sendo esse fator o que generaliza a condição para que sua projeção seja um segmento no PH.

Pelo exposto, conforme Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) os respondentes C e D apresentam as Habilidades de Percepção e Posições Espaciais concernentes a relacionar objetos e Imagens Mentais simultaneamente entre si. Inclusive apresentam outras duas Habilidades de Visualização como a capacidade de gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação e inspecionar uma Imagem Mental para observar sua posição ou a presença de partes ou elementos, além de usar uma Imagem Mental para responder uma pergunta (Kosslyn, 1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 8, tradução nossa).

A Figura 2 - clique no link e acesse: <https://www.geogebra.org/m/urwa4vpd> - traz uma representação de um triângulo ABC qualquer em posições distintas: na posição 1 ABC está paralelo ao PV e por isso sua projeção no PH é um segmento, na posição 2 ABC está paralelo ao PL, nesse caso sua projeção no PH também é um segmento, na posição 3 ABC está oblíquo em relação ao PV e PL, no

entanto, em relação ao PH está perpendicular. A condição de perpendicularidade em relação ao PH é o que generaliza a possibilidade da projeção de ABC ser um segmento no PH.

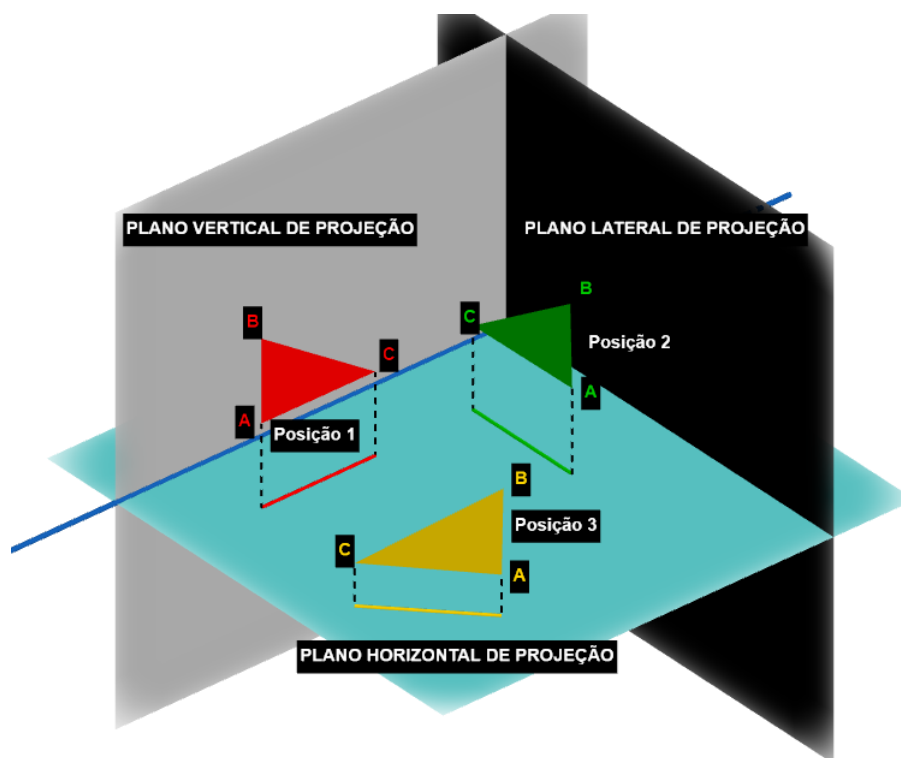


Figura 2: Triângulo ABC em três posições distintas, projetado no PH.
Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D.

Participante C - 3ª etapa, registro em áudio, reconsiderações para o item *a* da questão 1:

”Vou manter minha resposta mas vou acrescentar a questão do plano que contém ABC, em vez de argumentar que o plano que contém o triângulo deveria ser paralelo ao PV e PL, eu deveria ter argumentado que o plano que contém ABC deveria ser perpendicular ao PH, para que a projeção fosse um segmento”.

As reconsiderações feitas pelo respondente C na 3ª etapa mostram que ele concebeu novas Imagens Mentais a partir da participação na oficina, veja que ele coloca “vou acrescentar a questão do plano que contém ABC” e, além disso, ele encontra um fator de generalização para que a projeção de ABC no PH seja um segmento. Inclusive ele amplia seu campo de visão com relação as relações existentes entre esse novo plano que ele conseguiu conceber com respeito a posição entre a projeção de ABC e aos planos de projeção.

Assim, ele conseguiu melhorar as Habilidades postas por Kosslyn (1980, *apud* Gutierrez, 1996, p.8, tradução nossa) na medida em que gerou Imagens Mentais mais completas com relação à configuração geométrica posta no enunciado da questão.

Comparando as respostas do participante C, evidencia-se indícios de ganhos nas Habilidades de Visualização, isto porque ele conseguiu visualizar uma generalização para o caso em que a projeção de ABC no PH é um segmento, fato que não ocorreu na primeira etapa da pesquisa. Assim, conforme Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) o participante melhorou sua Percepção de Relações e Posições Espaciais uma vez que foi capaz de inspecionar melhor as novas Imagens Mentais observando de maneira mais geral quais possibilidades poderiam ser levadas em conta para



que a afirmação posta no enunciado fosse verdadeira (FERREIRA, 2022, p. 75).



Dupla A e B - 1ª etapa, registro em áudio e texto, referente aos itens a , b , c e d da questão 1:

Diálogo registrado em áudio:

- Participante B - “não”
- Participante A - “o triângulo?”
- Participante B - “3D?”
- Participante A - “se é no espaço”
- Participante A - “no plano seria um triângulo, mas se tá no espaço seria uma pirâmide, né não?”
- Participante A - “seja um triângulo no espaço, se é no espaço, então é uma pirâmide”
- Participante A - “como é que você vai ter a figura plana no espaço, tem como?”
- Participante A - “no espaço o triângulo vai ser representado por uma pirâmide, não?”

No diálogo acima é evidente uma confusão acerca da natureza e caracterização do triângulo ABC, notamos que a dupla A e B não concebe a ideia de que uma figura plana pode estar no espaço, com isso, baseado em Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) percebe-se que a Habilidade Constância Perceptiva está prejudicada ou não desenvolvida (FERREIRA, 2022, p. 58).

Registro escrito

- Solução para o item a - “é um segmento”
- Solução para o item b - “não, porque será um segmento”
- Solução para o item c - “não, porque será um segmento”
- Solução para o item d - “a afirmação é falsa, pois obtemos apenas um triângulo congruente a ABC”

Dupla A e B - 3ª etapa, registro em áudio, reconsiderações para os itens a, b, c e d da questão 1:

- Item a - “a gente viu que se o plano em que ABC está contido for paralelo ao PH essa projeção estará em verdadeira grandeza, mas se esse plano não for paralelo ao plano horizontal a projeção de ABC será um segmento nesse PH”
- Item b - “se esse plano, o plano que contém ABC, for paralelo ao PH, então ele será sim congruente a ABC e não um segmento como colocamos na 1ª etapa”
- Item c - “uma projeção de ABC só será congruente se o plano que contém ABC for paralelo ao plano auxiliar em questão”
- Item d - “aí nesse caso, a projeção só vai está em verdadeira grandeza em um dos planos, porque ele vai tá paralelo a esse plano, e aí nos outros dois planos será um segmento”

Após o emparelhamento entre os dados obtidos na 1ª e 3ª etapas, observamos indícios de melhoria na Habilidade Interpretação da Informação Figurativa definida por Bishop (1983, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 7, tradução nossa). Essa percepção fundamenta-se no melhoramento da qualidade das justificativas, - mesmo que essas justificativas não generalizem cada caso - inclusive em suas Imagens Mentais passam a conceber a existência de um plano que contém o triângulo ABC, e condicionam a posição de ABC com relação aos planos de projeção à posição desse plano que contém ABC em relação aos planos de projeção (FERREIRA, 2022, p. 73).

Essa melhora nas justificativas e as mudanças nas respostas incorretas para respostas corretas, embora não completas, são reflexos da criação de Imagens Mentais mais eficazes com relação ao configuração geométrica proposta. Isto é, a dupla conseguiu melhorar as Habilidades definidas por Kosslyn (1980, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 8, tradução nossa), à medida que foram geradas Imagens Mentais mais eficientes para solução da questão, inspecionaram de maneira mais completa as novas Imagens Mentais e à usaram para responder uma pergunta de maneira mais satisfatória (FERREIRA, 2022, p. 73).

Há ganhos também na Habilidade de Visualização Percepção de Relações Espaciais definida por Gutiérrez (1996, p. 10, tradução nossa) porque passam a relacionar a posição do triângulo ABC com relação aos planos de projeção com a posição do plano que contém o triângulo ABC em relação aos planos de projeção (FERREIRA, 2022, p. 73).

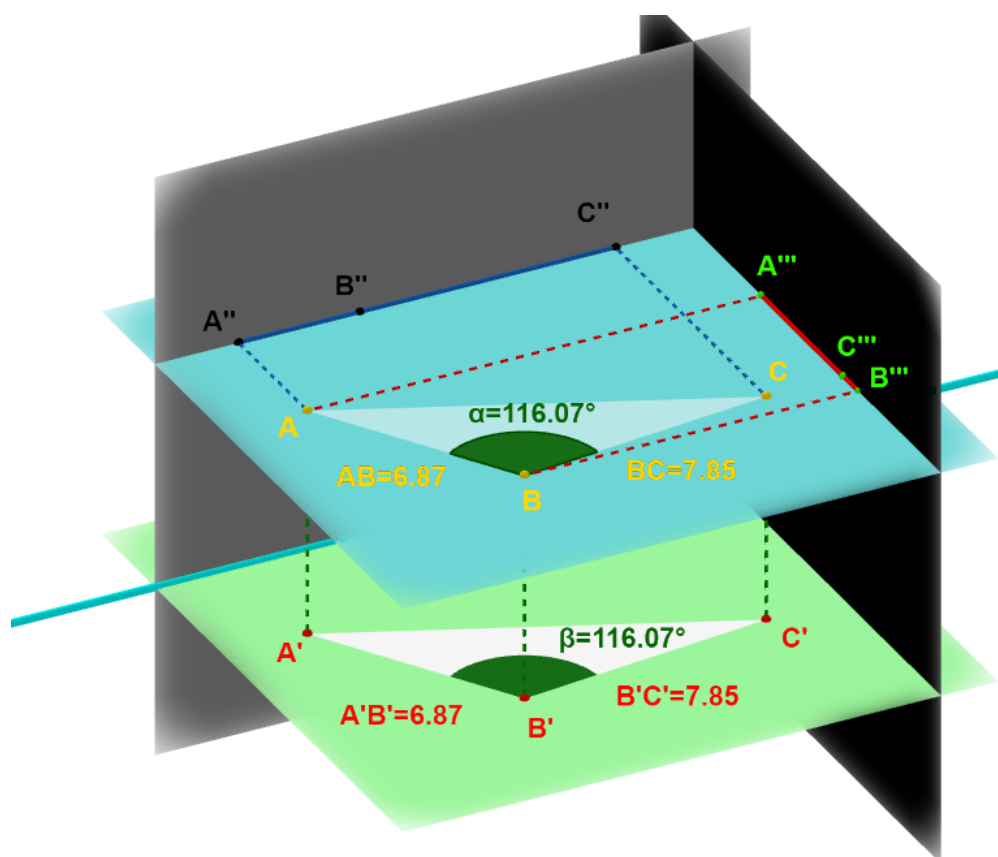


Figura 3: Triângulo ABC paralelo ao PH.
Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D.

Observamos que passam a caracterizar a grandeza da projeção de ABC de acordo com a posição do plano que contém ABC em relação aos planos de projeção. Essa percepção é clara quando B afirma na 3ª etapa, referindo-se ao item *b*: "se esse plano, o plano que contém ABC, for paralelo ao PH, então ele será sim congruente a ABC e não um segmento como colocamos na 1ª etapa". Esse "ele" que o respondente B coloca, está se referindo à projeção de ABC (FERREIRA, 2022, p. 73).

Para pensarmos um pouco a respeito dos itens *b*, *c* e *d* da questão 1, que tratam de projeções que podem ou não serem congruentes ao próprio ABC, trazemos nas Figura 3 e 4, construções mostrando algumas diferenças nas grandezas das projeções de ABC a depender de sua posição com relação aos planos de projeção.

Na Figura 3 - clique no link e acesse: <https://www.geogebra.org/m/a8tkw73b> - temos um triângulo ABC qualquer paralelo ao PH, nessa caso a projeção de ABC no PH é a sua verdadeira grandeza. Verificamos através das ferramentas de medição de segmentos e ângulos que os segmentos $AB = 6,87$ e $A'B' = 6,87$ são congruentes entre si, assim como os segmentos $BC = 7,85$ e $B'C' = 7,85$. Os ângulos $\alpha = 116,07^\circ$ e $\beta = 116,07^\circ$ também são congruentes entre si então, pelo caso lado, ângulo, lado temos que ABC é congruente a $A'B'C'$. Como ABC está perpendicular ao PL e ao PV, suas projeções nesses planos são reduzidas a um traço.

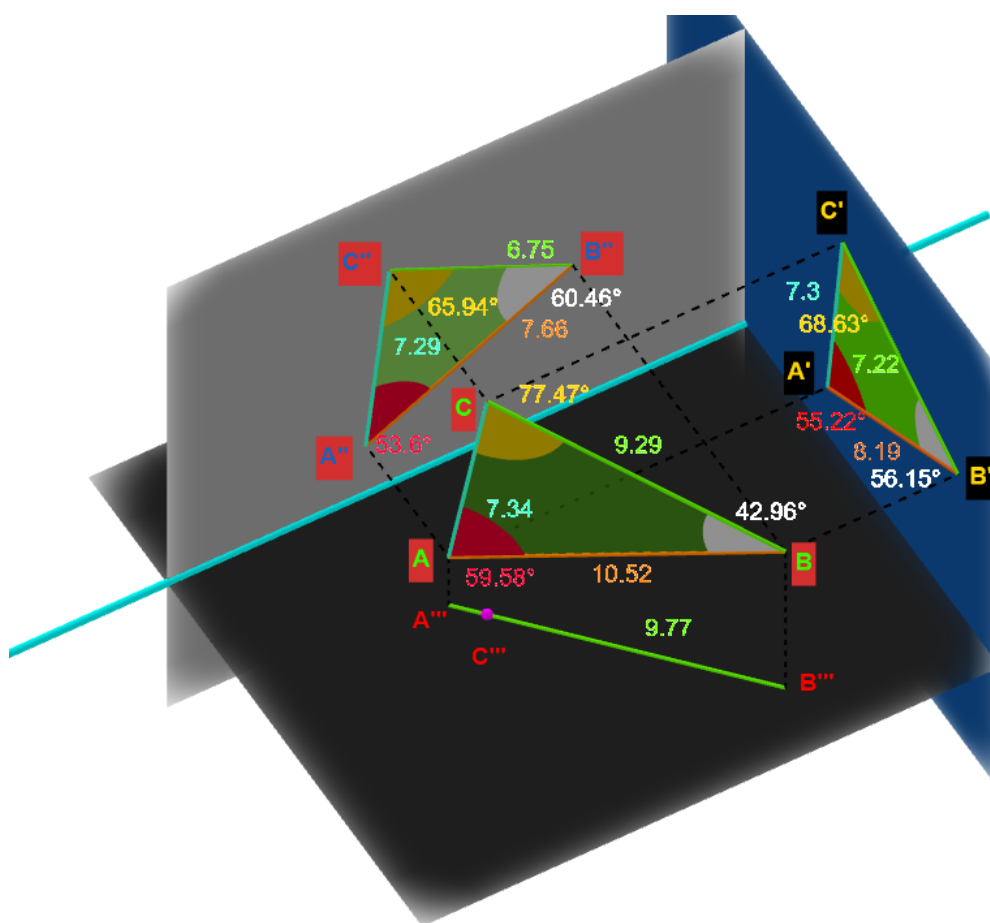


Figura 4: Triângulo ABC oblíquo ao PV e PL, porém perpendicular ao PH.
Fonte: Própria autoria, construção via Geogebra 3D.

Chamamos atenção para o fato de que os participantes acessaram a Representação Externa de cada configuração geométrica posta nos enunciados, e como, cada enunciado é composto por partes



mais elementares que o todo, como por exemplo: espaço, triângulo, projeção, plano de projeção, etc, que comparando-os com o enunciado inteiro são mais simples de se visualizar, evidencia-se nessa prática a movimentação da Habilidade de Memória Visual que serve para lembrar de Imagens Mentais e objetos que não são mais vistos, conforme Hoffer (1977, *apud* Gutiérrez, 1996, p. 9, tradução nossa).

Apresentamos na Figura 4 - clique no link e acesse: <https://www.geogebra.org/m/mrgyhknq> - uma situação onde um triângulo ABC qualquer está oblíquo em relação ao PV e PL, no entanto, perpendicular ao PH. Verificamos através das ferramentas de medições do Geogebra 3D, que não há congruência entre os ângulos de ABC e A'B'C', assim como, entre os segmentos que se constituem como lados de ABC e A'B'C', por isso ABC e A'B'C' não são congruentes. Logo, a projeção de ABC no PV, nesse caso não é a sua verdadeira grandeza.

7 Considerações finais

Nossa pesquisa objetivou investigar se a prática em construir e projetar, por meio do Software Geogebra 3D, objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais em planos, poderia contribuir para o desenvolvimento da Visualização. Assim, aplicamos a atividade investigativa e verificamos com a análise dos dados coletados, indícios de melhoramento nas Habilidades de Visualização dos participantes (FERREIRA, 2022, p. 76).

Sendo assim, concluímos que os dados obtidos em nossas análises nos permitem responder nossa questão de pesquisa, sendo ela a seguinte: em que medida a utilização do Geogebra 3D, para construir e projetar objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais em planos, contribui para o desenvolvimento da Visualização?

Afirmamos que a utilização do Geogebra 3D para realizar nossa prática contribui com o desenvolvimento da Visualização dos participantes, na medida em que, percebemos indícios de melhoramento da atividade de gerar Imagens Mentais e com isso ampliar o repertório de Imagens Mentais, além de potencializar a capacidade de inspeção dessas Imagens. Observamos também a ampliação do campo de Visualização, ou seja, os respondentes passaram a “ver mentalmente” as situações postas nos enunciados mais globalmente (FERREIRA, 2022, p. 76).

Portanto, como compreendido nos estudos da teoria que nos embasa, o desenvolvimento das Habilidades de Visualização incide diretamente no aprimoramento da Visualização, que por sua vez constitui-se como um dos tipos de raciocínios que compõe o Pensamento Matemático, com isso, concluímos que este também foi beneficiado (FERREIRA, 2022, p. 76).

Assim, a prática que defendemos constitui-se como um instrumento que pode ser usado pelo professor para potencializar o ensino e aprendizagem da Matemática e Geometria como um todo, pois a capacidade de uso do pensamento matemático configura-se como um dos objetivos mais fundamentais do ensino da Matemática (FERREIRA, 2022, p. 77).

Admoestamos que a prática sugerida é algo a ser realizada com mediação, no sentido de que, o diálogo entre o mediador e os alunos a respeito dos conhecimentos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva que estão envolvidos é parte importante dessa atividade.

Concluímos que os estudos realizados constituem-se como uma responsabilidade que está proposta no âmbito da Educação Matemática, sendo que, está posto uma oportunidade para o professor de matemática em suas aulas, de ser um facilitador de avanços nas atividades cognitivas dos alunos (FERREIRA, 2022, p. 77).



8 Referencias bibliográficas

FERREIRA, L. L. **Geometria descritiva e Geogebra 3D: uma prática para desenvolvimento da Visualização**. 2022. 85 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado da Bahia, Alagoinhas, 2022.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores associados, 2006.

FONTELLES, M. J. et al. Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa. **Revista Paraense de Medicina**, v. 23, n. 3, p. 1-8, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

GUTIÉRREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. *In*: CONGRESO INTERNATIONAL SOBRE INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA, 3., 1991, Valencia. **Memorias** [...]. Valencia: 1991. p. 44-59.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSUCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. **Proceedings**[...]. Valencia, Spain: IGPME, 1996. p. 3-19, v. 1.

LIMA, M. L. da S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo Geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p.199–221, 2018.

MONTENEGRO, G. A. **Geometria descritiva**. São Paulo: Blucher, 2015.

OLIVEIRA, D. V. **Visualização espacial no ensino fundamental: rotações no Geogebra**. 2021. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

PALLES, C. M.; SILVA, M. J. F. da. Visualização em geometria dinâmica. **Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, v. 1, n. 1, p. 1-19, 2012. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/issue/archive>. Acesso em: 20 ago. 2023.