

Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664

v. 24, 2024

Artigo de Iniciação Científica

**Marcelo Teles da Silva Brito**

Universidade Federal de São Paulo  
(Unifesp), Escola Paulista de  
Política, Economia e Negócios,  
Osasco, mtsbrito21@unifesp.br

**Francielle Santo Pedro Simões**

Universidade Federal de São Paulo  
(Unifesp), Escola Paulista de  
Política, Economia e Negócios,  
Osasco

## Modelo de corrida armamentista via Sistema p-Fuzzy

Arms Race Model via p-Fuzzy System

### Resumo

O presente trabalho propõe uma adaptação do modelo matemático de corrida armamentista de Richardson utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy e a lógica fuzzy. Em nossa abordagem, as taxas de variação temporal são modeladas por sistemas de inferência fuzzy (FIS), resultando em um sistema parcialmente fuzzy. Um sistema parcialmente fuzzy é aquele em que o campo de direções é conhecido apenas parcialmente. Aliando essa abordagem a métodos numéricos tradicionais, exibimos a solução numérica do modelo fuzzy e comparamos com os dados disponíveis sobre gastos militares. Essa metodologia é de fácil entendimento e manipulação, permitindo que os formuladores de políticas possam realizar análises e avaliações de cenários.

**Palavras-chave:** Modelo de corrida armamentista. Modelo de Richardson. Lógica Fuzzy. Sistemas parcialmente Fuzzy. Equações diferenciais ordinárias.

### Abstract

This work proposes an adaptation of Richardson's mathematical arms race model using fuzzy set theory and fuzzy logic. In our approach, the rates of temporal variation are modeled by fuzzy inference systems (FIS), resulting in a partially fuzzy system. A partially fuzzy system is one where the direction field is only partially known. Combining this approach with traditional numerical methods, we present the numerical solution of the fuzzy model and compare it with available military expenditure data. This methodology is easy to understand and manipulate, allowing policymakers to perform scenario analysis and evaluation.

**Keywords:** Arms race model. Richardson model. Fuzzy Logic. Partially Fuzzy Systems. Ordinary differential equations



# 1 Introdução

O fenômeno da corrida armamentista está presente em diversos momentos históricos, sendo de grande interesse de estudo, uma vez que seu conhecimento nos permite um maior entendimento dos conflitos entre países. Trata-se de um processo delicado, pois não apenas prenuncia um possível conflito, mas também antecipa um período de incertezas decorrentes dele. Um exemplo significativo disso é o período do entre guerras, no qual houve um expressivo incentivo para o aumento dos gastos militares visando a proteção contra possíveis ameaças [1].

Por mais que nem sempre esse aumento signifique um conflito armado, também é necessário não esquecer que durante o processo de elevação do nível armado de qualquer país, há um crescimento do grande temor, mesmo em nações não diretamente envolvidas. Durante a Guerra Fria, quando os principais protagonistas eram os EUA e a URSS, países como o Brasil, distantes do conflito político, acabaram sofrendo transformações [2].

Todo o processo de aumento da capacidade militar decorre exclusivamente de decisões governamentais, portanto é dependente das relações entre países [1]. Estas, por sua vez dependem dos interesses internos que mudam rapidamente, ou seja, estamos falando de um processo volátil. O conflito entre a Rússia e a Ucrânia demonstra como o desalinhamento político de dois aliados pode ocorrer de forma rápida e levar à um conflito sem precedentes.

As escolhas feitas pelos governantes dependem de diversas variáveis que relacionam os países em conflito. Entre algumas, podemos citar: a extensão da fronteira compartilhada com o adversário, seu número de soldados, divergências ideológicas e conflitos internos.

O matemático britânico Lewis Fry Richardson foi um dos pioneiros do estudo quantitativo da guerra [3]. Segundo o autor, o processo de corrida armamentista pode ser simplificado em três regras simples. As regras propostas por ele afirma que o processo de corrida armamentista pode ser descrito pelo nível de insegurança, pelo fardo econômico de manter certo nível militar e por ambições internas [4]. O modelo proposto por Richardson inclui tanto o armamento como o aumento das tensões simultaneamente, isto é, ele considera o fenômeno como um processo de ação e reação, pois o aumento dos gastos militares em um país leva à um aumento dos gastos militares em outro e assim por diante até que o limite orçamentário seja atingido.

O modelo de corrida armamentista não é muito específico em relação à variável à que se refere. Essa falta de especificidade pode ser considerada um ponto forte, pois permite sua aplicação a uma ampla variedade de contextos. No entanto, esse mesmo aspecto pode ser considerado um ponto negativo, uma vez que o modelo não pode ser estimado ou testado sem alguma interpretação auxiliar [3]. Pensando nisso, é que iremos propor um modelo de corrida armamentista via teoria de conjuntos e lógica fuzzy. Utilizaremos as hipóteses do modelo de Richardson para construir um sistema de inferência fuzzy que modele as taxas de variação temporal.

O trabalho está dividido da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos o modelo matemático de Richardson, na Seção 3 apresentamos conceitos da teoria dos conjuntos e lógica fuzzy, na Seção 4 apresentamos o modelo parcialmente fuzzy que estamos propondo e faremos algumas simulações. Finalmente, na Seção 5 apresentaremos as conclusões.

## 2 Modelo de corrida armamentista de Richardson

Richardson se baseou em três hipóteses principais para a construção das equações do modelo de corrida armamentista [4]:

1. Por insegurança, o país X aumentará seu nível de armamento proporcionalmente ao nível de armamento do país Y.
2. Existem restrições orçamentárias que impedem o crescimento do nível de armamento quanto maior o mesmo for.
3. Por conta de hostilidades, ambições e queixas no país o nível de armamento cresce a uma taxa constante, mesmo na ausência de uma ameaça militar de outro país.

Para reformular as proposições verbais anteriores em uma expressão matemática vamos introduzir algumas variáveis. Considere X e Y sendo os dois atores envolvidos na disputa armamentista, em nosso caso X e Y serão dois países. Agora considere que o nível armamentista de cada ator X e Y é dado por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Primeiramente definimos os coeficientes de “defesa”,  $k$  e  $l$  (para os atores envolvidos na disputa X e Y, respectivamente), que representam o quanto um ator vai alterar seu nível armamentista em resposta ao nível do outro ator (1ª hipótese). Depois definimos os coeficientes de “gasto”,  $\alpha$  e  $\beta$ , que indicam o grau de restrição orçamentária para o nível de armamento atual (2ª hipótese). E por fim, definimos as constantes de “queixa”,  $g$  e  $h$ , que representa a taxa constante de aumento do nível armamentista (3ª hipótese) [3].

Logo, as três hipóteses feitas por Richardson podem ser descritas por um par de equações diferenciais que indicam a variação do nível armamentista ao longo do tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - \alpha x + g & \text{(Ator X)} \\ \frac{dy}{dt} = lx - \beta y + h & \text{(Ator Y)} \end{cases} \quad (1)$$

A metáfora da corrida armamentista pode ser estendida para além das interações militares, o próprio criador do modelo, Richardson, em seu livro “Statistics of Deadly Quarrels”(Estatísticas de Brigas Mortais) [5], destaca que conflitos pequenos podem ser previstos.

## 2.1 Ponto de equilíbrio do modelo

O modelo proposto por Richardson atinge equilíbrio quando a taxa de variação  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$  for igual a zero. Dessa forma, temos

$$\begin{cases} ky - \alpha x + g = 0 \\ lx - \beta y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\beta g + hk}{\alpha\beta - kl} \quad \text{e} \quad y = \frac{\alpha h + gl}{\alpha\beta - kl}, \quad (2)$$

para  $\alpha\beta \neq kl$ . Portanto, o equilíbrio é obtido no ponto de encontro entre as duas retas, ou seja, elas não podem ser paralelas [4]. A estabilidade do ponto de equilíbrio pode ser observada graficamente nas Figuras 1 e 2.

A partir dos planos de fases nas Figuras 1 e 2 podemos perceber que o equilíbrio estável ocorre quando  $kl < \alpha\beta$ , uma vez que os vetores, que representam as variações  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$ , apontam para o ponto de equilíbrio. No caso oposto,  $kl > \alpha\beta$ , há um equilíbrio instável, pois os vetores se distanciam do ponto de equilíbrio, esse caso não é de interesse, pois além de se tratar de um ponto instável seu equilíbrio ocorre em valores negativos.

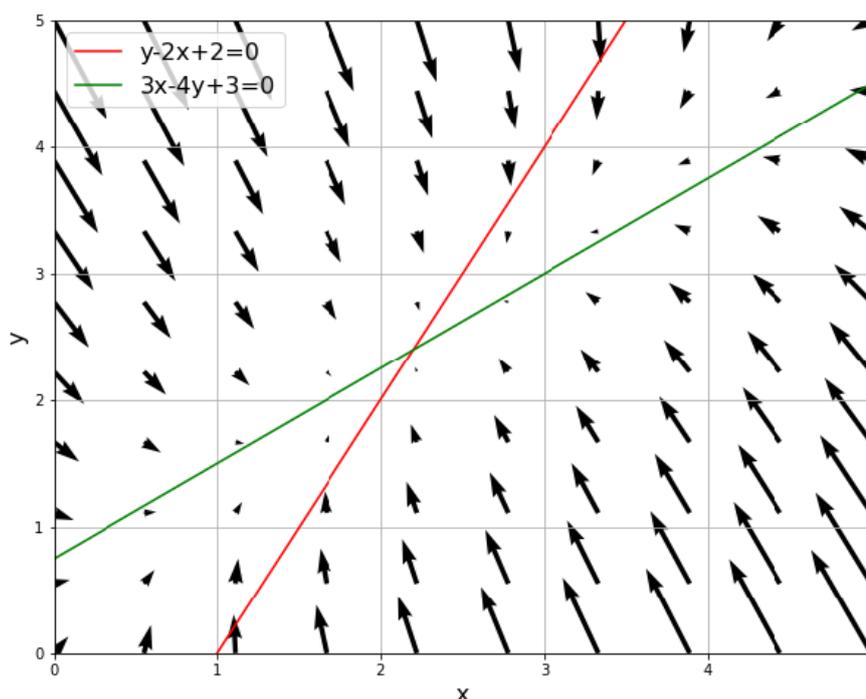


Figura 1: Condição para estabilidade:  $kl < \alpha\beta$ .

## 2.2 Solução numérica do modelo

Podemos exibir uma solução para o modelo por meio de uma análise de dados dos países afim de obter os parâmetros  $k$ ,  $\alpha$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $\beta$  e  $h$ . Com os parâmetros preenchidos podemos utilizar qualquer método de solução numérica de equações diferenciais. Por exemplo, o método de Euler:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot \frac{dx}{dt} \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

A partir de (3) calculamos o próximo ponto ( $x_{n+1}$ ) somando o ponto atual ( $x_n$ ) com sua variação multiplicada por um certo passo  $h$ , que determina a precisão e a distância entre os pontos de aproximação. Analogamente para  $y$ .

## 2.3 Problemas do modelo de Richardson

O modelo matemático de Richardson, apesar de seus méritos, possui problemas. Um dos mais evidentes é a dificuldade de interpretação das variáveis, isto é, o grau de temor que um país sente por outro, por exemplo, é um conceito muito abstrato de difícil definição, principalmente quando se tenta quantificá-lo.

Diferentes adaptações do modelo foram feitas buscando torná-lo mais eficaz. Caspary (1967) [4] desenvolve as fórmulas apresentadas por Richardson e chega até a reescrever as três hipóteses do modelo, contudo, apesar de conseguir uma melhor definição das variáveis, o modelo continua dependente de conceitos subjetivos. Isso dificulta não só a ampla utilização do modelo como também prejudica a sua precisão. Para tentar solucionar esta questão introduziremos uma abordagem via lógica fuzzy.

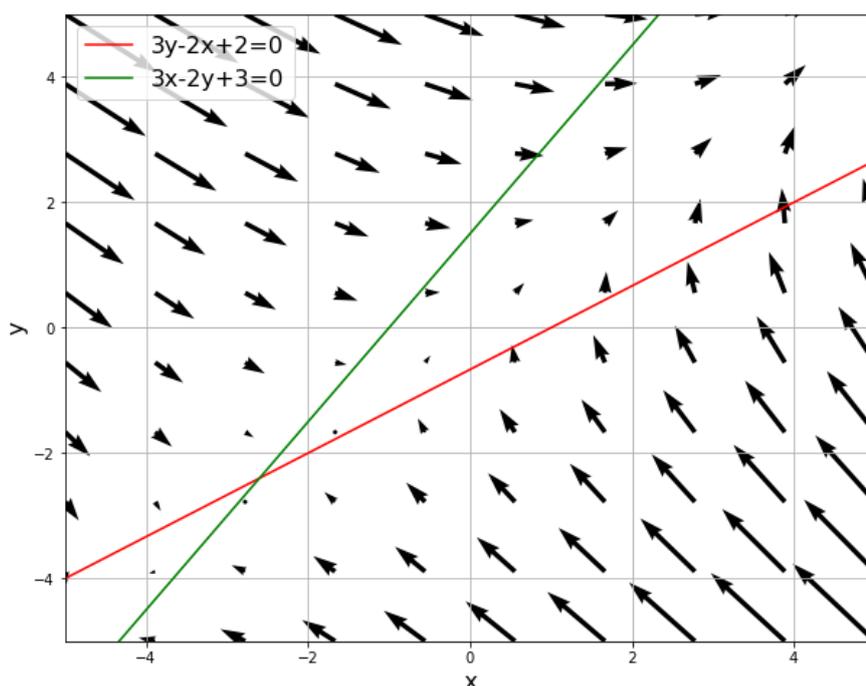


Figura 2: Condição para instabilidade:  $kl > \alpha\beta$ .

### 3 Lógica fuzzy

No modelo determinístico (1) as equações matemáticas são utilizadas para modelar as variações do nível de armamento dos atores envolvidos. Ao fazer esse tipo de modelagem, precisamos fazer simplificações destas relações e supor que as informações que possuímos são precisas e exatas. Entretanto, sabemos que quando lidamos com um modelo de corrida armamentista as variáveis podem representar um conceito amplo e subjetivo, dificultando a estimação e interpretação de parâmetros e resultados obtidos. Em ciências sociais aplicadas é comum encontrarmos conceitos imprecisos e/ou subjetivos na modelagem de fenômenos e uma saída para esse tipo de situação é o uso da lógica fuzzy. A partir da lógica fuzzy, conseguimos desenvolver algoritmos capazes de imitar parte do raciocínio humano. Uma ferramenta computacional conhecida é o sistema de inferência fuzzy (FIS) [6,7]. Através dele podemos representar conhecimentos e dados imprecisos ou ambíguos imitando o processo de pensamento humano.

O processo de decisão humano é repleto de subjetividades, isto é, não é baseado em números exatos e sim em aproximações. Por exemplo, é comum, ao se referir à temperatura do ambiente, dizer que a temperatura está baixa, média ou alta, e não especificar um valor em grau celsius.

A lógica fuzzy busca integrar esta lógica humana à lógica computacional (determinística), ou seja, ao invés de representarmos uma característica utilizando um valor específico, representamos ela por graus de pertinência à um certo subconjunto.

#### 3.1 Conjuntos fuzzy

Um subconjunto fuzzy  $F$  é definido em termos de uma função de pertinência  $u_F$  que relaciona todos os valores  $x$  do universo  $U$  a um respectivo valor  $u_F(x)$  entre 0 e 1 chamado de grau de pertinência. Assim, o subconjunto fuzzy  $F$  é caracterizado por sua função de pertinência [6,7]:

$$u_F : U \rightarrow [0, 1]. \quad (4)$$

Para a construção das funções de pertinência podemos utilizar diferentes tipos de funções, sendo as mais utilizadas as funções do tipo triangular e trapezoidal descritas genericamente abaixo.

$$u_{Tri}(x; a, m, b) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } a \leq x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } m < x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

e

$$u_{Trap}(x; a, m, n, b) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } a \leq x < m \\ 1, & \text{se } m \leq x \leq n \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{se } n < x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

Na Figura 3 exibimos um conjunto fuzzy triangular e um trapezoidal.

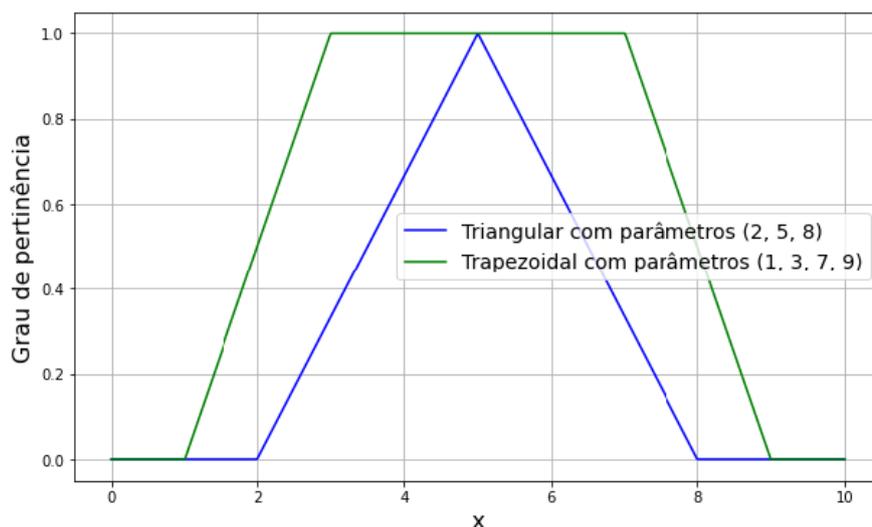


Figura 3: Funções de Pertinência Triangular e Trapezoidal.

### 3.2 Sistema de inferência fuzzy (FIS)

Os sistemas inferência fuzzy são uma aplicação prática da lógica fuzzy, utilizados para modelar decisões e raciocínios humanos. Esses sistemas consistem nos seguintes componentes:

- Fuzzificação: Converte as entradas do sistema em conjuntos fuzzy.
- Base de Regras: Contém um conjunto de regras do tipo “SE-ENTÃO” que modelam o conhecimento humano. As regras definem como diferentes valores de entrada devem ser combinados para produzir uma saída.

Exemplo de regras fuzzy:

1. SE a temperatura ambiente é baixa, ENTÃO o tempo para secagem é longo;
  2. SE a temperatura ambiente é média, ENTÃO o tempo para secagem é médio;
  3. SE a temperatura ambiente é alta, ENTÃO o tempo para secagem é curto.
- Método de Inferência: Processa as regras com base nas entradas fuzzy. Combina as regras para determinar quais ações devem ser tomadas, utilizando métodos como a inferência de Mamdani. No método de Mamdani a operação de “SE-ENTÃO” é tipicamente implementada usando operadores fuzzy como *AND* (mínimo) e *OR* (máximo) [6,7].
  - Defuzzificação: Converte os valores fuzzy resultantes em uma saída precisa, isto é, um número real [6,7].

### 3.3 Sistemas p-fuzzy

Considere o sistema de equações diferenciais a seguir.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad (7)$$

A denominação de sistema parcialmente fuzzy, ou p-fuzzy, vem do fato de não conhecermos ou conhecermos apenas parcialmente a função  $f(x(t))$  que modela a variável de estado  $x$ . Quando este tipo de situação ocorre podemos utilizar um sistema de inferência fuzzy (FIS) para modelar a evolução do sistema [6,7]. Assim, o sistema (7) pode ser substituído pela seguinte forma discreta:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot FIS(x_n) , \quad (8)$$

onde  $h$  é o tamanho do passo, que determina a precisão e a distância entre os pontos de aproximação;  $x_n$  é o ponto de aproximação atual e  $x_{n+1}$  é o ponto da nova aproximação; e  $FIS(x_n)$  consiste na saída do sistema de inferência fuzzy no ponto  $x_n$ .

## 4 Modelo de corrida armamentista de Richardson via p-fuzzy

Visando superar as falhas do modelo de corrida armamentista de Richardson e a subjetividade/imprecisão do fenômeno utilizaremos a lógica fuzzy. Mais especificamente, construiremos um FIS para modelar o lado direito do sistema (1). Assim, o sistema (1) é substituído pela seguinte forma discreta:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot FIS(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot FIS(x_n, y_n) \end{cases} , \quad (9)$$

onde  $h$  é o tamanho do passo, que determina a precisão e a distância entre os pontos de aproximação;  $x_n$  e  $y_n$  são, respectivamente, os níveis armamentistas dos países X e Y nos pontos de aproximação atuais e  $x_{n+1}$  e  $y_{n+1}$  são os pontos da nova aproximação; e  $FIS(x_n, y_n)$  a saída do sistema de inferência fuzzy no ponto  $(x_n, y_n)$ .

Para medir o nível de armamento de cada país, utilizamos o gasto militar dos países X e Y como variável de entrada no  $FIS(x, y)$ . Os gastos militares estão em milhões de dólares e foram obtidos do relatório SIPRI de 2022. Para facilitar a integração desses valores no sistema eles foram

normalizados a partir da seguinte fórmula  $x = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}} \cdot 12$ , onde  $v$  representa os gastos de um país durante certo ano. Os valores máximo e mínimo são obtidos através do cálculo do percentual do PIB que cada país direciona para gastos militares, da seguinte forma:

$$v_{min} = PIB \cdot P_{25\%} \quad e \quad v_{max} = PIB \cdot P_{98,2\%}. \quad (10)$$

Os percentis 25% (1,2%) e 98,2% (12,9%) foram os que apresentaram os melhores resultados. Para o PIB utilizamos a quantia apresentada logo após o conflito.

Na fuzzificação das variáveis de entrada utilizamos quatro conjuntos, a saber, baixo, médio baixo, médio alto e alto. Para a construção dos subconjuntos fuzzy de entrada optamos por nos basear nos quartis. Vale destacar que o período utilizado não precisa necessariamente ser o mesmo período do conflito, uma vez que queremos qualificar os gastos armamentistas dos países envolvidos de forma geral e, assim, obter conjuntos fuzzy que representem a realidade dos mesmos.

As Figuras 4 e 6, ilustram o processo de fuzzificação para o caso da Turquia e Grécia.

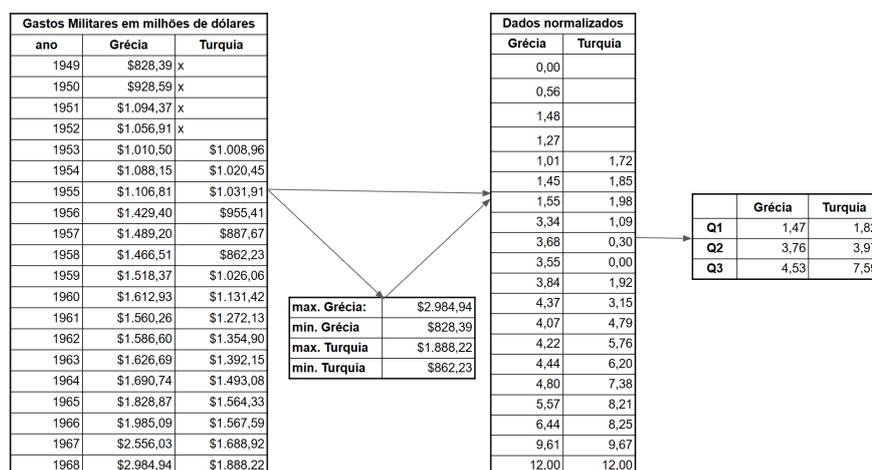


Figura 4: Ilustração do processo de construção dos subconjuntos fuzzy

Como não dispúnhamos de especialistas, elaboramos as regras utilizando as informações qualitativas do plano de fases do modelo (1), apresentada na Figura 1. A seguir apresentamos as regras elaboradas.

1. SE  $x$  É baixa E  $y$  É baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É baixa positiva.
2. SE  $x$  É baixa E  $y$  É media baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.
3. SE  $x$  É baixa E  $y$  É media alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É alta negativa.
4. SE  $x$  É baixa E  $y$  É alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É alta positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É alta negativa.
5. SE  $x$  É media baixa E  $y$  É baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É baixa negativa.
6. SE  $x$  É media baixa E  $y$  É media baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.
7. SE  $x$  É media baixa E  $y$  É media alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.

8. SE  $x$  É media baixa E  $y$  É alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É alta negativa.
9. SE  $x$  É media alta E  $y$  É baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É media positiva.
10. SE  $x$  É media alta E  $y$  É media baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É baixa negativa.
11. SE  $x$  É media alta E  $y$  É media alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.
12. SE  $x$  É media alta E  $y$  É alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.
13. SE  $x$  É alta E  $y$  É baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É media positiva.
14. SE  $x$  É alta E  $y$  É media baixa, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É media negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É media positiva.
15. SE  $x$  É alta E  $y$  É media alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa negativa E  $\frac{dy}{dt}$  É baixa negativa.
16. SE  $x$  É alta E  $y$  É alta, ENTÃO  $\frac{dx}{dt}$  É baixa positiva E  $\frac{dy}{dt}$  É media negativa.

Os valores de saída, isto é,  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$ , foram representados pelos subconjuntos fuzzy exibidos na Figura 5.

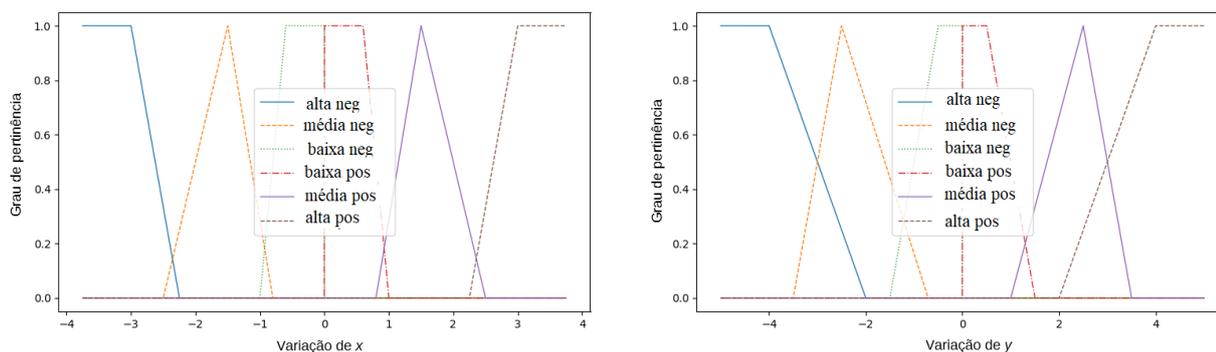


Figura 5: Subconjuntos fuzzy para  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$

Apresentaremos dois casos, o primeiro relacionado a Grécia e a Turquia e o segundo relacionado a Índia e Paquistão. Em ambos os casos as regras utilizadas e os conjuntos de variação são os mesmos. O que irá variar são os conjuntos fuzzy das variáveis de entrada.

#### 4.1 Corrida armamentista entre turquia e grécia

Turquia e Grécia são países com um vasto histórico de conflito. A Disputa Egeia vem ocorrendo desde a década de 1970 devido ao interesse dos países em explorar o mar Egeu, uma vez que estas tem elevado nível de turismo e por ser a principal ligação entre o mar negro e o mediterrâneo [8]. Recentemente este conflito tem se reavivado devido a descoberta de possíveis depósitos de petróleo e gás natural na região [9].

Os subconjuntos fuzzy de nível de armamento para o caso Turquia e Grécia estão ilustrados na Figura 6.

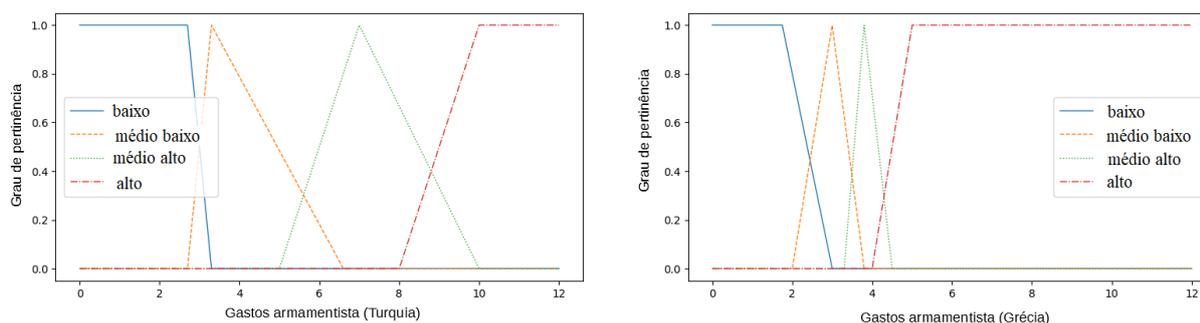


Figura 6: Subconjuntos fuzzy dos gastos armamentistas para a Turquia e Grécia

O período selecionado para análise foi de 1969 até 2002, pois assim podemos comparar os valores do modelo com os valores da série histórica. Podemos observar na Figura 7 que o modelo implementado apresenta boa correlação com os valores da série histórica.

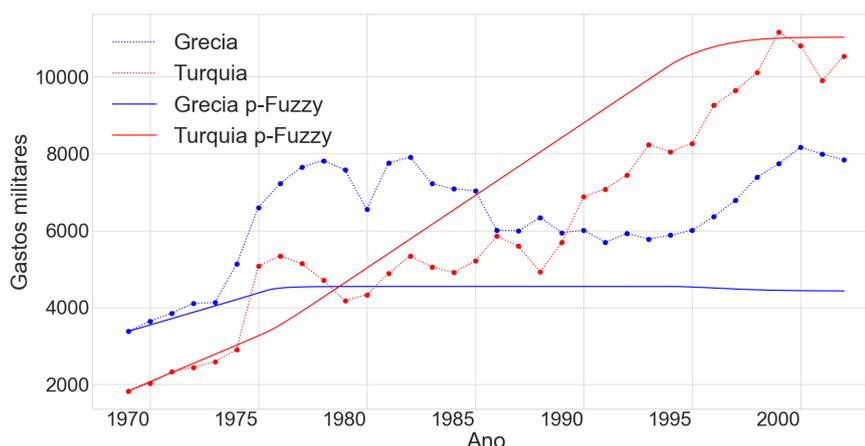


Figura 7: Solução numérica do sistema p-fuzzy que modela a corrida armamentista entre a Turquia e a Grécia (1969 - 2002) em comparação com os dados reais.

No gráfico da Figura 7, podemos observar que o modelo p-fuzzy possui o mesmo padrão de competição armamentista do modelo de Richardson, isto é, um aumento nos gastos de um país tende a ser seguido por um aumento nos gastos do outro país. Também observamos uma aceleração maior dos gastos da Turquia em relação a Grécia até o período de estabilidade de ambos.

## 4.2 Corrida armamentista entre Índia e paquistão

O processo de independência da Índia e do Paquistão em 1947 evidenciou os conflitos internos causados pela colonização britânica. A divisão religiosa fez com que a região apresentasse conflitos internos, que, mesmo após a divisão entre Índia e Paquistão, resistem até os dias atuais [10].

Os subconjuntos fuzzy de nível de armamento para o caso Índia e Paquistão estão ilustrados na Figura 8.

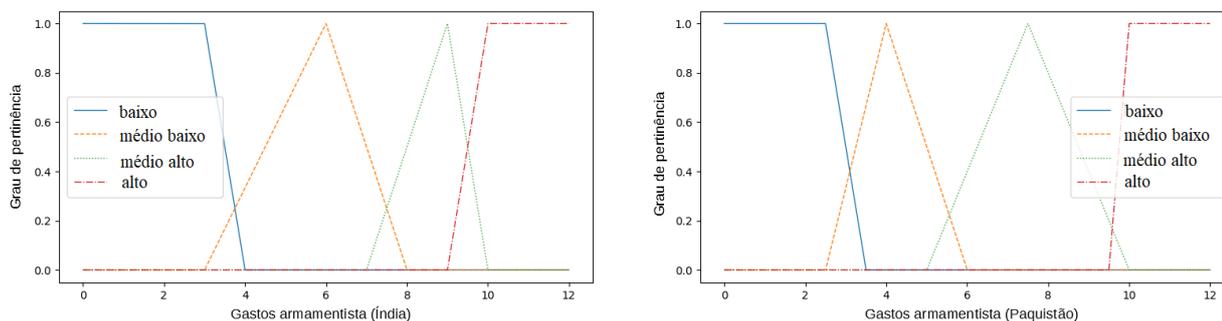


Figura 8: Subconjuntos fuzzy dos gastos armamentistas para a Índia e Paquistão

O período selecionado para análise foi de 1965 até 2002, pois assim podemos comparar os valores do modelo com os valores da série histórica. Podemos observar na Figura 9 que o modelo implementado consegue acompanhar a série histórica até 1985, a partir desse período os valores da Índia disparam, indicando que talvez possa existir mais fatores influenciando este período.

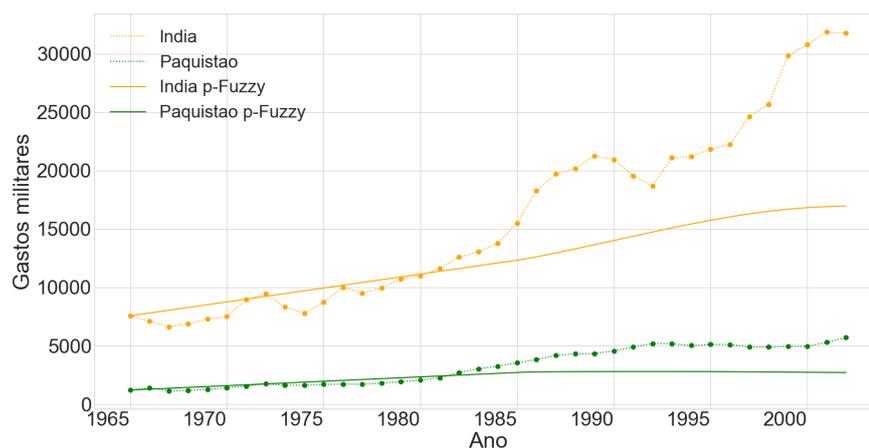


Figura 9: Solução numérica do sistema p-fuzzy que modela a corrida armamentista entre a Índia e o Paquistão (1965 - 2002) em comparação com os números reais.

No gráfico da Figura 9, também conseguimos observar o padrão de competição armamentista. Nesse caso, é possível notar períodos de relativa estabilidade, onde os gastos armamentistas de ambos os países permanecem constantes ou aumentam a uma taxa constante.

## 5 Conclusões

Neste trabalho, desenvolvemos um modelo p-fuzzy que descreve o fenômeno de corrida armamentista para dois pares de países. Para criação das regras utilizamos o plano de fases do sistema de equações diferenciais clássicas, porém poderíamos criar as regras a partir do conhecimento de um especialista.

O modelo apresentado é de fácil entendimento para não matemáticos e é simples de fazer

modificações, uma vez que para fazer alterações no modelo basta criar ou alterar regras lógicas simples. Utilizando o modelo p-fuzzy, é possível prever futuras tendências de gastos armamentistas em diferentes cenários políticos. Essas previsões podem ajudar a antecipar períodos de aumento ou redução de tensões. Portanto, permite que os *policy makers* tomem decisões informadas e adequadas para suas necessidades e contexto.

Em resumo, o modelo p-fuzzy aplicado aos gastos armamentistas destaca uma clara interdependência e competição, com padrões de oscilações que refletem a dinâmica de uma corrida armamentista. Concluímos que, o modelo é útil para prever tendências, pois diferentemente do modelo matemático de Richardson o modelo p-fuzzy não se limita a suposição de que as decisões de gastos são principalmente lineares.

## Referências

- [1] SAES, F. A. M.; SAES, A. M. As transformações políticas e econômicas na década de 1930 (*new deal*, fascismo, nazismo) e a segunda guerra mundial. *In*: SAES, F. A. M.; SAES, A. M. **História econômica geral**. São Paulo: Saraiva, 2013. cap. 15, p. 373-409.
- [2] RODEGHERO, C. S. Religião e patriotismo: o anticomunismo católico nos Estados Unidos e no Brasil nos anos da Guerra Fria. **Revista Brasileira de História**, v. 22, n. 44, p. 463–488, 2002.
- [3] SMITH, R. P. The influence of the Richardson arms race model. *In*: GLEDITSCH, N. P. (ed.). **Lewis Fry Richardson: his intellectual legacy and influence in the social sciences**. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 25-34. *E-book*.
- [4] CASPARY, W. R. Richardson's model of arms races: description, critique, and an alternative model. **International Studies Quarterly**, v. 11, n. 1, p. 63-88, 1967.
- [5] RICHARDSON, L. F. **Statistics of deadly quarrels**. Pittsburgh: Boxwood Press, 1960. cap. VI. p. 184-204.
- [6] BARROS, L. C.; WASQUES, V. F.; ESMI, E.; SÁNCHEZ, D. E.; SIMÕES, F. S. P. **Sistemas p-Fuzzy e aplicações**. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 6., 2021, São José do Rio Preto. **Anais [...]**. São José do Rio Preto: Unesp, p. 3-28.
- [7] JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Teoria dos conjuntos Fuzzy com aplicações**. 2. ed. São Carlos, SP: SBMAC, 2012. (Notas em matemática aplicada, v. 17).
- [8] BAŞLAR, K. Two Facets of the Aegean Sea Dispute: 'de lege lata' and 'de lege ferenda'. *In*: **Turkey and international law**. Ankara: Özen Publ., 2001.
- [9] CABRAL, F. S. **Grécia e Turquia: um conflito secular**. Radio Renascença, Lisboa, 5 set. 2020. Disponível em: <https://rr.sapo.pt/artigo/francisco-sarsfield-cabral/2021/02/09/grecia-e-turquia-um-conflito-secular/206020/>. Acesso em: 09 fev. 2024.
- [10] Índia x Paquistão: 3 questões para entender divisão dos 2 países há 75 anos e as consequências até hoje. **BBC News Brasil**, São Paulo, 15 ago. 2022. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-62546859>. Acesso em: 09 fev. 2024.



---

[11] FERREIRA, T. F. **Sistemas p-Fuzzy modificados para dinâmicas populacionais: modelagens e simulações.**2012. 138 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2012.