

Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664

v. 24, 2024

Artigo de Iniciação Científica

**Juan López Linares**

Universidade de São Paulo (USP),  
Faculdade de Zootecnia e Engenharia  
de Alimentos (FZEA), Pirassununga,  
jlopez@usp.br

## Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva: cinco problemas resolvidos propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

Theorems of Menelaus, Pascal and Ceva: five solved problems proposed for the International Mathematics Olympiad

### Resumo

Os Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva estabelecem condições necessárias e suficientes para a concorrência e colinearidade de determinadas retas e pontos. Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes, que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores, que atuam no ensino e interessam-se em desafios olímpicos. Outros assuntos lembrados são: quadriláteros inscritíveis, semelhança, potência de ponto, base média, incentro e homotetia.

**Palavras-chave:** Menelaus. Pascal. Ceva. GeoGebra. Olimpíada Internacional de Matemática.

### Abstract

The Theorems of Menelaus, Pascal and Ceva establish necessary and sufficient conditions for the concurrence and collinearity of certain lines and points. Five problems proposed for the International Mathematics Olympiad are discussed in detail. The proofs involved in the solutions are complemented by the availability of the respective links to the interactive figures using GeoGebra. It is expected that the article can be appreciated both by students preparing for the final stages of national or international competitions and by teachers interested in Olympic challenges. Other topics that appear are: quadrilaterals, similarity, point power, median base, incenter and homothety.

**Keywords:** Menelaus. Pascal. Ceva. GeoGebra. International Mathematics Olympiad.





# 1 Introdução

Os Teoremas de Menelaus, Pascal e Ceva estabelecem condições necessárias e suficientes para a concorrência e colinearidade de determinadas retas e pontos. Um artigo anterior (Santos *et al*, 2021) discutiu alguns problemas interessantes que serviram de ponto de partida deste. Adicionalmente, este texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil.

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, *International Mathematical Olympiad*) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Os objetivos são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (*LongList*, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (*ShortList*, SL). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

Na seção 2, por completeza, discutem-se as proposições que serão utilizadas na solução dos cinco problemas da seção 3. As resoluções neste artigo complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focou-se na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores conseguissem acompanhar o desenvolvimento do problema. Como complemento, uma versão interativa de cada uma das figuras do texto está disponibilizada no site do GeoGebra.

Por simplicidade, dados dos pontos  $A$  e  $B$ , denota-se a reta  $AB$ , o segmento  $AB$  e a medida do segmento  $AB$  da mesma forma. A diferenciação será feita pelo texto. As áreas serão representadas utilizando  $[\ ]$ .

## 2 Conceitos básicos

### 2.1 Teorema de Menelaus

O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três pontos sejam colineares. Não será utilizada a notação de segmentos orientados. Isto é, vale que as medidas de  $AB$  e  $BA$  coincidem.

**Teorema 1** (Menelaus). *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $X, Y$  e  $Z$  pontos (diferentes de  $A, B$  e  $C$ ) sobre as retas  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então os pontos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \quad (1)$$

*Demonstração.* (Ida) Inicialmente suponha-se que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares (Figura 1). Sejam  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  as perpendiculares traçadas a partir de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, à reta  $XZ$ .

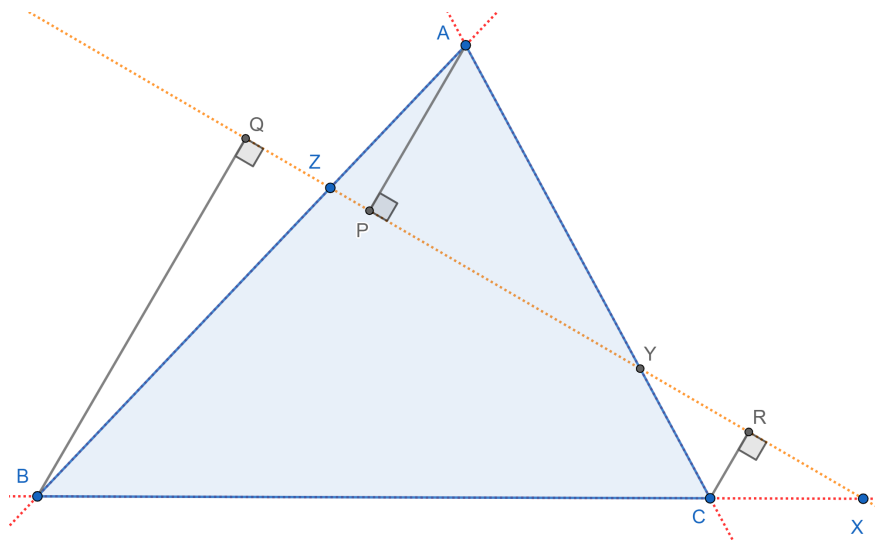


Figura 1: Ida do Teorema de Menelaus. Por hipótese os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares. Versão interativa [aqui](#).

Os pares de triângulos retângulos  $BQX$  e  $CRX$ ,  $APY$  e  $CRY$  e  $APZ$  e  $BQZ$ , são semelhantes pelo critério AA. Então,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BQ}{CR},$$

$$\frac{CY}{AY} = \frac{CR}{AP},$$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{AP}{BQ}.$$

Segue que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BQ}{CR} \cdot \frac{CR}{AP} \cdot \frac{AP}{BQ} = 1.$$

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  não são colineares, mas vale a equação (1). Seja o ponto  $Z' = XY \cap AB$  (Figura 2).

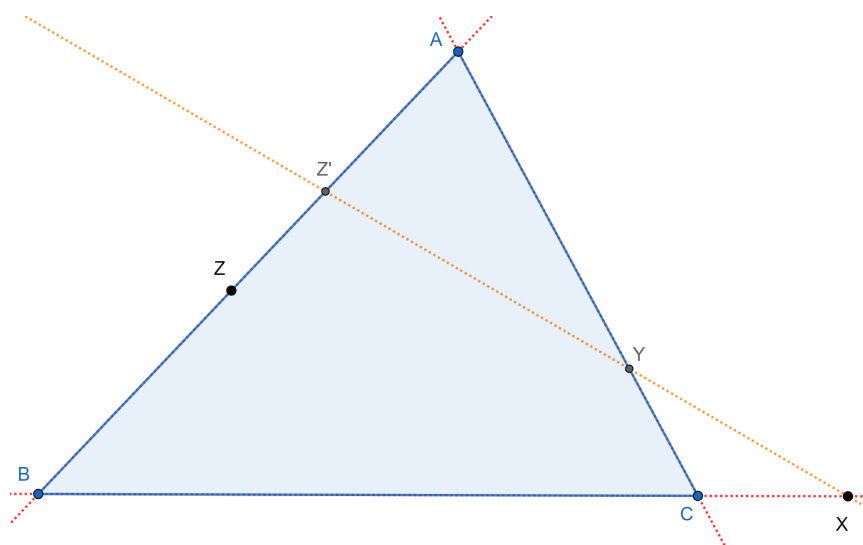


Figura 2: Volta do Teorema de Menelaus. Por hipótese vale a equação (1). Versão interativa [aqui](#).

Pela Ida do Teorema de Menelaus vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}, \\ \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

Como  $Z$  e  $Z'$  pertencem ao segmento  $AB$  o resultado anterior é uma contradição. Ou seja,  $Z = Z'$ .  $\square$

No caso em que mais de um dos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pertencem aos prologamentos dos lados do triângulo  $ABC$ , o teorema anterior ainda é válido.

## 2.2 Teoremas de Pascal

**Teorema 2 (Pascal).** *Se  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são pontos distintos sobre uma circunferência  $\gamma$ , então os pontos  $X = AB \cap DE$ ,  $Y = BC \cap EF$  e  $Z = CD \cap FA$  são colineares.*

Na versão interativa da Figura 3 é possível deslocar os pontos sobre uma circunferência  $\gamma$  e verificar a colinearidade de  $X, Y$  e  $Z$ . O hexágono  $ABCDEF$  não precisa ser convexo.

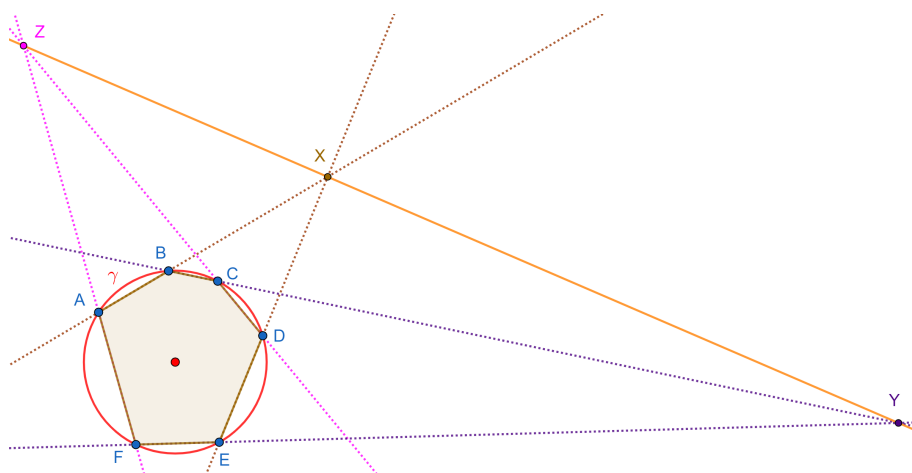


Figura 3: Teorema de Pascal. Versão interativa [aqui](#).

*Demonstração.* Sejam os pontos  $M = CD \cap EF$ ,  $N = AB \cap CD$  e  $O = AB \cap EF$  (Figura 4). Como os pontos  $X, Y$  e  $Z$  pertencem aos prolongamentos dos lados do  $\triangle MNO$  quer-se mostrar que:

$$\frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM} = 1.$$

Nesse caso, pelo Teorema 1 (Menelaus), os pontos  $X, Y$  e  $Z$  são colineares. Para tal aplica-se três vezes o Teorema 1 (Menelaus) ao  $\triangle MNO$  e os pontos colineares:

$$X, D, E \rightarrow \frac{MD}{DN} \frac{NX}{XO} \frac{OE}{EM} = 1,$$

$$Y, C, B \rightarrow \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{OY}{YM} = 1,$$

$$Z, A, F \rightarrow \frac{MZ}{ZN} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM} = 1.$$

Multiplicam-se as três equações anteriores e agrupam-se as frações:

$$\left( \frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM} \right) \left( \frac{MD}{DN} \frac{OE}{EM} \frac{MC}{CN} \frac{NB}{BO} \frac{NA}{AO} \frac{OF}{FM} \right) = 1.$$

A potência dos pontos  $M, N$  e  $O$  relativos a  $\gamma$  pode ser escrita de duas formas equivalentes em cada caso. Isso justifica reescrever o segundo parenteses na equação anterior:

$$\left( \frac{MZ}{ZN} \frac{NX}{XO} \frac{OY}{YM} \right) \left( \frac{MC \cdot MD}{ME \cdot MF} \right) \left( \frac{NA \cdot NB}{NC \cdot ND} \right) \left( \frac{OE \cdot OF}{OA \cdot OB} \right) = 1.$$

Como os três últimos parêntesis são todos iguais a um, o teorema fica provado. □

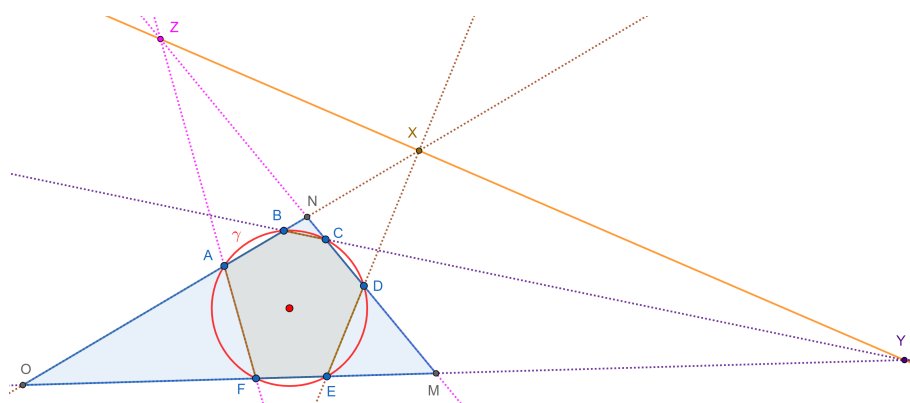


Figura 4: Demonstração do Teorema de Pascal. Versão interativa [aqui](#).

### 2.3 Áreas para calcular razão de segmentos

**Proposição 3.** *Seja  $ABC$  um triângulo,  $P$  um ponto no interior deste e  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de interseção das semirretas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  com os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Defina-se  $K_A = [PBC]$ ,  $K_B = [PCA]$  e  $K_C = [PAB]$ . Então*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A},$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \quad \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B}, \quad \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

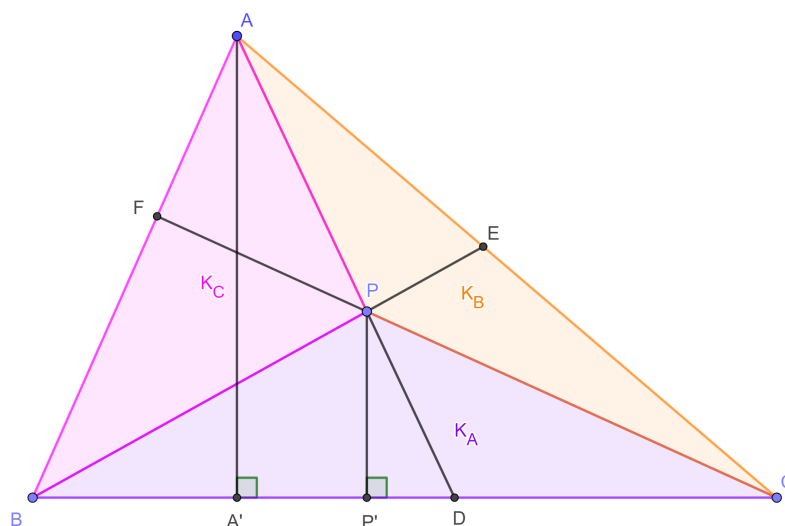


Figura 5: Áreas para calcular razão de segmentos. Versão interativa [aqui](#).

*Demonstração.* Sejam  $A'$  e  $P'$  as projeções ortogonais dos pontos  $A$  e  $P$  sobre a reta  $BC$  (Figura 5).



1. Como os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  têm a mesma altura  $AA'$  pode ser escrito:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD]}{[ACD]}. \quad (2)$$

Analogamente, como os triângulos  $PBD$  e  $PCD$  têm a mesma altura  $PP'$  tem-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[PBD]}{[PCD]}. \quad (3)$$

Combinando as razões em (2) e (3) encontra-se:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[ABD] - [PBD]}{[ACD] - [PCD]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Similarmente demonstram-se as outras duas frações.

2. Pelo critério de semelhança AA vale que  $\triangle ADA' \sim \triangle PDP'$ . Segue que:

$$\frac{AP}{PD} + 1 = \frac{AP + PD}{PD} = \frac{AD}{PD} = \frac{AA'}{PP'}. \quad (4)$$

Por definição vale que  $[ABC] = K_A + K_B + K_C$ . Como os triângulos  $ABC$  e  $PBC$  têm a mesma base pode ser escrito:

$$\frac{AA'}{PP'} = \frac{[ABC]}{[PBC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} = 1 + \frac{K_B + K_C}{K_A}. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4) e simplificando encontra-se:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstram-se as outras duas frações.

□

## 2.4 Teorema de Ceva

**Definição 4** (Cevianas). *Dado um triângulo é denominada ceviana a qualquer segmento de reta que liga um dos vértices a um ponto do lado oposto a esse vértice ou ao prolongamento desse lado.*

O Teorema a seguir lida com critérios necessários e suficientes para que três cevianas sejam concorrentes.

**Teorema 5** (Ceva). *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $X, Y$  e  $Z$  pontos (diferentes de  $A, B$  e  $C$ ) sobre as retas  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então as retas  $AX, BY$  e  $CZ$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \quad (6)$$

*Demonstração.* (Ida) Inicialmente suponha-se que as retas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são concorrentes num ponto  $P$  interior ao  $\triangle ABC$  (Figura 6).

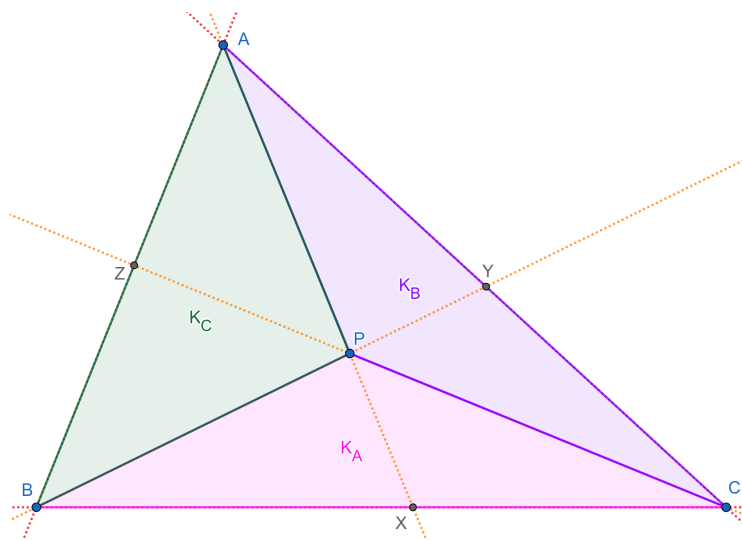


Figura 6: Ida do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes em  $P$ . Versão interativa [aqui](#).

Define-se  $K_A = [PBC]$ ,  $K_B = [PCA]$  e  $K_C = [PAB]$ . Pela Proposição 3 vale que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{K_C}{K_B}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{K_A}{K_C}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

Segue que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{K_C}{K_B} \cdot \frac{K_A}{K_C} \cdot \frac{K_B}{K_A} = 1.$$

(Volta) Agora suponha-se, por absurdo, que as retas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  não são concorrentes, mas vale a equação (6). Sejam os pontos  $P = AX \cap BY$  e  $Z' = CP \cap AB$  (Figura 7).

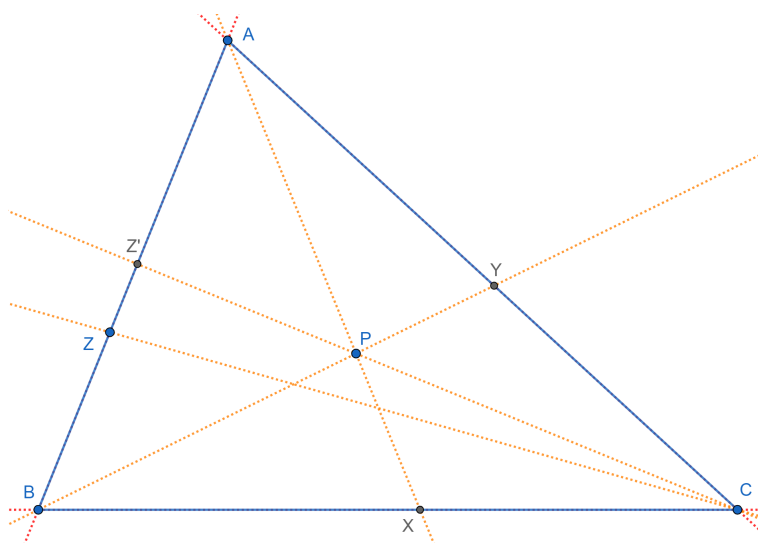


Figura 7: Volta do Teorema de Ceva. Versão interativa [aqui](#).





Pela ida do Teorema de Ceva vale que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{Z'B}, \\ \frac{AZ'}{Z'B} &= \frac{AZ}{Z'B}. \end{aligned}$$

Como  $Z$  e  $Z'$  pertencem ao segmento  $AB$  o resultado anterior é uma contradição. Ou seja,  $Z = Z'$ .  $\square$

## 2.5 Forma trigonométrica do Teorema de Ceva

**Teorema 6** (Forma trigonométrica de Ceva). *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $X, Y$  e  $Z$  pontos (diferentes de  $A, B$  e  $C$ ) sobre as retas  $BC, CA$  e  $AB$ , respectivamente. Então as retas  $AX, BY$  e  $CZ$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\text{sen}(\angle BAX)}{\text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CBY)}{\text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACZ)}{\text{sen}(\angle ZCB)} = 1. \quad (7)$$

*Demonstração.* A Figura 8 mostra o caso de cevianas concorrentes no ponto  $P$  interior ao  $\triangle ABC$ .

Pelo Teorema 5 (Ceva), as cevianas  $AX, BY$  e  $CZ$  são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

O resultado anterior, pela Proposição 3, é equivalente a:

$$\frac{[APB]}{[APC]} \cdot \frac{[BPC]}{[BPA]} \cdot \frac{[CPA]}{[CPB]} = 1.$$

Cada uma das áreas é calculada como:

$$\frac{AP \cdot AB \cdot \text{sen}(\angle BAX)}{AP \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{BP \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle CBY)}{BP \cdot AB \cdot \text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{CP \cdot AC \cdot \text{sen}(\angle ACZ)}{CP \cdot BC \cdot \text{sen}(\angle ZCB)} = 1.$$

Simplificando conclui-se:

$$\frac{\text{sen}(\angle BAX)}{\text{sen}(\angle XAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CBY)}{\text{sen}(\angle YBA)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACZ)}{\text{sen}(\angle ZCB)} = 1.$$

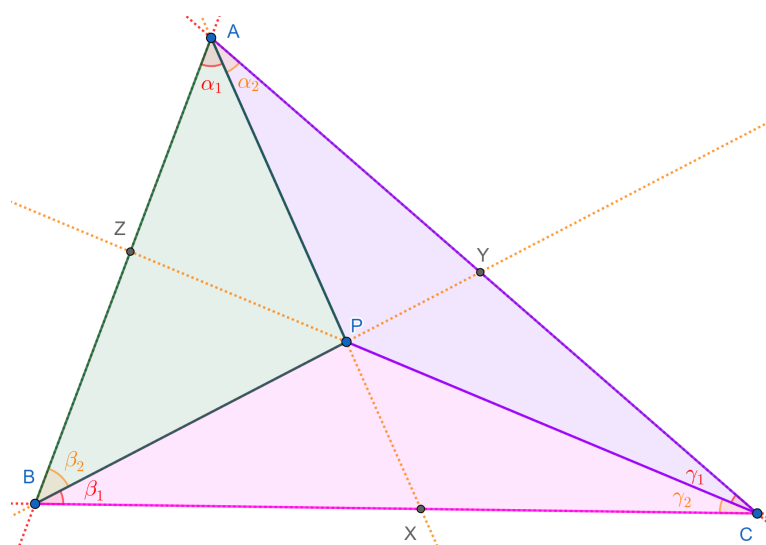


Figura 8: Forma trigonométrica do Teorema de Ceva. Cevianas concorrentes no ponto  $P$  interior ao  $\triangle ABC$ . Versão interativa [aqui](#).

□

**Corolário 7** (Outra representação do Teorema de Ceva). *Com referência a Figura 8, sejam  $\angle BAX = \alpha_1$ ,  $\angle XAC = \alpha_2$ ,  $\angle CBY = \beta_1$ ,  $\angle YBA = \beta_2$ ,  $\angle ACZ = \gamma_1$  e  $\angle ZCB = \gamma_2$ . As cevianas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\text{sen}(\alpha_1) \text{sen}(\beta_1) \text{sen}(\gamma_1) = \text{sen}(\alpha_2) \text{sen}(\beta_2) \text{sen}(\gamma_2).$$

*Demonstração.* Segue diretamente de (7).

□

### 3 Problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

#### 3.1 Teorema de Menelaus. Incentro. Potência de Ponto. P9 SL IMO 1995.

**Problema 1.** *O círculo inscrito do  $\triangle ABC$  toca  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Seja  $X$  um ponto dentro do  $\triangle ABC$  tal que o círculo inscrito do  $\triangle XBC$  toque  $BC$  em  $D$ , e toque  $CX$  e  $XB$  em  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Provar que  $EFZY$  é um quadrilátero inscrito.*

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada. Este é o P9 da SL, proposto pela delegação da Turquia (Djukic *et al*, 2011).

##### 3.1.1 Resolução do Problema 1.

Sejam  $k_1$  e  $k_2$  os círculos inscritos dos  $\triangle ABC$  e  $\triangle XBC$ , respectivamente. Adicionalmente, seja  $k_3$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle EFZ$  e  $I$  o incentro do  $\triangle ABC$ . Para satisfazer as condições do problema o ponto  $I'$ , incentro do  $\triangle XBC$ , deve pertencer ao segmento  $ID$ . A Figura 9 mostra uma construção geométrica inicial.

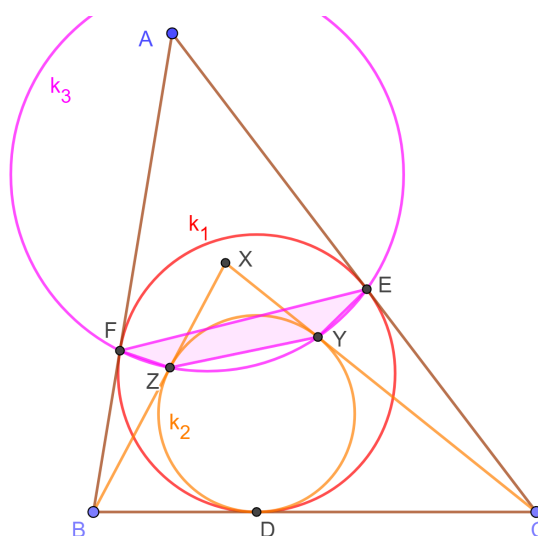


Figura 9: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Devido a tangência de  $k_1$  e  $k_2$  com os lados dos  $\triangle ABC$  e  $\triangle XBC$  e o ponto  $D$  ser comum para  $k_1$  e  $k_2$  segue que:

$$BD = BZ = BF, \quad (8)$$

$$CD = CY = CE, \quad (9)$$

$$AE = AF, \quad (10)$$

$$XY = XZ. \quad (11)$$

Inspirados no Teorema de Menelaus, e utilizando as quatro equações anteriores, pode ser escrito:

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{CD}{AF} \cdot \frac{AF}{BD} = \frac{CD}{BD}, \quad (12)$$

$$\frac{CY}{YX} \cdot \frac{XZ}{ZB} = \frac{CD}{XZ} \cdot \frac{XZ}{BD} = \frac{CD}{BD}. \quad (13)$$

Ou seja,

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{CY}{YX} \cdot \frac{XZ}{ZB}. \quad (14)$$

Inicialmente, suponha-se que  $EF \nparallel CB$  e  $YZ \nparallel CB$ . Sejam os pontos  $P = EF \cap CB$  e  $P' = YZ \cap CB$  (Figura 10). Aplicando o Teorema de Menelaus ao  $\triangle ABC$  com a reta  $EF$  e ao  $\triangle XBC$  com a reta  $YZ$  encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{PC}{BP} &= \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{CY}{YX} \cdot \frac{XZ}{ZB} = \frac{P'C}{BP'}, \\ \frac{PC}{BP} &= \frac{P'C}{BP'}. \end{aligned} \quad (15)$$

O resultado anterior significa que  $P = P'$ . A potência do ponto  $P$  relativa a  $k_1$  e  $k_2$  pode ser calculada de duas formas diferentes em cada caso:

$$Pot(P, k_1) = PE \cdot PF = PD^2,$$

$$Pot(P, k_2) = PZ \cdot PY = PD^2.$$

Logo,

$$PF \cdot PE = PZ \cdot PY = Pot(P, k_3).$$

Portanto,  $EFZY$  é um quadrilátero inscrito em  $k_3$  e a equação anterior descreve duas formas de calcular a potência do ponto  $P$  relativa a  $k_3$ . Nota-se que:

$$Pot(P, k_1) = Pot(P, k_2) = Pot(P, k_3).$$

Ou seja,  $P$  é o centro radical de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . O caso  $EF \parallel CB$  e  $YZ \parallel CB$  significa que os  $\triangle ABC$  e  $\triangle XBC$  são isósceles, de base  $BC$ . Isto acontece quando  $D$  é ponto médio de  $BC$  e  $A$  e  $X$  estão sobre a mediatriz de  $BC$ . Vale que  $YE = ZF$ , pois são pares na reflexão relativa a  $AD$ . O quadrilátero  $EFZY$  transforma-se num trapézio isósceles e, conseqüentemente, inscritível. Adicionalmente, dado que o ponto  $D$  é a projeção ortogonal dos pontos  $I$  e  $I'$  sobre  $BC$ , vale que  $EF \parallel CB$  se, e somente se,  $YZ \parallel CB$ . Isso completa a demonstração.

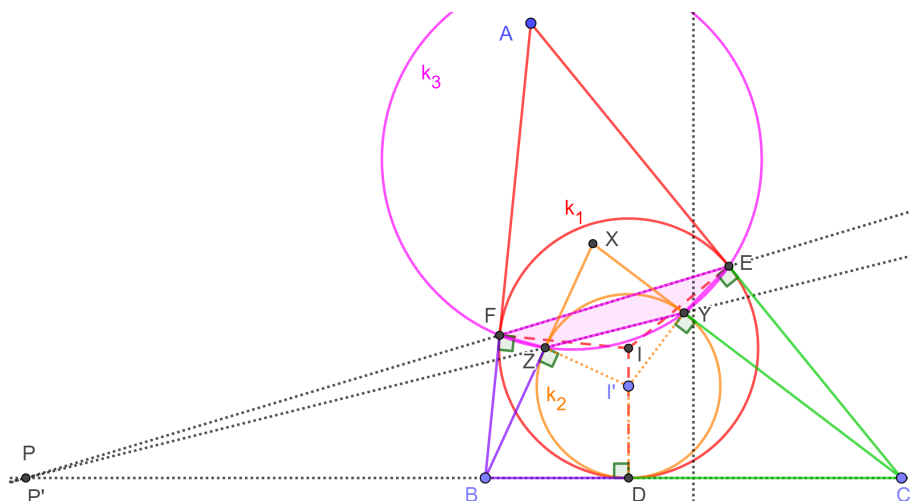


Figura 10: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#). Movimentando qualquer um dos pontos  $I'$ ,  $A$ ,  $B$  ou  $C$  pode-se verificar que  $EFZY$  é um quadrilátero inscritível.

### 3.2 Teorema de Pascal. Circunferência circunscrita. P1 SL IMO 1991.

**Problema 2.** *Seja o  $\triangle ABC$  e  $P$  um ponto em seu interior. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os pés das perpendiculares de  $P$  aos lados  $AC$  e  $BC$ , respectivamente. Traçar as retas  $AP$  e  $BP$ . De  $C$  esboçar as perpendiculares a  $AP$  e  $BP$ . Sejam  $Q_1$  e  $Q_2$  os pés dessas perpendiculares. Provar que as retas  $Q_1P_2$ ,  $Q_2P_1$  e  $AB$  são concorrentes.*

A IMO 1991 foi realizada em Sigtuna, cidade na Suécia. Este é o P1 da SL, proposto pela delegação da Filipinas (Djukic *et al*, 2011).

#### 3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 11 mostra uma construção geométrica inicial.

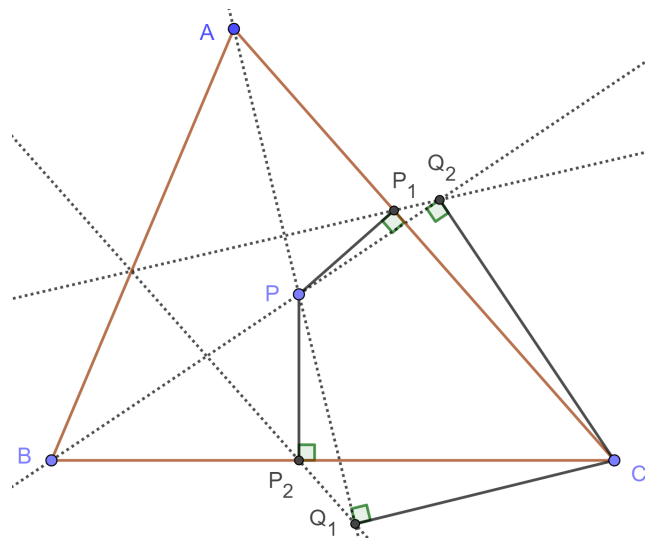


Figura 11: Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Como  $\angle PP_1C = \angle PP_2C = \angle PQ_1C = \angle PQ_2C = 90^\circ$  os pontos  $P_1, P_2, Q_1, Q_2, P$  e  $C$  pertencem a uma mesma circunferência de diâmetro  $PC$  (Figura 12). Seja o ponto  $D = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$ . Nota-se que  $A = P_1C \cap PQ_1$  e  $B = PQ_2 \cap P_2C$ . Pelo Teorema de Pascal, aplicado ao hexágono  $P_1PP_2Q_1CQ_2$ , os pontos  $A, B$  e  $D$  são colineares.

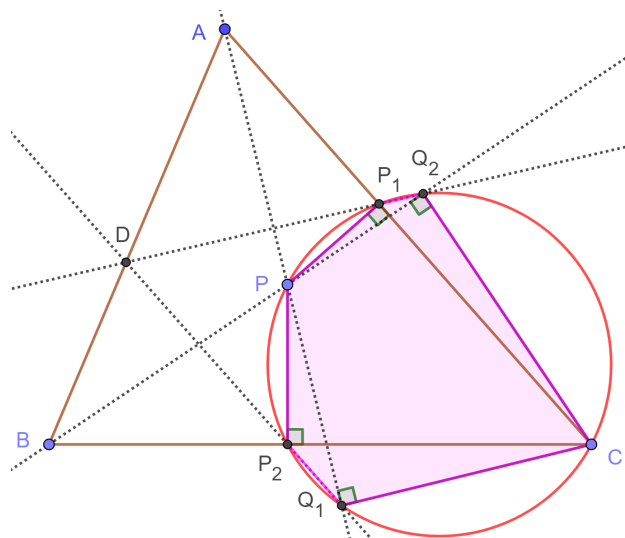


Figura 12: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

### 3.3 Teorema de Pascal. Áreas. Base média. P20 SL IMO 2007.

**Problema 3.** *Seja  $ABC$  um triângulo fixo e sejam  $A_1, B_1, C_1$  os pontos médios dos lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Seja  $P$  um ponto variável na circunferência circunscrita. As retas  $PA_1, PB_1, PC_1$  intersectam o círculo circunscrito novamente em  $A', B', C'$ , respectivamente. Suponha-se que os pontos  $A, B, C, A', B', C'$  são distintos e as retas  $AA', BB', CC'$  formam um triângulo. Provar que a área deste triângulo não depende de  $P$ .*

A IMO 2007 foi realizada em Hanói, capital do Vietnã. Este é o P20 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido (Djukic *et al*, 2011).

### 3.3.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial.

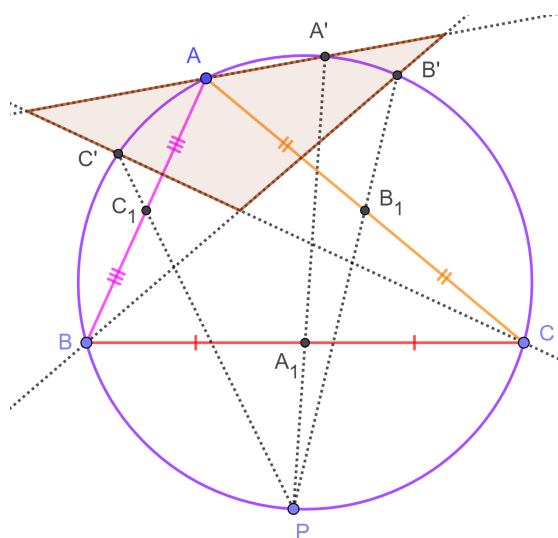
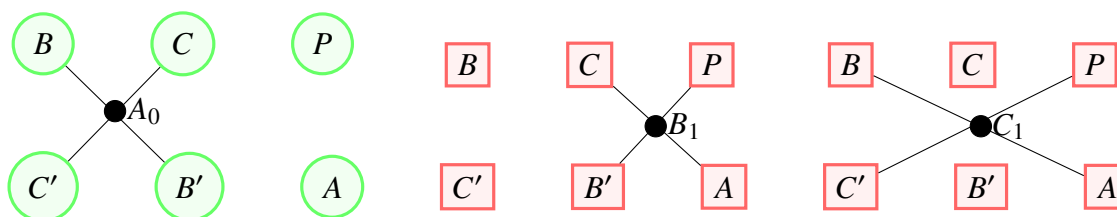


Figura 13: Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

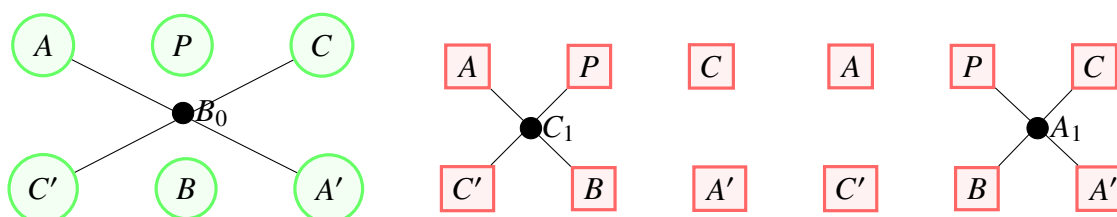
Seja  $A_0 = BB' \cap CC'$  (Figura 14). Tem-se que:  $B_1 = CA \cap PB'$  e  $C_1 = BA \cap PC'$ . O diagrama a seguir ilustra como combinar os pontos para determinar as retas que formam a interseção. Pelo Teorema de Pascal aplicado no hexágono  $BB'PC'CA$ , ou equivalentemente  $BCPC'B'A$ , encontra-se que:

$$A_0 \in B_1C_1.$$



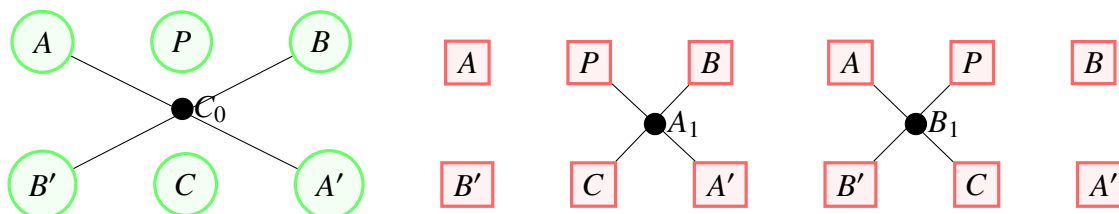
Analogamente, seja  $B_0 = CC' \cap AA'$ . Verifica-se que:  $C_1 = AB \cap PC'$  e  $A_1 = CB \cap PA'$ . O diagrama a seguir ilustra como combinar os pontos para determinar as retas que formam a interseção. Pelo Teorema de Pascal aplicado no hexágono  $AA'PC'CB$ , ou equivalentemente  $APCC'BA'$ , encontra-se que:

$$B_0 \in C_1A_1.$$



Do mesmo modo, seja  $C_0 = AA' \cap BB'$ . Vale que:  $A_1 = BC \cap PA'$  e  $B_1 = AC \cap PB'$ . O diagrama a seguir ilustra como combinar os pontos para determinar as retas que formam a interseção. Pelo Teorema de Pascal aplicado no hexágono  $AA'PB'BC$ , ou equivalentemente  $APBB'CA'$ , encontra-se que:

$$C_0 \in A_1B_1.$$



Como  $C_1A_1 \parallel AC$  (base média) segue que  $B_0A_1 \parallel AB_1$ . Pelo Teorema de Tales encontra-se:

$$\frac{C_0B_0}{C_0A} = \frac{C_0A_1}{C_0B_1}.$$

Analogamente, como  $C_1B_1 \parallel BC$  (base média) segue que  $BA_1 \parallel A_0B_1$ . Pelo Teorema de Tales encontra-se:

$$\frac{C_0A_1}{C_0B_1} = \frac{C_0B}{C_0A_0}.$$

Das duas equações anteriores segue:

$$\frac{C_0B_0}{C_0A} = \frac{C_0B}{C_0A_0},$$

$$C_0B_0 \cdot C_0A_0 = C_0A \cdot C_0B.$$

Devido a equação anterior e o ângulo comum vale a igualdade de áreas:

$$[\Delta A_0B_0C_0] = [\Delta ABC_0].$$

Como  $AB \parallel A_1C_0$  segue que:

$$[\Delta ABC_0] = [\Delta ABB_1] = \frac{1}{2}[\Delta ABC].$$

A última igualdade consequência de  $B_1$  ser ponto médio do segmento  $CA$ . Das duas últimas equações conclui-se que:

$$[\Delta A_0B_0C_0] = \frac{1}{2}[\Delta ABC].$$

Ou seja, a área do  $\Delta A_0B_0C_0$  não depende de  $P$ .

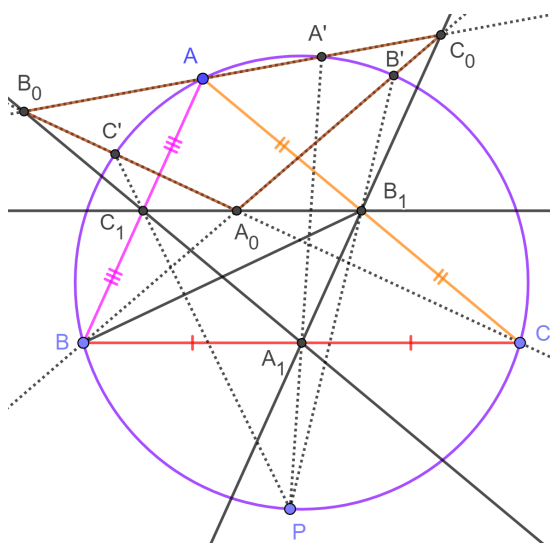


Figura 14: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa [aqui](#).

### 3.4 Teorema de Ceva Trigonométrico. Triângulo Isósceles. P30 LL IMO 1977.

**Problema 4.** *Um triângulo  $ABC$  com  $\angle A = 30^\circ$  e  $\angle C = 54^\circ$  é dado. Em  $BC$  um ponto  $D$  é escolhido tal que  $\angle CAD = 12^\circ$ . Em  $AB$  um ponto  $E$  é escolhido tal que  $\angle ACE = 6^\circ$ . Seja  $S$  o ponto de intersecção de  $AD$  e  $CE$ . Provar que  $BS = BC$ .*

A IMO 1977 foi realizada em Belgrado, capital da Sérvia. Este é o P30 da LL, proposto pela delegação da Holanda (Djukic *et al*, 2011).

#### 3.4.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 15 mostra uma construção geométrica inicial.



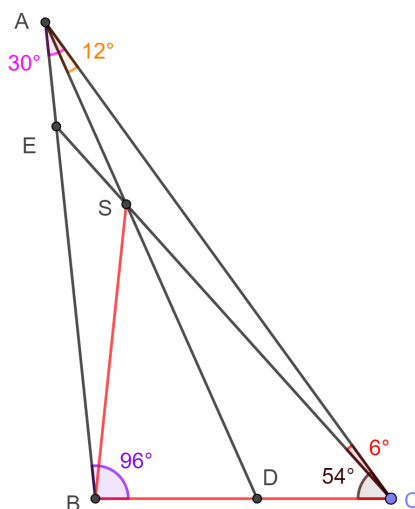


Figura 15: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Para provar que  $BS = BC$  bastará mostrar que o  $\triangle BCS$  é isósceles, de base  $CS$  (Figura 16). Isto implica que:

$$\angle BSC = \angle SCB = 54^\circ - 6^\circ = 48^\circ.$$

O anterior equivale, pela soma dos ângulos internos no  $\triangle BCS$ , a demonstrar que:

$$\angle CBS = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ.$$

Por tanto, deve-se provar que:

$$\angle SBA = x = 96^\circ - 84^\circ = 12^\circ.$$

Pela forma trigonométrica do Teorema de Ceva vale que:

$$\frac{\text{sen}(96^\circ - x)}{\text{sen}(x)} \cdot \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \cdot \frac{\text{sen}(6^\circ)}{\text{sen}(48^\circ)} = 1.$$

Ou seja, das duas últimas equações, basta verificar que:

$$\frac{\text{sen}(84^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \cdot \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \cdot \frac{\text{sen}(6^\circ)}{\text{sen}(48^\circ)} = 1.$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(84^\circ) &= \cos(90^\circ - 84^\circ) = \cos(6^\circ), \\ \text{sen}(12^\circ) &= 2 \text{sen}(6^\circ) \cos(6^\circ). \end{aligned}$$

Segue a verificação de:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(6^\circ)}{2 \text{sen}(6^\circ) \cos(6^\circ)} \cdot \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(12^\circ)} \cdot \frac{\text{sen}(6^\circ)}{\text{sen}(48^\circ)} &= 1, \\ \text{sen}(18^\circ) &= 2 \text{sen}(12^\circ) \text{sen}(48^\circ). \end{aligned}$$



Pela identidade:

$$2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$2 \operatorname{sen}(12^\circ) \operatorname{sen}(48^\circ) = \cos(36^\circ) - \cos(60^\circ).$$

Por tanto, basta verificar que:

$$\operatorname{sen}(18^\circ) = \cos(36^\circ) - \frac{1}{2}.$$

Neste ponto a verificação já pode ser feita com o auxílio de uma calculadora. Alternativamente, escreve-se:

$$\cos(90^\circ - 18^\circ) = \cos(36^\circ) - \frac{1}{2},$$

$$\cos(72^\circ) = \cos(36^\circ) - \frac{1}{2}.$$

Pela fórmula para o cosseno do ângulo duplo:

$$\cos(2 \cdot 36^\circ) = \cos(36^\circ) - \frac{1}{2},$$

$$2 \cos^2(36^\circ) - 1 = \cos(36^\circ) - \frac{1}{2}.$$

Seja  $y = \cos(36^\circ)$ . A equação anterior é reescrita como:

$$2y^2 - 1 = y - \frac{1}{2},$$

$$2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0,$$

$$4y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática encontra-se:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$y_1 \approx 0,809,$$

$$y_2 \approx -0,309.$$

A solução  $y_1$  corresponde ao valor de  $\cos(36^\circ)$ , verificado por uma calculadora.

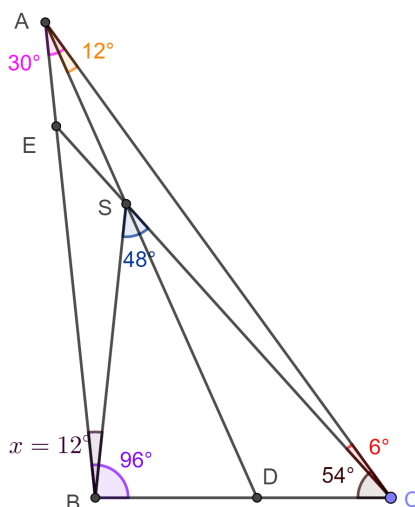


Figura 16: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

### 3.5 Teoremas de Ceva e Tales. Semelhanças. Homotetia. P2 SL IMO 1991.

**Problema 5.** Para um triângulo acutângulo  $ABC$ ,  $M$  é o ponto médio do segmento  $BC$ ,  $P$  é um ponto no segmento  $AM$  tal que  $PM = BM$ ,  $H$  é o pé da reta perpendicular de  $P$  a  $BC$ ,  $Q$  é o ponto de intersecção do segmento  $AB$  e a reta passando por  $H$  que é perpendicular a  $PB$  e, finalmente,  $R$  é o ponto de intersecção do segmento  $AC$  e a reta que passa por  $H$  que é perpendicular com  $PC$ . Mostrar que a circunferência  $k$  circunscrita ao  $\triangle QHR$  é tangente ao lado  $BC$  no ponto  $H$ .

A IMO 1991 foi realizada em Sigtuna, cidade na Suécia. Este é o P2 da SL, proposto pela delegação do Japão (Djukic *et al*, 2011).

#### 3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 17 mostra uma construção geométrica inicial.

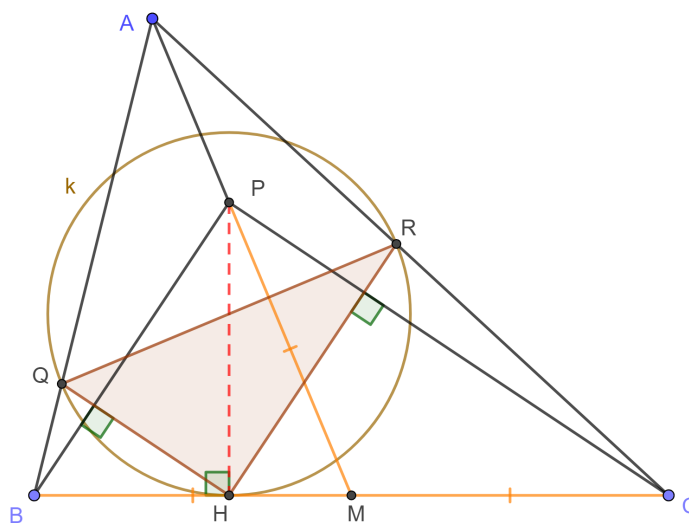


Figura 17: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Sejam os pontos  $Q' = HQ \cap BP$  e  $R' = HR \cap CP$  (Figura 18). Vale que  $\angle BPC = 90^\circ$ , pois  $MB = MP = MC$ . Logo, o quadrilátero  $PQ'HR'$  é um retângulo e  $\angle R'HQ' = 90^\circ$ . Segue que  $QR$  é diâmetro de  $k$ .

Como  $PH \perp BC$  a circunferência  $k'$  circunscrita ao retângulo  $PQ'HR'$ , de diâmetro  $Q'R'$  ou  $PH$ , é tangente a  $BC$ . Seja o ponto  $O' = Q'R' \cap PH$  centro de  $k'$ . Resta mostrar que  $Q'R' \parallel QR$ . Neste caso,  $k$  e  $k'$  seriam homotéticas, com centro em  $H$ , e o centro de  $k$  seria colinear com a reta  $HO'$ .

Sejam os pontos  $X = CP \cap AB$  e  $Y = BP \cap AC$ . Pelo Teorema de Ceva, aplicado no  $\triangle ABC$  e os segmentos  $AM$ ,  $BY$  e  $CX$  (concorrentes em  $P$ ), segue:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1,$$

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

Este último resultado implica, pela recíproca do Teorema de Tales, que  $XY \parallel BC$ . Por ângulos alternos entre paralelas e o critério de semelhança AA encontra-se:

$$\triangle PXY \sim \triangle PCB,$$

$$\frac{PY}{PB} = \frac{PX}{PC}. \quad (16)$$

Por outro lado,  $QH \parallel XC$ . Segue que:

$$\triangle BQH \sim \triangle BXC.$$

Como os segmentos  $BQ'$  e  $BP$  são cevianas dos triângulos anteriores encontra-se:

$$\frac{Q'Q}{Q'H} = \frac{PX}{PC}. \quad (17)$$

