Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Topologia das funções entrópicas

Topology of entropic functions

Resumo

Nos cursos de física básica os alunos tem contato com a segunda lei da termodinâmica a qual os levam a definir uma nova função de estados chamada de "entropia". Contudo as definições vieram de estudos empíricos. Mostraremos de maneira generalizada a formulação Ludwig Eduard Boltzmann para entropia, ademais algumas propriedades topológicas do conjunto das funções entrópicas.

Palavras-chave: Funções crescentes e aditivas. Conjuntos abertos, fechados. e densos.

Keoma Hermenegildo Kurashima
Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Instituto de Física, Uberlândia, keoma.kurashima@ufu.br

Juliano Gonçalves Oler
Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Instituto de Matematica e Estatística, Uberlândia

Abstract

In basic physics courses, students come into contact with the second law of thermodynamics, which leads them to define a new state function called "entropy". However, the definitions came from empirical studies. We will show in a generalized way the Ludwig Eduard Boltzmann formulation for entropy, in addition to some topological properties of the set of entropic functions.

Keywords: Increasing and additive functions. open. closed. and dense sets.

Artigo recebido em jan. 2024 e aceito em set. 2024

1 Introdução

Nos cursos básicos de física se encontra o primeiro contato com a Segunda Lei da Termodinâmica, a qual, segundo Moysés [1], é impossível realizar um processo cujo o único efeito seja: remover calor de um reservatório e produzir uma quantidade equivalente de trabalho, ou então transferir calor de um corpo mais frio para um mais quente. Podemos atribuir a lei ao estudo empírico dos físicos e engenheiros que trabalhavam na área da termodinâmica. Consequentemente, com essa lei se definiu uma nova função de estado: a "entropia". Logo, a termodinâmica é responsável por estudar a variação da entropia em sistemas fechados. Contudo, a problemática em torno da definição de entropia seria correlacionar-lha com a mecânica Newtoniana, que é determinista. Tal fenômeno pode ser explicando com o experimento idealizado da expansão livre de um gás ideal, a saber:

> "Há um paralelismo completo entre a evolução do macroestado de um sistema no sentido da probabilidade crescente e o princípio de aumento da entropia, o que nos leva a inferir que a entropia deve ser uma medida de probabilidade termodinâmica." [1].

Na Física estatística, a Entropia é uma medida do distúrbio de um sistema. A desordem a que se refere é realmente o número de configurações microscópias que um sistema termodinâmico pode ter quando em um estado especificado por determinadas variáveis macroscópicas (volume, energia, pressão e temperatura). Por "estados microscópicos", queremos dizer os estados exatos de todas as moléculas que compõem o sistema.

A Entropia foi estudada e estatisticamente formulada por Ludwig Eduard Boltzmann. Empiricamente é observado que a Entropia é uma grandeza crescente e aditiva, uma vez que a entropia dos sistemas resultantes S é a soma das entropias e, neste caso, como os sistemas são independentes e a probabilidade P da soma é o produto das probabilidades, dizemos que sua probabilidade termodinâmica é um número de microestados compatíveis com seu macroestado, temos:

$$P = P_1 \cdot P_2 \Rightarrow S = S_1 + S_2. \tag{1}$$

Nesse contexto é natural fazermos o seguinte questionamento:

Pergunta 1. *Existe uma função real, $y = f(x)$, **crescente** e **aditiva** que represente o comportamento empírico da Entropia?*

Mais precisamente, será que a Entropia pode ser representada por uma função real f que satisfaz as propriedades:

i) Se $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$, f é crescente;

ii) Se $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, f é aditiva.

A boa notícia é que temos uma resposta positiva para o questionamento feito anteriormente. Mais precisamente, o conjunto

$$E = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \quad | \quad f \text{ satifaz (i) e (ii)} \right\}, \tag{2}$$

com $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ sendo o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, é o conjunto das funções entrópicas. Denotando

$$\langle f \rangle = \{ g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad | \quad g = kf, \text{com } k \in \mathbb{R} \},$$

temos

Teorema 1. *Se $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, então $E =< \ln(x) >$.*

Um dos principais objetivos da matemática é entender a estrutura do conjunto através de ferramentas topológicas, como as propriedades satisfeitas por conjuntos abertos, fechados e densos.

Seja $K = [a, b]$ um intervalo fechado da reta tal que $K \subset (0, +\infty)$. Dizemos que $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^r se todas as derivadas de ordem r, no intervalo K, são contínuas. Denotamos o conjunto de funções de classe C^r por $C^r(K, \mathbb{R})$.

Teorema 2. *Seja E o conjunto das funções entrópicas. Então $E \subset C^\infty(K, \mathbb{R})$. Mais precisamente, toda função de E é uma função de classe C^∞.*

Dado um espaço métrico S, um subconjunto X de S é aberto se, para cada ponto X, existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(a, \delta)$ ainda esteja contida em X.

Teorema 3. *O conjunto E não é aberto.*

Em Matemática, um ponto $a \in X$ é aderente a X se a é limite de uma sequência x_n de pontos de X. Equivalentemente o ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, para todo invervalo I aberto de centro a tem-se $I \cap X \neq \emptyset$. O *fecho* do conjunto X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto formado pelos pontos aderentes de X. Um conjunto se diz *fechado* se contiver o seu fecho.

Teorema 4. *O conjunto E é fechado.*

Por fim, seja S um espaço métrico e X um subconjunto de S. Se a topologia de S é a topologia induzida pela métrica, X é denso em S se $\overline{X} = S$.

Teorema 5. *O conjunto E não é denso em $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.*

2 Definições e resultados preliminares

Com as propriedades (i) e (ii), temos a seguinte preposição.

Proposição 1. *Se $f \in E$, então:*

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é injetiva;*

(b) $f(1) = 0$;

(c) $f(x) > 0$ *se* $x > 1$ *e* $f(x) < 0$ *se* $x < 1; \forall x \in \mathbb{R}^+$;

(d) Se $x \in \mathbb{R}^+$, *então* $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$;

(e) Se $x, y \in \mathbb{R}^+$, *então* $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$;

(f) Se $x \in \mathbb{R}^+$ *e* $r \in \mathbb{Q}$, *então* $f(x^r) = r \cdot f(x)$;

(g) A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração. Veja [2]. pág. 13-17. □

Consideraremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Sendo f contínua em qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset (0, \infty)$, podemos definir a função

$$F(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t}\, dt.$$

Temos, pela propriedade da integral, que

$$F(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \tfrac{1}{t}\, dt. \tag{3}$$

Definição. *Definimos a função logarítimica como*

$$\ln(x) = F(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t}\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Teorema 6. *A função* $\ln(x)$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $x_0 > 0$ fixado. Então, para $x > x_0$, usando (3), temos

$$\ln(x) - \ln(x_0) = \int_{x_0}^x \tfrac{1}{t}\, dt \leq \int_{x_0}^x \tfrac{1}{x_0}\, dt = \frac{x - x_0}{x_0}. \tag{5}$$

Por outro lado se $x < x_0$, então existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\dfrac{x_0}{a} < x < x_0$, assim

$$\ln(x_0) - \ln(x) = \int_x^{x_0} \tfrac{1}{t}\, dt \leq \int_x^{x_0} \tfrac{1}{x}\, dt \leq \frac{x_0 - x}{x} \leq \frac{a \cdot (x_0 - x)}{x_0}. \tag{6}$$

De (5) e (6), segue-se que

$$|\ln(x) - \ln(x_0)| \leq \frac{|a|}{|x_0|}|x - x_0|.$$

Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a \cdot x_0|}$. Desse modo,

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\ln(x) - \ln(x_0)| \leq \frac{|a|}{|x_0|}|x - x_0| \leq \epsilon,$$

o que prova a continuidade da função. □

Teorema 7. *A função* $\ln(x)$ *é derivável e*

$$\frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Demonstração. Seja $x_0 > 0$ fixado. A razão incremental correspondente é

$$q(x) = \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{x_0} \frac{1}{t}\,dt}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt. \tag{7}$$

Se $x > x_0$, da integral (7), temos

$$\frac{x - x_0}{x} \leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{x - x_0}{x_0}. \tag{8}$$

Portanto, usando (7) e (8) obtemos

$$\frac{1}{x} \leq q(x) \leq \frac{1}{x_0},$$

o que implica em

$$\lim_{x \to x_0^+} q(x) = \frac{1}{x_0}. \tag{9}$$

Analogamente, se $x_0 > x$, temos

$$\frac{x_0 - x}{x_0} \leq \int_{x}^{x_0} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{x_0 - x}{x}. \tag{10}$$

Portanto, usando (10) e (7), obtemos

$$\frac{1}{x_0} \leq q(x) \leq \frac{1}{x},$$

o que implica em

$$\lim_{x \to x_0^-} q(x) = \frac{1}{x_0}. \tag{11}$$

Finalmente, (9) e (11) implica que $\ln(x)$ é derivável em x_0 e $\frac{d}{dx}(\ln(x))(x_0) = \frac{1}{x_0}$ como queríamos provar. □

Proposição 2. *Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é um subconjunto denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo subconjunto aberto $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Demonstração. Veja [3]. pág. 84. □

Corolário 1. *Seja M um espaço métrico e considere $A \subset M$. Se existe um subconjunto aberto $G \neq \emptyset$ de M tal que $G \cap A = \emptyset$ então A não é denso em M.*

3 Prova dos resultados

Prova do Teorema 1. Para provar o Teorema 1, temos que mostrar que

(a) $< \ln(x) > \subset E$;

(b) $E \subset < \ln(x) >$.

Para verificamos a inclusão do item (a) temos que mostrar que todo elemento de $< \ln(x) >$ é crescente e aditivo. A prova do item (b) será feito mostrando que, qualquer função do conjunto E pode ser gerada a partir de uma outra função do conjunto.

Lema 1. *A função* $\ln(x)$ *é crescente e aditiva. Logo* $< \ln(x) >$ *também compartilha da mesma propriedades.*

Demonstração. Seja $f \in < \ln(x) >$. Então $f(x) = k\ln(x)$, onde $k \in \mathbb{R}$. Primeiramente, vamos mostrar que $f(x)$ é crescente. De fato, se $x_1 < x_2$, usando (3) e (4), temos

$$\begin{aligned} \ln(x_2) - \ln(x_1) &= \int_1^{x_2} \tfrac{1}{t}\, dt - \int_1^{x_1} \tfrac{1}{t}\, dt \\ &= \int_1^{x_2} \tfrac{1}{t}\, dt + \int_{x_1}^{1} \tfrac{1}{t}\, dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{t}\, dt. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{x_2}$, para todo $t \in [x_1, x_2]$, temos

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{x_2} \leq \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{t}\, dt = \ln(x_2) - \ln(x_1).$$

Logo, $\ln(x_2) > \ln(x_1)$, se $x_2 > x_1$.

Agora, vamos provar que f é aditiva. Se a e b são reais positivos, então

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b). \tag{12}$$

Considere a função $g(x) = \ln(ax), \forall x > 0$. A função g é uma função composta $g = (\ln \circ h)(x)$, onde $h(x) = ax$. Pelo teorema sobre derivação de funções compostas, temos:

$$g'(x) = (\ln)'(h(x)) \cdot h'(x),$$

ou seja

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

Logo

$$(g(x) - \ln(x))' = g'(x) - \ln'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

o que implica que $g(x) = \ln(x) + k$, onde k é uma constante, portanto

$$\ln(ax) = \ln(x) + k,$$

para todo $x > 0$. Fazendo $x = 1$, temos

$$\ln(a) = \ln(1) + k = \int_1^1 \tfrac{1}{t}\, dt + k = 0 + k.$$

Portanto,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x),$$

para todo $x > 0$. Em particular, para $x = b$ temos (12). $\square$

Logo, como $f(x)$ é crescente e aditiva, temos que $f(x) \in E$. Dessa forma, $< \ln(x) > \subset E$, o que demonstra o item (a). Resta mostramos o item (b), que segue do próximo lema.

Lema 2. *Se $f_1, f_2 \in E$, então existe $k > 0$ tal que $f_2(x) = k \cdot f_1(x)$ para todo $x > 0$.*

Demonstração. Suponha que exista um número $a \neq 1$ tal que $f_1(a) = f_2(a)$. Para fixar ideias, digamos que $a > 1$. Logo temos que $f_1(a^r) = f_2(a^r), \forall r \in \mathbb{Q}$. Pela proposição *(f)*, temos que $f_1(a^r) = r f_1(a) = r f_2(a) = f_2(a^r)$. Suponhamos que exista algum $b > 0$ tal que $f_1(b) \neq f_2(b)$. Sem perda de generalidade, assuma $f_1(b) < f_2(b)$. Escolha $n \in \mathbb{Z}$ de tal modo que

$$f_1(a) < n \cdot [f_2(b) - f_1(b)].$$

Então

$$f_1(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot f_1(a) < f_2(b) - f_1(b).$$

Por simplicidade, escrevemos $c = f_1(a^{\frac{1}{n}})$. Os numeros $c, 2c, 3c, \ldots$ dividem $\mathbb{R}$ em invervalos justapostos de mesmo comprimento c. Como $c < f_2(b) - f_1(b)$, pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalos $(f_1(b), f_2(b))$, ou seja, $f_1(b) < m \cdot c < f_2(b)$. Assim temos,

$$m \cdot c = m \cdot f_1(a^{\frac{1}{n}}) = f_1(a^{\frac{m}{n}}) = f_2(a^{\frac{m}{n}}).$$

Então,

$$f_1(b) < f_1(a^{\frac{m}{n}}) = f_2(a^{\frac{m}{n}}) < f_2(b).$$

Como f_1 e f_2 são crescentes, pela propriedade (i), temos que:

$$f_1(b) < f_1(a^{\frac{m}{n}}) \Rightarrow b < a^{\frac{m}{n}},$$

e que

$$f_2(a^{\frac{m}{n}}) < f_2(b) \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < b.$$

Logo, $b = a^{\frac{m}{n}}$. Dai, $f_1(b) = f_2(b)$, contrariando a hipótese inicial de $f_1(b) \neq f_2(b)$. Portanto, b não existe. Assim se $\exists a \neq 1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(x) = f_2(x), \forall x > 0$.

Agora, $f_1, f_2 \in E$. Seja $k = \dfrac{f_2(a)}{f_1(a)}, \forall a \neq 1$. Seja $f_3 \in E$, definido por $f_3(x) = k \cdot f_1(x)$. Então

$$f_3(a) = k \cdot f_1(a) = \left[\frac{f_2(a)}{f_1(a)}\right] \cdot f_1(a) = f_2(a).$$

Segue-se do que foi provado acima que, $f_3(x) = f_2(x), \forall x > 0$, ou seja, que $f_2(x) = k \cdot f_1(x), \forall x > 0$, como queríamos demostrar. $\square$

Como $\ln(x), f \in E$, segue que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = k \ln(x).$$

Logo, $f \in <\ln(x)>$, o que mostra que $E \subset <\ln(x)>$. Portanto, por (a) e (b) concluímos a prova do Teorema 1. $\square$

Prova do Teorema 2. Para a prova do Teorema 2 mostraremos que a função geradora do conjunto E possui sua n-ésima derivada, para todo n, e elas são contínuas.

Usaremos o princípio da indução finita para mostrar que a lei de formação da derivada de n-ésima ordem da função logarítimica é $\frac{d^n}{dx^n}(\ln(x)) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}$. Pelo Teorema 7,

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = x^{-1} = (-1)^{1-1} \cdot (1-1)! \cdot x^{-1}.$$

Para $k \geq 1$, suponha que

$$\frac{d^k}{dx^k}(\ln(x)) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\ln(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}(\ln(x))\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left((-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k}\right) \\
&= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \frac{d}{dx}(x^{-k}) \\
&= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k) \cdot x^{-(k+1)} \\
&= (-1)^{k} \cdot k! \cdot x^{-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\ln(x)) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}.$$

Ainda por [4], aprendemos que para toda constante $c \in \mathbb{R}$ que multiplique uma função contínua, ela permanecera contínua. Para qualquer $x > 0$, a família de funções $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, é contínua. Logo, $\frac{d^n}{dx^n}(\ln(x))$ é contínua, para todo $n \geq 1$. $\square$

Prova do Teorema 3. Seja $f \in E$ e considere $g(x) = f(x) + B(x)$, sendo B uma bump function, semelhante a que está descrito em [5], definida por $B(x) = \epsilon \cdot \hbar(x)$ onde

$$\hbar(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

Note que $g \in B(f, \epsilon)$, visto que

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - (f(x) + B(x))| = |-B(x)| \leq \epsilon \cdot e^{-1} < \epsilon.$$

Com $\epsilon \cdot e^{-1}$ sendo um ponto de máximo local da bump function. Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} g(x \cdot y) &= (f + B)(x \cdot y) = f(x \cdot y) + B(x \cdot y) \\ &< f(x) + f(y) + \epsilon < f(x) + f(y) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= (f + B)(x) + (f + B)(y) \\ &= (f(x) + B(x)) + (f(y) + B(y)) \\ &< f(x) + \epsilon + f(y) + \epsilon \\ &= f(x) + f(y) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} g(x \cdot y) - (g(x) + g(y)) &< f(x) + f(y) + 2\epsilon - (f(x) + f(y) + 2\epsilon) \\ &= \cancel{f(x)} + \cancel{f(y)} + \cancel{2\epsilon} - \cancel{f(x)} - \cancel{f(y)} - \cancel{2\epsilon} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais precisamente, temos que $g(x \cdot y) < g(x) + g(y)$, o que mostra que g não pertence ao conjunto E. Dessa forma, temos que E não é um conjunto aberto. □

Prova do Teorema 4. Para a prova do Teorema 4, mostraremos que o conjunto E contém o seu fecho, mais precisamente, $E = \overline{E}$.

Seja $f_n(x)$ uma sequência de funções em E. Considere que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Vamos mostrar que $f \in E$. Pelo Teorema da derivação termo a termo e de $f_n(x) \in E$, $\forall n$, temos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0. \tag{13}$$

Logo, por [4], f é crescente. Além disso,

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x \cdot y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + f_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(x) + f(y). \end{aligned} \tag{14}$$

Logo, f é aditiva.

Logo, $f \in E$. Portanto, E é fechado. □

Prova do Teorema 5. Para provar o Teorema 5 mostraremos que o conjunto E não contém todos abertos de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$$\text{Seja} \quad F: \quad C^r([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto F(f) = f(x \cdot y) - f(x) - f(y), \forall x, y \in [a,b].$$

Como f é de classe C^r, temos que f é uma função contínua. Assim, temos que F é uma função contínua.

Lema 3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e considere $F : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, $F^{-1}(A)$ é um conjunto aberto em $C([a,b],\mathbb{R})$.*

Demonstração. Esse lema segue da afirmação de continuidade de função. Como o conjunto A é aberto temos:

$$|f_1 - f_2| < \delta \Rightarrow |F(f_1) - F(f_2)| < \epsilon.$$

□

Definição. *O conjunto*

$$B = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad f(x \cdot y) > f(x) + f(y), \forall x, y \in [a,b]\}.$$

Lema 4. *B é um conjunto aberto em $C([a,b],\mathbb{R})$*

Demonstração. O intervelo $A = (0, +\infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$.
Como F é contínua temos que $F^{-1}(A)$ é um conjunto aberto. Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned}
F^{-1}(A) &= \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad F(f) \in A\} \\
&= \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad F(f) \in (0,+\infty)\} \\
&= \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad F(f) > 0\} \\
&= \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad f(x \cdot y) - f(x) + f(y) > 0, \forall x, y \in [a,b]\} \\
&= \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \quad | \quad f(x \cdot y) > f(x) + f(y), \forall x, y \in [a,b]\} = B
\end{aligned}$$

Logo, como $B = F^{-1}(A)$ e $F^{-1}(A)$ é aberto em $C([a,b],\mathbb{R})$ concluímos que B e um conjunto aberto em $C([a,b],\mathbb{R})$. □

Voltando a demonstração do Teorema 5, considere o conjunto

$$E = \left\{f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \mid f \text{ satifaz (i) e (ii)}\right\}$$

e suponha que E seja um conjunto denso em $C([a,b],\mathbb{R})$. Então $E \cap G \neq \emptyset$, para todo conjunto aberto $G \neq \emptyset$ de $C([a,b],\mathbb{R})$. Em particular, temos que $E \cap B \neq \emptyset$. Assim, temos que existe $f \in E \cap B$. Se $f \in E \cap B$, então $f \in E$ e $f \in B$. Logo, temos que f é aditiva pelo fato de $f \in E$ e f não é aditiva pelo fato de $f \in B$. Dessa forma, temos uma contradição. A contradição surgiu quando afirmamos que E era denso em $C([a,b],\mathbb{R})$. Portanto, concluímos que E não é denso em $C([a,b],\mathbb{R})$. □

Referências

[1] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**: fluidos, oscilações e ondas, calor. 4. ed. Rio de Janeiro: Edgard Blucher, 2002. v. 2.

[2] LIMA, E. L. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[3] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.

[4] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. v. 1.

[5] TU, L. W. **An introduction to manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2010. (Universitext).