

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664

v. 24, 2024

Artigo de Iniciação Científica

Henrique Casellato Vitorio Rodrigues da Costa

DCM/FFCLRP

Universidade de São Paulo

hcasellato@usp.br

Tiago de Carvalho

DCM/FFCLRP

Universidade de São Paulo

tiagocarvalho@usp.br

Introdução ao Modelo de Roche

Introduction to the Roche Model

Resumo

O objetivo deste trabalho é examinar o Modelo de Roche criado pelo astrônomo e matemático francês Édouard Roche, suas implicações para o estudo de sistemas binários próximos e analisar uma forma simplificada do mesmo, a fim de entender, na prática e em um nível de iniciação científica, suas propriedades, seus equipotenciais e o limite de Roche. O artigo apresenta em uma primeira parte de iniciação em conceitos de sistemas binários, energia potencial e o problema dos dois corpos, além das ferramentas de linearização que serão necessárias para a investigação do problema. Uma segunda parte do artigo é dedicada à contextualização da problemática e o motivo pelo qual existiu, no passado, a necessidade da criação de um novo modelo matemático para o estudo de estrelas binárias próximas. Por fim, serão usados todos os conceitos apresentados nas seções anteriores para estudar, de uma forma substancialmente simplificada, um sistema binário com uma função que define seus equipotenciais.

Palavras-chave: modelo de Roche. sistemas binários próximos. estrelas binárias próximas. equipotencial. linearização. limite de roche. problema de Roche.

Abstract

The goal of this work is to examine the Roche Model created by the French astronomer and mathematician Édouard Roche, its implications for the study of close binary systems, and to analyze a simplified form of the problem, in order to understand, in practical and at an undergraduate research level, its properties, their equipotentials and the Roche limit. The article introduces a first part of initiation into the concepts of binary systems, potential energy, and the two body problem, and presents the linearization tools necessary to investigate the problem. The second part of the article focuses on contextualizing the problem and why there was a reason, in the past, to create a new mathematical model for the study of close binary stars. Finally, all the concepts presented in the previous sections will be used to study, in a substantially simplified way, a binary system with a function that defines its equipotentials.

Keywords: Roche model. close binary systems. close binary stars. equipotential. linearization. roche limit. roche problem.



1 Introdução

Quando se pensa em tratar do problema de Roche, é necessária uma pequena introdução às estrelas binárias próximas, já que o Modelo de Roche (que será explicitado mais à frente) parte dessa base teórica. Após tal introdução conceitual, será estudada, nesse artigo, uma simplificação desse modelo, já que o estudo dele em seus detalhes está fora do escopo de uma pesquisa em iniciação científica.

Para o completo entendimento tanto da simplificação quanto do modelo em si, iremos fazer uma breve introdução aos conceitos de energia em sistemas dinâmicos, já que o modelo em questão trata de curvas de energia potencial constantes. Ademais, também será explicitado uma introdução ao problema dos dois corpos, pois o problema de Roche é, em linhas gerais, um problema dos três corpos restritos.

2 Linearização

Definição 1 Um ponto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ é chamado de ponto de equilíbrio ou ponto crítico de um sistema não linear

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

se $f(x_0) = 0$. Um ponto de equilíbrio x_0 é chamado de ponto de equilíbrio hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz das derivadas parciais de f , $Df(x_0)$ de (1) tem parte real nula. O sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad (2)$$

com a matriz $A = Df(x_0)$ é chamada de linearização (1) em x_0 .

Dado o sistema não linear (1), é possível determinar qualitativamente seu comportamento local perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico por meio do comportamento do sistema linear (2) com a matriz $A = Df(x_0)$, perto da origem. A função linear $Ax = Df(x_0)x$ é chamada de *parte linear de f em x_0* . Se $x_0 = 0$ é um ponto de equilíbrio de (1), então $f(0) = 0$ e, pelo Teorema de Taylor,

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Segue que a função linear $Df(0)x$ é uma boa primeira aproximação para a função não linear $f(x)$ perto de $x = 0$ e é razoável esperar que o comportamento da linearização de (1) em $x = 0$ é aproximadamente o comportamento do sistema em si perto de $x = 0$.[†]

3 Energia em um sistema mecânico

Para introduzir o conceito de energia em um sistema mecânico, considere uma partícula sob ação de um campo de forças $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ com trajetória $x(t)$. A *energia cinética* da trajetória $x(t)$ no tempo t é

[†]É mostrado na seção 2.7 da referência (Perko, 1991) que este é o caso de fato se a matriz $Df(0)$ não tem autovalores nulos ou puramente complexos.

$$E_c(x'(t)) = \frac{1}{2}mx'(t)^2,$$

a *energia potencial* da trajetória $x(t)$ no tempo t é

$$U(x(t)) = - \int_{x_0}^{x(t)} f(y)\Delta y,$$

e a *energia total* da trajetória $x(t)$ no tempo t é a soma de suas energias cinética e potencial, ou seja,

$$E(x, x'(t)) = \frac{1}{2}mx'(t)^2 + U(x(t)).$$

O valor da constante x_0 escolhida na definição de energia potencial não é muito importante pois é mais natural pensar que a energia potencial é uma função E_p que depende apenas da posição $x \in \mathbf{R}$, isto é, $E_p(x_1) = U(x_1) = - \int_{x_0}^{x_1} f(y)\Delta y$ (o que na verdade se quer é $U'(x) = -f(x)$). Em outras palavras, o potencial U é definido a menos de uma constante aditiva: $U(x)$ ou $U(x) + \alpha$ (sendo α uma constante real) definem o mesmo campo de forças e portanto produzem o mesmo efeito no modelo. Por outro lado, a energia cinética depende somente da velocidade.

Por fim, a energia total é uma função de ambas as variáveis no espaço de fase, ou seja, $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$. Para unificar a escrita, é comum considerar as energias cinética e potencial definidas no mesmo espaço de fase (x, \dot{x}) , mesmo que dependam somente de uma dessas variáveis. Portanto, com $E_c, E_p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dadas como $E_c(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}$ e $E_p(x, \dot{x}) = U(x)$ resultam em:

$$E_t(x, \dot{x}) = E_c(x, \dot{x}) + E_p(x, \dot{x}).$$

Um campo de forças $f(x)$ definido em \mathbf{R} é dito *conservativo* se existe uma função $U(x)$, denominada como potencial de f , tal que

$$U'(x) = -f(x).$$

Como assume-se que f só depende da posição x , sempre se obtém U : basta tomar qualquer primitiva de f .

Teorema 2 (Teorema da Conservação da Energia Total) *Considere um campo de forças $f(x)$ conservativo e com potencial $U = E_p$. Se $x(t)$ satisfaz a Lei de Newton, $mx''(t) = f(x(t))$, então é constante a energia total ao longo de $x(t)$.*

Definição 3 *Uma integral primeira de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem $x' = F(x)$ definida em aberto $A \subset \mathbf{R}^n$ é uma função $W : A \rightarrow \mathbf{R}$ que é diferenciável e não constante em qualquer aberto contido em A , mas que é constante ao longo de cada trajetória da equação diferencial, ou seja, que $W'(x(t)) = 0$ para qualquer solução $x(t) \in \mathbf{R}^n$ de $x' = F(x)$.*

Pelo Teorema da Conservação da Energia Total, E_t é uma integral primeira da equação diferencial de primeira ordem $(x', \dot{x}') = z' = F(z) = F(x, \dot{x}) = (\dot{x}, \frac{1}{m}f(x))$ associada ao sistema mecânico $mx''(t) = f(x(t))$ e portanto cada solução $z(t) = (x(t), x'(t))$ permanece dentro de exatamente uma única curva de nível $E(x, \dot{x})$ constante da função energia total.

Definição 4 Uma equação diferencial (ou campo de vetores) de primeira ordem em $A \subset \mathbf{R}^n$, $x' = F(x)$, é dita integrável se existe um número suficiente de integrais primeiras, a ponto de permitir identificar as curvas (conjunto de pontos do \mathbf{R}^n) definidas pelas trajetórias do sistema.

Definição 5 Diz-se que são linearmente independentes as $n-1$ integrais primeiras W_1, W_2, \dots, W_{n-1} se, para todo $x \in A$, sejam linearmente independentes os vetores $\nabla W_1(x), \nabla W_2(x), \dots, \nabla W_{n-1}(x)$. Segue, do teorema da função implícita, que $n-1$ integrais primeiras linearmente independentes permitem identificar as curvas soluções da equação diferencial $x' = F(x)$.

Em conclusão, o Teorema da Conservação da Energia Total permite identificar o conjunto dos pontos nas curvas soluções no caso de sistemas conservativos unidimensionais com potencial U pois as curvas soluções estão contidas dentro das curvas de nível da função energia total, $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$. Para sistemas mecânicos em dimensão maior (com campos de forças em \mathbf{R}^2 ou em \mathbf{R}^n) a energia total por si só não permite identificar as soluções e são necessárias mais integrais primeiras, as quais nem sempre existem em número suficiente para que as trajetória do sistema possam ser identificadas.

4 Problema dos dois corpos

Considere um sistema onde duas partículas de massas m_1 e m_2 com posições x_1 e x_2 que deslocam-se livremente sobre \mathbf{R}^3 . Foi observado por Newton que cada partícula exerce, sobre a outra, uma força de atração gravitacional de intensidade $G \frac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2}$, onde G é a constante de gravitação universal. A direção da força de atração f criada pela partícula de massa m_2 que age sobre a de m_1 parte de x_1 para x_2 (e vice-versa). Pode-se supor que o sistema de coordenadas está em repouso e centrado no centro de massa das partículas.

Na análise de campos de forças em duas e três dimensões (Lopes, 1998), a lei de Newton $mx'' = f(x)$ define uma equação diferencial de segunda ordem em \mathbf{R}^3 ou uma de primeira ordem em \mathbf{R}^6 . Também, quando uma das duas partículas (m_1) tem massa muito maior que a outra, pode-se supor que o sistema de coordenadas considerado está centrado em x_1 . Considere, portanto, o campo de forças

$$f(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$$

com $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 - \{0, 0, 0\}$, que corresponde, por exemplo, à força de atração da Terra sobre a Lua (de maneira aproximada). Para simplificar, será considerado um sistema de coordenadas normalizado em que $Gm_1m_2 = 1$ com m_1 e m_2 as massas da Terra e da Lua, respectivamente. Essa hipótese não causa problema maior no resultado final da análise, pois isto seria possível com uma mudança de coordenadas linear em x e as conclusões que são interessantes para o decorrer do capítulo não dependem dessas mudanças.

Definição 6 Um campo de forças $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ é dito central se $f(x)$ for sempre colinear com a reta passando por 0 e $x \in \mathbf{R}^n$.

Proposição 7 Seja f um campo de forças conservativo com potencial U , ou seja, $f = -\nabla U$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

As demonstrações dos teoremas, proposições e lemas presentes nessa seção podem ser encontrados no livro *Introdução à mecânica clássica* (Lopes, 1998).

i) f é central;

ii) Existe uma função $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = h(\|x\|)x$

iii) Existe uma função $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $U(x) = g(\|x\|)$

Definição 8 O produto vetorial de dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbf{R}^3 é o vetor $u \times v \in \mathbf{R}^3$ definido por

$$u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right).$$

Em termos geométricos, o produto vetorial $u \times v \in \mathbf{R}^3$, de $u, v \in \mathbf{R}^3$ não colineares, é o vetor $u \times v = \|u\|\|v\| \sin \theta N$ onde N é o vetor unitário perpendicular aos vetores multiplicados (que segue a regra da mão direita).

Proposição 9 Se $x(t)$ descreve o movimento de uma partícula sob a ação de um campo central em \mathbf{R}^3 , então $x(t) \times x'(t)$ é constante

Corolário 10 O movimento de uma partícula sob a ação de um campo central em \mathbf{R}^3 fica restrito a um plano. Mais precisamente, a trajetória $x(t) \in \mathbf{R}^3$ do campo nunca sai do plano determinado por $x(0)$ e $x'(0)$.

Observação 11 Pela Proposição (9), se $x(t)$ é a solução de um problema mecânico sujeito a um campo de forças central, então

$$x \times x' = (x_2x'_3 - x_3x'_2, x_3x'_1 - x_1x'_3, x_1x'_2 - x_2x'_1) = (c_1, c_2, c_3) = \text{constante}.$$

Considere a equação diferencial de primeira ordem na variável $(x, \dot{x}) \in \mathbf{R}^6$ dada por

$$\begin{cases} x' = \dot{x} \\ \dot{x}' = \frac{1}{m}f(x) \end{cases}$$

onde $(x, \dot{x}) = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ e f é um campo de forças central. Foi mostrado na Proposição (9) que a função $W : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \mapsto x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2$$

é uma integral primeira desta equação. Na verdade, foram obtidas três integrais primeiras no resultado sobre a conservação do produto vetorial em um campo central.

Pelo Corolário (10), podemos considerar a lei de Newton restrita a um plano, que nada mais é do que uma cópia do \mathbf{R}^2 ; mudando-se as coordenadas, é possível supor que este plano é o \mathbf{R}^2 . O novo campo de forças f , que é a restrição ao \mathbf{R}^2 do antigo campo de forças f definido em \mathbf{R}^3 , é dado naturalmente por:

$$f(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$$

com $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$. Devido à simetria circular deste campo de forças, é natural considerar coordenadas polares; nestas, a trajetória do campo f é dada por $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$.

Definição 12 O momento angular de um sistema mecânico dado em coordenadas polares é

$$h(r, \dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}.$$

O momento angular de uma curva $x(t) = (r(t), \theta(t))$ em coordenadas polares é dado por $h(t) = mr^2(t)\theta'(t)$.

Teorema 13 (Conservação do momento angular) Para uma partícula movendo sob ação de um campo central, o momento angular h é constante.

Com a energia total e o momento angular, somente seria necessária mais uma integral primeira distinta em \mathbf{R}^4 para identificar as curvas descritas pelas trajetórias da equação diferencial $x' = F(x)$ em \mathbf{R}^4 definida por f . Para isso, supõe-se que $h = mr(t)^2\theta'(t) \neq 0$, pois, se para um certo t_0 isso acontece, pelo teorema de conservação do momento angular o mesmo acontece para todo t . Em particular, $\theta'(t) \neq 0$ para todo t e pode-se escrever r como função de θ , $r = r(\theta)$.

Denota-se

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

Lema 14 Se $x(t) = (r(t), \theta(t)) = (r(\theta(t)), \theta(t))$ é solução do problema dos dois corpos, então

$$T = E_c = \frac{h^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

onde $h = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular (constante).

E então, à partir da prova do lema (14), obtemos a seguinte relação entre r e θ

$$r(\theta) = \frac{h^2/m}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (3)$$

que é a equação de uma cônica em coordenadas polares de excentricidade e . A depender de e , esta cônica é

Hipérbole	\iff	$e > 1$	\iff	$E > 0$
Parábola	\iff	$e = 1$	\iff	$E = 0$
Elipse	\iff	$e < 1$	\iff	$E < 0$

pois a excentricidade e é dada por

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{m}}.$$

Em conclusão, foi obtido uma relação entre r e θ , ou seja, foi encontrada a terceira e última integral primeira. Portanto, o problema dos dois corpos é integrável; as trajetórias $(x(t), \dot{x}(t))$ do sistema são tais que as curvas $x(t)$ determinam elipses, hipérbolos ou parábolas, dependendo de e .

Observação 15 Se $V(r) = U(r) + h^2/2r^2$ é o potencial de um sistema mecânico unidimensional, então pelo Teorema de Conservação de Energia Total, têm-se

$$m \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = E_T(r, \dot{r}) = c$$

onde c é uma constante que depende só da trajetória, ou seja, $r(t)$ satisfaz

$$\frac{r'^2}{2} + U(r) + \frac{h^2}{2r^2} = c.$$

Teorema 16 Se $x(t) = (r(t), \theta(t))$ descreve em coordenadas polares o movimento de uma partícula de massa 1 sob a ação de um campo central conservativo em \mathbf{R}^2 com potencial $U(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = g(r)$, então r varia como em um problema mecânico unidimensional conservativo, com potencial dado por

$$V(r) = g(r) + \frac{h^2}{2r^2}$$

onde h é o momento angular, constante.

Por fim, é importante ressaltar que no problema dos três corpos em \mathbf{R}^3 , já não se consegue encontrar um número suficiente de integrais primeiras para identificar soluções e que para campos não centrais, nada do que foi feito nesta seção pode ser utilizado.

5 Estrelas binárias próximas

Pela noite, é possível observar diversos pontos de luz, que podem ser divididos em diversas categorias. Existem, dentre essas categorias, as estrelas que são verdadeiramente únicas (como o Sol ou a supergigante azul Icarus), que podem ter diversos corpos celestes em sua órbita (como o próprio Sistema Solar em que a Terra se encontra). Alguns desses pontos de luz podem ser pares de estrelas, com dois componentes movendo em órbitas ligadas ao seu centro de massa, que são chamados de *Sistemas de Estrelas Binárias* ou somente *Estrelas Binárias*. Ao focar na evolução estelar desses sistemas, aqueles em que o caminho evolutivo de uma estrela é alterado significativamente pela presença da outra, podem ser considerados *Sistemas de Estrelas Binárias Próximas*.

Em específico nas estrelas binárias próximas, as perturbações e interações entre essas estrelas impedem que sejam analisadas simplesmente pela teoria newtoniana. Considera-se, primeiramente, uma teoria de desvios do formato esférico ideal de uma estrela, que explica completamente os fenômenos observáveis de *movimento apsidal*, *circularização* das órbitas e a *sincronização* de períodos estelares axial-rotacionais e orbitais. Estrelas em sistemas binários dessa forma se encontram *acopladas por maré*, da forma em que dois dos hemisférios dessas estrelas estão frente a frente, enquanto que os outros dois são permanentemente evitados.

Pelo fato de estrelas binárias próximas sofrerem distorções extremas de seu formato, tornou-se necessário uma reformulação dos modelos anteriores, essa reformulação foi nomeada *Modelo de Roche*. Esse modelo considera o potencial gravitacional total de um sistema de dois pontos de massa que se movem em órbitas circulares próximas ao seu baricentro. Também, esse modelo foi bem sucedido no estudo de diversas configurações de estrelas binárias próximas, além de considerar a transferência de massa e momento angular entre as estrelas, ou seja, o Modelo de Roche é crucial para o estudo de sistemas binários próximos.

6 Modelo de Roche

O Modelo de Roche para estrelas binárias tem seu nome à partir do matemático francês Edouard Roche, que investigou a matemática do *problema dos três corpos restritos*. Esse problema consiste

em duas massas que movem-se em órbitas circulares ao redor de seu centro de massa, enquanto um terceiro corpo de massa infinitesimal se desloca no campo gravitacional dos outros dois.

Para um determinado valor do potencial gravitacional total Φ que é experimentado pelo terceiro corpo, uma superfície hipotética tridimensional pode ser construída ao redor das duas massas que representaria a região do espaço onde o movimento dessa terceira partícula seria nula em relação ao sistema de coordenadas que percorreria uniformemente essas órbitas. Para uma gama de Φ , essas *superfícies de velocidade zero* perto de cada ponto de massa estão aninhadas ao redor de cada um desses pontos, enquanto que as mais distantes estão englobando as duas massas.

Dessa forma, essas superfícies de velocidade nula são idênticas às *superfícies de potencial gravitacional constante* em um sistema de dois corpos. A superfície de uma estrela é uma superfície equipotencial e então, uma descrição dessa superfície provê um meio de quantificar o formato de superfícies estelares em um sistema binário.

A origem está no centro de massa da estrela mais massiva (de massa M) e roda com velocidade angular ω constante. A estrela menos massiva, de massa m , está a uma distância $a \equiv 1$ da origem. Com um sistema de referência em rotação, as posições das duas estrelas estão fixadas em $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Logo, o potencial gravitacional Φ experimentado em uma posição $P(x, y, z)$ é a soma de seus dois potenciais ponto-massa e o potencial rotacional, nomeadamente,

$$\Phi = -\frac{GM}{r_1} - \frac{Gm}{r_2} - \frac{\omega^2}{2} \left[\left(x - \frac{m}{M+m} \right)^2 + y^2 \right],$$

onde $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$. Com $a \equiv 1$ e rotação síncrona em uma órbita circular,

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 = \frac{G(M+m)}{a^3} = G(M+m).$$

Define-se uma quantidade $\Phi_n = -2\Phi/G(M+m)$ e uma razão de massa $q = m/M$ com $q \in (0, 1]$, então

$$\Phi_n = \frac{2}{(1+q)r_1} + \frac{2q}{(1+q)r_2} + \left(x - \frac{q}{1+q} \right)^2 + y^2.$$

A quantidade Φ_n é o potencial normalizado e pode ser calculado em qualquer posição (x, y, z) ao redor dos dois pontos de massa.

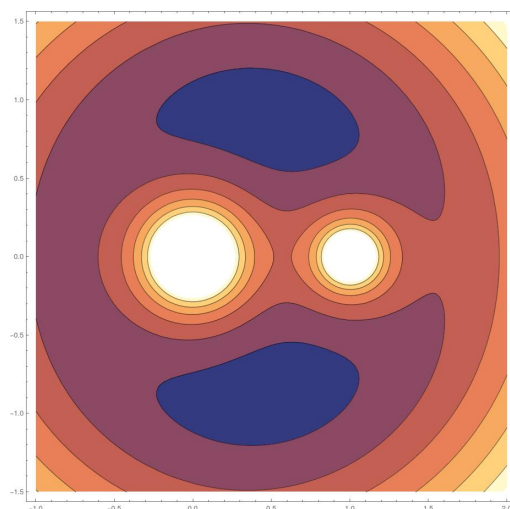


Figura 1: Potencial normalizado Φ_n com $q = 0.5$

O *limite de Roche* é o que define dois volumes, os *lóbulos de Roche*, que são limitantes pois especificam o volume máximo que uma estrela pode ocupar em sistema binário e ter todos os seus constituintes (átomos, íons, etc).

7 Simplificação do modelo de Roche

Para o escopo dessa pesquisa, será estudado o sistema de equações que imita os equipotenciais de Roche:

$$\Phi(x) = \begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 + x \end{cases}$$

com retrato de fase:

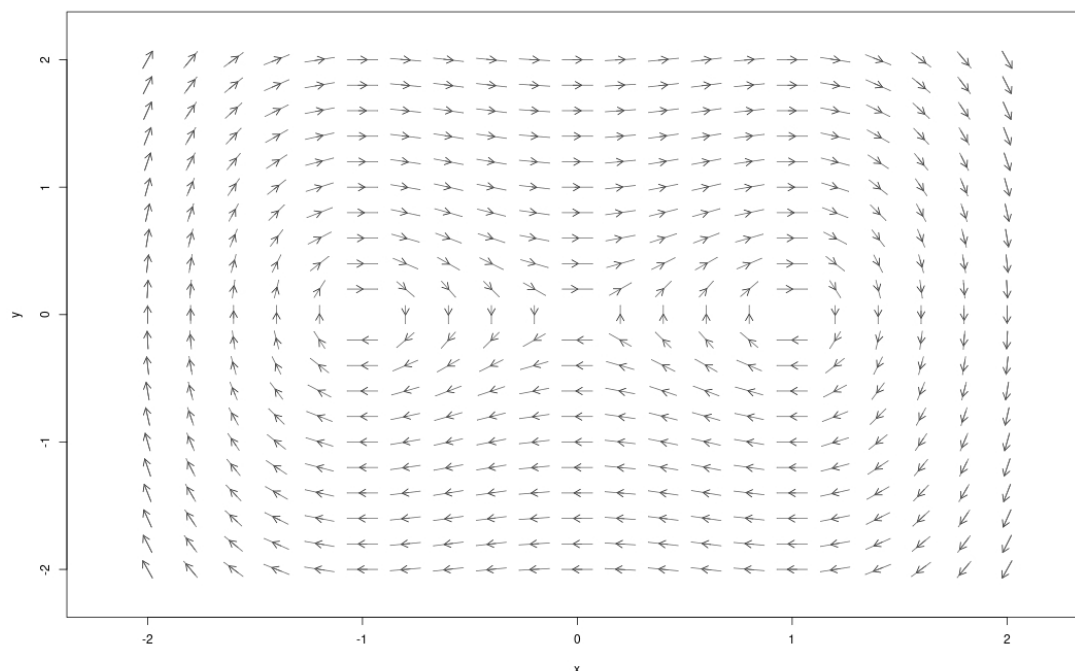


Figura 2: Retrato de fase da função $\Phi(x)$

Seus pontos de equilíbrio são obtidos da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x(1-x^2) \end{bmatrix}.$$

Logo, é trivial que os pontos de equilíbrio serão $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$ e $x_3 = (-1, 0)$. Sua matriz jacobiana será

$$A = D\Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 + 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para x_1 ,

$$D\Phi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_{1,2} = \pm 1$ e portanto, ponto sela em $f(x_1)$. Agora, para os pontos x_2 e x_3 ,

$$D\Phi(x_2) = D\Phi(x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, portanto não são pontos de equilíbrio hiperbólicos e não podem ser analisados por linearização como no ponto x_1 . Alternativamente, serão analisados por suas curvas de nível. Para obter a equação do potencial Φ , é trivial que

$$\begin{aligned}\langle \nabla \Phi, \Phi \rangle &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Phi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Phi_2 &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(y) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(-x^3 + x),\end{aligned}$$

então $\Phi_x = x^3 - x$ e $\Phi_y = y$. Portanto, integrando as duas funções Φ e as juntando, têm-se a equação do potencial:

$$\Phi = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + k,$$

sendo k uma constante qualquer. Para analisar suas curvas de nível (quando $\Phi = 0$), a equação pode ser rearranjada da forma

$$y = \pm \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2} - 2k} \quad (4)$$

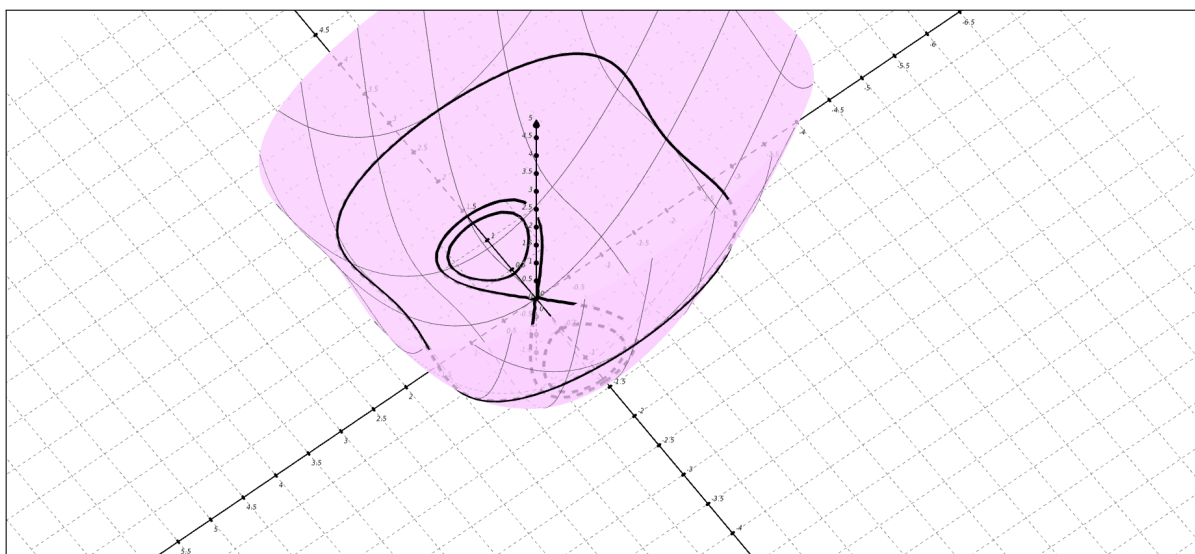
e a equação dentro da raiz quadrada $u(x) = \epsilon - (\epsilon^2/2) - 2k$ (com $\epsilon = x^2$) tem raízes em $\epsilon = 1 \pm \sqrt{1 - 4k}$, ou seja, as raízes x_i com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ da Equação (4) são

$$\begin{aligned}x_1 &= +\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4k}}, & x_2 &= +\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4k}}, \\ x_3 &= -\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4k}}, & x_4 &= -\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4k}}.\end{aligned}$$

Ao analisar a quantidade de raízes reais em relação ao intervalo I de valores de k , descobre-se que existem quatro situações:

- i) Quando $k = 1/4$, existem só duas raízes $x_1 = 1$ e $x_4 = -1$, justamente os pontos de equilíbrio $x_2 = (1, 0)$ e $x_3 = (-1, 0)$;
- ii) Quando $I = (0, 1/4)$, existem quatro raízes;
- iii) Quando $k = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, ou seja, para a simplificação dos equipotenciais de Roche em questão, há o *limite de Roche*. As outras duas raízes serão $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_4 = -\sqrt{2}$;
- iv) Por fim, quando $I = (-\infty, 0)$, serão duas raízes.

Abaixo, pode ser visualizada a função Φ com curvas de nível nos casos *ii*, *iii* e *iv*:



8 Agradecimentos

Artigo realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2022/10534-1. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

9 Bibliografia

GRAYLING, M. J. phaseR: an R package for phase plane analysis of autonomous ODE systems. *The R Journal*, v. 6, n. 2, p. 43–51, 2014.

HILDITCH, R. W. **An introduction to close binary stars**. 1ª Edição. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

HOHENWARTER, M. et al. GeoGebra. 2023. <http://www.geogebra.org/calculator>.

LOPES, Artur O. **Introdução à mecânica clássica. Monografias de Matemática**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

MATHEMATICA. Version 13.3. [Champaign, IL]: Wolfram, 2023. Disponível em: www.wolfram.com/mathematica. Acesso em: 22 set. 2023.

PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1991.