

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Luís Cláudio Yamaoka

Universidade Federal de São Paulo
(Unifesp), Escola Paulista de
Política, Economia e Negócios,
Osasco, luis.yamaoka@unifesp.br

Os caminhos das raízes da função quadrática II

The paths of the roots of the quadratic function II

Resumo

Em Yamaoka (2023) fixamos dois coeficientes reais e variamos o coeficiente real remanescente da função quadrática para obter os caminhos descritos pelas duas raízes da função no plano \mathbb{C} . Neste artigo, usamos a inversa Φ da projeção estereográfica para levar os caminhos de ambas as raízes para a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$: exceto no subcaso no qual os caminhos das imagens por Φ das duas raízes estão restritos ao pólo sul S de \mathbb{S}^2 , em cada um dos demais subcasos os caminhos das imagens por Φ de ambas as raízes repousam sobre uma ou duas circunferências em \mathbb{S}^2 . Quando o coeficiente variável tende a $-\infty$ e a $+\infty$, observamos as relações que têm as duas raízes, via Φ , com os pólos norte N e/ou sul S de \mathbb{S}^2 . Seja $G_j \subset \mathbb{S}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da imagem por Φ da raiz j em \mathbb{S}^2 , $j = 1, 2$. Determinamos os pontos aderentes comuns a G_1 e a G_2 . Usamos o Cálculo Diferencial, a Geometria Analítica com tratamento vetorial, a inversa da projeção estereográfica e a distância entre dois conjuntos.

Palavras-chave: Função quadrática. Raízes. Projeção estereográfica. Caminhos.

Abstract

In Yamaoka (2023) we fixed two real coefficients and varied the remaining real coefficient of the quadratic function to obtain the paths described by the two roots of the function in the \mathbb{C} plane. In this article, we used the inverse Φ of the stereographic projection to take the paths of both roots to the sphere $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$: except in the subcase in which the paths of the images by Φ of the two roots are restricted to the south pole S of \mathbb{S}^2 , in each of the other subcases the paths of the images by Φ of both roots rest on one or two circumferences on \mathbb{S}^2 . As the variable coefficient approaches $-\infty$ and $+\infty$, we observed the relations that the two roots have, via Φ , with the north N and/or south S poles of \mathbb{S}^2 . Let $G_j \subset \mathbb{S}^2$ be the set of points of the path of the image by Φ of the root j on \mathbb{S}^2 , $j = 1, 2$. We determined the common adherent points to G_1 and to G_2 . We used Differential Calculus, Analytical Geometry with vector treatment, the inverse of stereographic projection and the distance between two sets.

Keywords: Quadratic function. Roots. Stereographic projection. Paths.



1 Introdução

Nesta seção desenvolvemos o texto com o auxílio de Ahlfors (1979), de Soares (2001), de Lima (2000) e de Penrose (2007). Seja $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o plano complexo estendido, onde $\{\infty\}$ é o *ponto no infinito*. Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, w) : x^2 + y^2 + w^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o pólo norte de \mathbb{S}^2 e identifique o plano \mathbb{C} com o plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, que intercepta \mathbb{S}^2 ao longo do equador $x^2 + y^2 = 1$. Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, considere a reta em \mathbb{R}^3 que passa por z_0 e por N . Essa reta intercepta a esfera em exatamente um ponto $P \neq N$. Se $|z_0| < 1$ então P está no hemisfério sul, se $|z_0| = 1$ então $P = z_0$ e, se $|z_0| > 1$ então P está no hemisfério norte (veja a Figura 1).

A inversa da projeção estereográfica é uma bijeção Φ entre \mathbb{C}_∞ e \mathbb{S}^2 dada por

$$\Phi(\infty) = N, \quad \Phi(z_0) = \left(\frac{2x_0}{|z_0|^2 + 1}, \frac{2y_0}{|z_0|^2 + 1}, \frac{|z_0|^2 - 1}{|z_0|^2 + 1} \right), \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

onde a segunda igualdade acima descreve a aplicação $z_0 \mapsto P$ em coordenadas. O pólo sul de \mathbb{S}^2 é $S = \Phi(0 + i0) = (0, 0, -1)$, e está identificado na Figura 1.

O eixo real x no plano \mathbb{C} é levado por Φ sobre a circunferência de centro O e raio 1 contida no plano xOw , excetuando-se N . O eixo imaginário y no plano \mathbb{C} é levado por Φ sobre a circunferência de centro O e raio 1 contida no plano yOw , excetuando-se N .

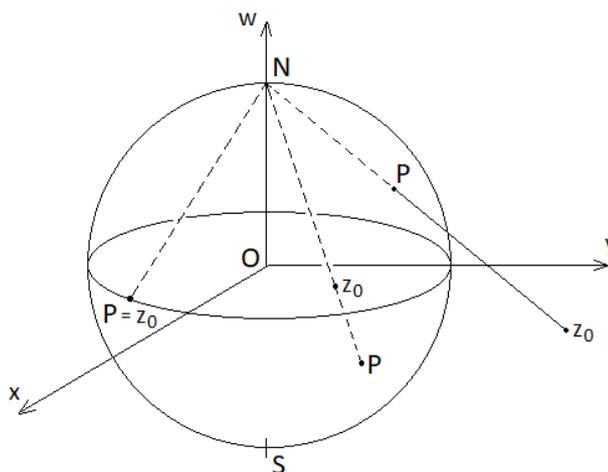


Figura 1: Inversa da projeção estereográfica.

Em Yamaoka (2023), determinamos no plano \mathbb{C} os caminhos descritos por ambas as raízes da função quadrática $f(z) = az^2 + bz + c$ quando fixamos dois dos três coeficientes reais e variamos o coeficiente remanescente. Ou seja, consideramos os três casos:

- Primeiro caso: b_0 e c_0 são fixados ; $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$ (9 subcasos).
- Segundo caso: $a_0 \neq 0$ e c_0 são fixados; $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$, $b \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).
- Terceiro caso: $a_0 \neq 0$ e b_0 são fixados; $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $c \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).

Vimos que tais caminhos, evidentemente contínuos em seus domínios, repousam sobre circunferências, sobre retas e na origem. Neste artigo levaremos, via Φ , em cada um dos 21 subcasos, os caminhos descritos por ambas as raízes da função quadrática do plano \mathbb{C} para \mathbb{S}^2 . Estes *caminhos em*

\mathbb{S}^2 são contínuos em seus domínios (veja a subseção 7.1). É fato conhecido que uma circunferência no plano \mathbb{C} é levada por Φ sobre uma circunferência em \mathbb{S}^2 , e que uma reta unida com ∞ no plano complexo estendido é levada por Φ sobre uma circunferência em \mathbb{S}^2 passando por N . Sendo assim, com exceção do subcaso $b_0 = 0$ e $c_0 = 0$, nossa tarefa é especificar estas circunferências em \mathbb{S}^2 e descrever sobre elas os percursos (caminhos) das imagens por Φ de ambas as raízes quando o coeficiente variável varre os valores reais crescentes, contanto que $a \neq 0$ no primeiro caso, e $a_0 \neq 0$ no segundo e no terceiro casos. Os resultados desta empreitada são esboçados nas Figuras ao longo do texto. Nas Figuras, o símbolo \circ em \mathbb{S}^2 indica que o ponto não pertence ao caminho da imagem por Φ da raiz em \mathbb{S}^2 .

2 As duas raízes, a Φ e os pólos norte e sul

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = az^2 + bz + c$, onde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que $z' \in \mathbb{C}$ é raiz de f se o número complexo $f(z')$ é igual a zero. As raízes de f são

$$z_1 \doteq x_1 + iy_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (primeira raiz)} \text{ e } z_2 \doteq x_2 + iy_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (segunda raiz)}.$$

Fixemos dois coeficientes reais de f . Com a introdução do *ponto no infinito* (∞), para cada uma das duas raízes, segue de Yamaoka (2023) que o limite da raiz é ou 0 ou ∞ quando o coeficiente variável tende a $-\infty$. Idem, quando o coeficiente variável tende a $+\infty$. Para cada uma das duas raízes, mostraremos que o limite da imagem por Φ da raiz é ou o pólo sul S ou o pólo norte N quando o coeficiente variável tende a $-\infty$. Idem, quando o coeficiente variável tende a $+\infty$. Nesta seção estão expostos apenas os resultados, que são simples de serem visualizados tendo em mente a Figura 1. Deixamos os detalhes para a subseção 7.2.

2.1 Primeiro caso

De Yamaoka (2023) temos, para cada um dos 9 subcasos,

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} z_1(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} z_1(a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} z_2(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} z_2(a) = 0.$$

Logo, quando $a \rightarrow -\infty$ e $a \rightarrow +\infty$ as imagens por Φ da primeira e da segunda raízes tendem ao pólo sul S .

2.2 Segundo caso

De Yamaoka (2023) segue, para cada um dos 6 subcasos, que

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} z_1(b) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} z_1(b) = 0.$$

Logo, quando $b \rightarrow -\infty$ a imagem por Φ da primeira raiz tende ao pólo norte N , e quando $b \rightarrow +\infty$ ela tende ao pólo sul S . Segue ainda, para cada um dos 6 subcasos, que

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} z_2(b) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} z_2(b) = \infty.$$

Logo, quando $b \rightarrow -\infty$ a imagem por Φ da segunda raiz tende ao pólo sul S , e quando $b \rightarrow +\infty$ ela tende ao pólo norte N .

2.3 Terceiro caso

De Yamaoka (2023) segue, para cada um dos 6 subcasos, que

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} z_1(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} z_1(c) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{c \rightarrow -\infty} z_2(c) = \lim_{c \rightarrow +\infty} z_2(c) = \infty.$$

Logo, quando $c \rightarrow -\infty$ e $c \rightarrow +\infty$ as imagens por Φ da primeira e da segunda raízes tendem ao pólo norte N .

3 Primeiro caso

Estudaremos os seguintes nove subcasos:

3.1 $b_0 > 0$, $c_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$, $\frac{c_0}{b_0} > 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 41) para \mathbb{S}^2 (Figura 2).

Definimos $p = \frac{2c_0}{b_0}$. Inicialmente determinaremos a circunferência λ' em \mathbb{S}^2 que é a imagem por Φ da circunferência $\lambda : (x + \frac{p}{2})^2 + y^2 = (\frac{p}{2})^2$. Tomemos os pontos $(-p, 0)$, $(\frac{-p}{2}, \frac{p}{2})$ e $(0, 0)$ de λ . Os pontos

$$A = \Phi(-p) = \left(\frac{-2p}{p^2+1}, 0, \frac{p^2-1}{p^2+1} \right), B = \Phi\left(\frac{-p}{2} + i\frac{p}{2}\right) = \left(\frac{-2p}{p^2+2}, \frac{2p}{p^2+2}, \frac{p^2-2}{p^2+2} \right) \text{ e } S = (0, 0, -1)$$

determinam λ' . Note que os pontos A e S determinam o diâmetro de λ' , de modo que seu centro O' e seu raio r são dados, respectivamente, por

$$O' = \frac{A+S}{2} = \left(\frac{-p}{p^2+1}, 0, \frac{-1}{p^2+1} \right) \quad \text{e} \quad r = \frac{\|\vec{SA}\|}{2} = \frac{\|A-S\|}{2} = \frac{\left\| \left(\frac{-2p}{p^2+1}, 0, \frac{2p^2}{p^2+1} \right) \right\|}{2} = \frac{|p|}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Agora, o plano Λ que contém λ' é aquele que passa por S e é paralelo aos vetores linearmente independentes

$$\vec{SA} \quad \text{e} \quad \vec{SB} = B - S = \left(\frac{-2p}{p^2+2}, \frac{2p}{p^2+2}, \frac{2p^2}{p^2+2} \right).$$

Então $(x, y, w) \in \Lambda$ se e somente se

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & w+1 \\ \frac{-2p}{p^2+1} & 0 & \frac{2p^2}{p^2+1} \\ \frac{-2p}{p^2+2} & \frac{2p}{p^2+2} & \frac{2p^2}{p^2+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & w+1 \\ 1 & 0 & -p \\ -1 & 1 & p \end{vmatrix} = px + w + 1 \quad (\text{equação geral de } \Lambda).$$

λ' (sem os pontos A e S) é formada por duas semicircunferências: a primeira raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y > 0$, a segunda raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y < 0$. Logo, a imagem por Φ das raízes complexas não reais é a circunferência λ' (sem os pontos A e S) de centro O' , de raio r e que está contida no plano Λ . Observe que:

- Λ é paralelo ao eixo y . De fato, escrevendo Λ como $px + 0y + 1w + 1 = 0$ e tomando o vetor $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ temos: $p \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$, mas o ponto $(0, 1, 0)$ pertence ao eixo y e não pertence a Λ , pois $p \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \neq 0$.

- A interseção de λ com o equador de \mathbb{S}^2 é a solução, para $w = 0$, de

$$\begin{cases} (x + \frac{p}{2})^2 + y^2 = (\frac{p}{2})^2 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

que fornece $C = \left(-\frac{1}{p}, \frac{\sqrt{p^2-1}}{|p|}, 0\right) \in \lambda'$ e $D = \left(-\frac{1}{p}, -\frac{\sqrt{p^2-1}}{|p|}, 0\right) \in \lambda'$, e ocorrem para $a = c_0$.

O ponto $E = \Phi\left(\frac{-p}{2}\right) = \left(\frac{-4p}{p^2+4}, 0, \frac{p^2-4}{p^2+4}\right)$ não pertence ao caminho da imagem por Φ da primeira raiz na esfera \mathbb{S}^2 . Finalmente levamos por Φ as raízes reais para \mathbb{S}^2 : com relação à primeira raiz, o intervalo $]-\frac{p}{2}, 0[$ é levado sobre o arco \widehat{ES} (exceto E e S) no plano xOw , e $[-p, -\frac{p}{2}[$ é levado sobre \widehat{AE} (exceto E) no plano xOw ; com relação à segunda raiz, $]0, +\infty[$ é levado sobre \widehat{SN} (exceto S e N) no plano xOw , e $]-\infty, -p]$ é levado sobre \widehat{NA} (exceto N) no plano xOw . Logo, a imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo os pontos S, E e N .

Concluindo o subcaso $b_0 > 0$ e $c_0 > 0$: quando $\frac{c_0}{b_0} = 1$, $\frac{c_0}{b_0} < 1 < 2\frac{c_0}{b_0}$ e $2\frac{c_0}{b_0} = 1$, os resultados obtidos acima permanecem verdadeiros; quando $p = 2\frac{c_0}{b_0} < 1$, eles também permanecem verdadeiros, entretanto não existem os pontos C e D .

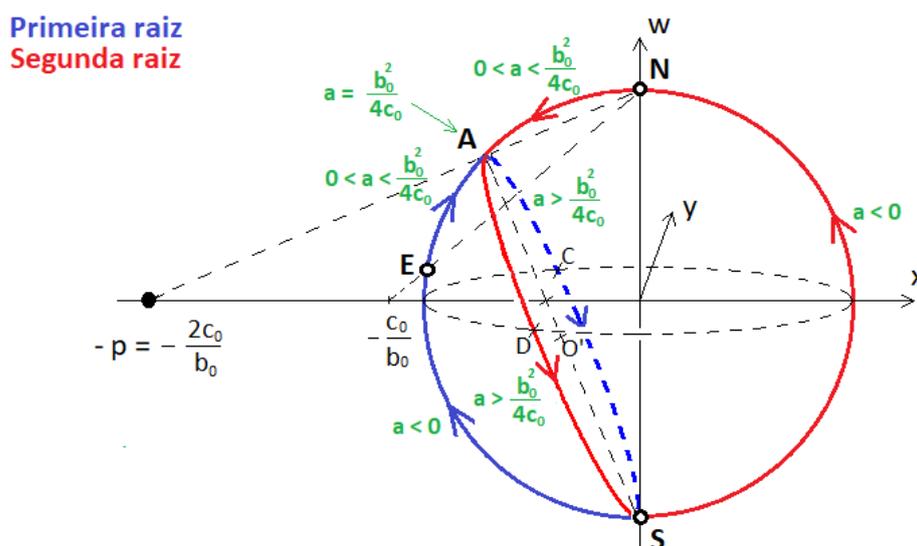


Figura 2: ($b_0 > 0, c_0 > 0, c_0/b_0 > 1$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre o arco azul de circunferência com traçado contínuo, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e caminha até A (não passando por E); de A , ela segue sobre a semicircunferência azul tracejada para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre o arco vermelho de circunferência, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e caminha até A (não passando por N); de A , ela segue sobre a semicircunferência vermelha para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). Veja a subseção 7.3.

Em 3.2, 3.3 e 3.4, definindo $p = 2c_0/b_0$, obtemos as mesmas fórmulas.

3.2 $b_0 < 0, c_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0, b_0 < 0, c_0 > 0, -\frac{c_0}{b_0} > 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 42) para \mathbb{S}^2 (Figura 3).

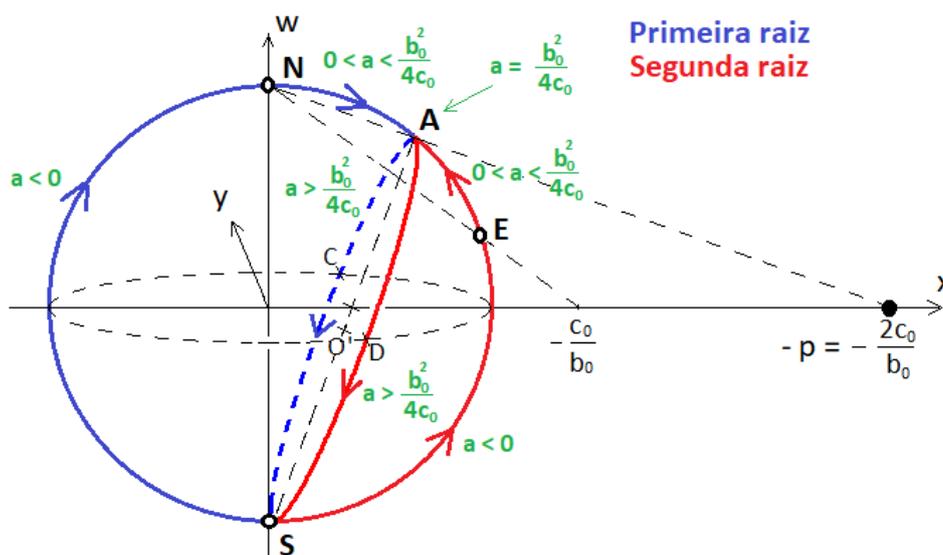


Figura 3: $(b_0 < 0, c_0 > 0, -c_0/b_0 > 1)$ Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

3.3 $b_0 > 0, c_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0, b_0 > 0, c_0 < 0, -\frac{c_0}{b_0} > 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 42) para \mathbb{S}^2 (Figura 4).

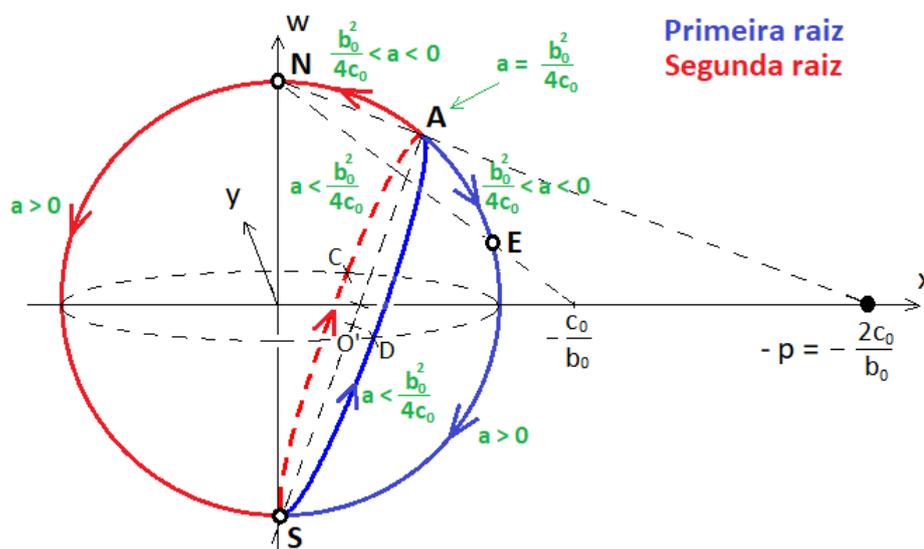


Figura 4: $(b_0 > 0, c_0 < 0, -c_0/b_0 > 1)$ Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

3.4 $b_0 < 0, c_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \neq 0, b_0 < 0, c_0 < 0, \frac{c_0}{b_0} > 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 43) para \mathbb{S}^2 (Figura 5).

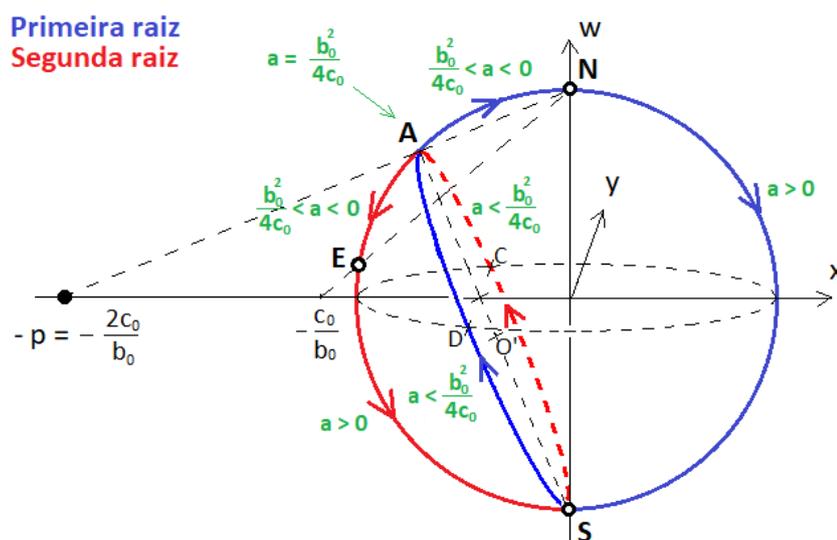


Figura 5: ($b_0 < 0, c_0 < 0, c_0/b_0 > 1$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

3.5 $b_0 = 0, c_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + c_0$, $a \neq 0, c_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 44) para \mathbb{S}^2 (Figura 6).

A imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo N e S .

A imagem por Φ das raízes imaginárias puras é a circunferência $y^2 + w^2 = 1$, excluindo N e S .

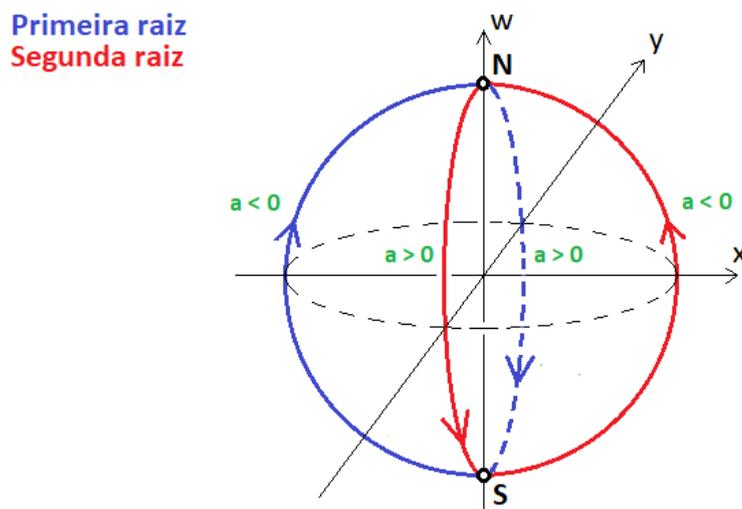


Figura 6: ($b_0 = 0, c_0 > 0$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre a semicircunferência azul com traçado contínuo, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e caminha para N (exceto N); ela segue então sobre a semicircunferência azul tracejada para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre a semicircunferência vermelha (contida no plano xOw), de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e caminha para N (exceto N); ela segue então sobre a semicircunferência vermelha (contida no plano yOw) para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S).

3.6 $b_0 = 0, c_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + c_0$, $a \neq 0, c_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 45) para \mathbb{S}^2 (Figura 7).

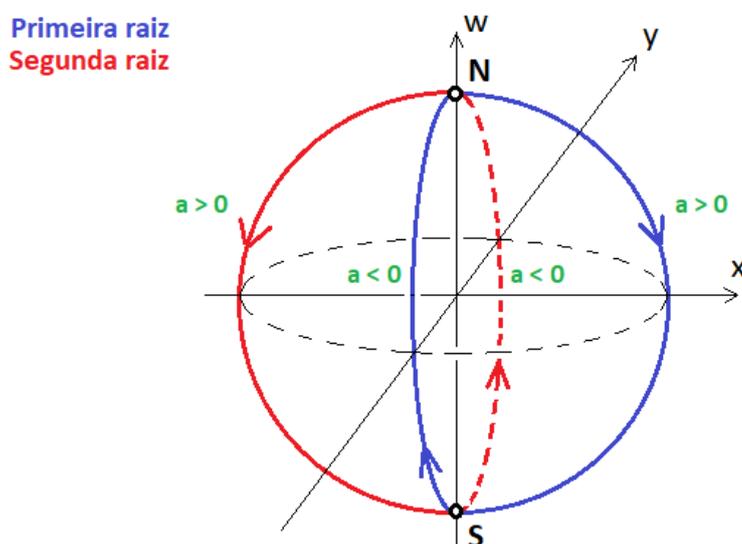


Figura 7: ($b_0 = 0, c_0 < 0$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

3.7 $b_0 > 0, c_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z$, $a \neq 0, b_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 46) para \mathbb{S}^2 (Figura 8).

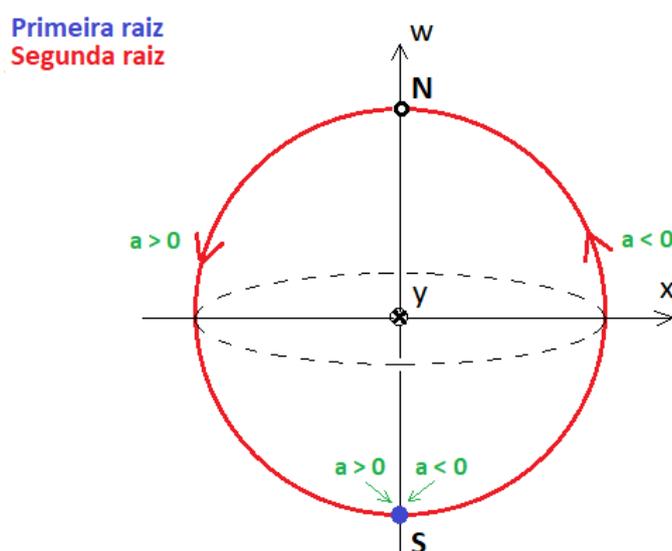


Figura 8: ($b_0 > 0, c_0 = 0$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz está em S . A imagem por Φ da segunda raiz parte, em sentido anti-horário, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e retorna a pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S e não passando por N).

3.8 $b_0 < 0, c_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2 + b_0z$, $a \neq 0, b_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 46) para \mathbb{S}^2 (Figura 9).

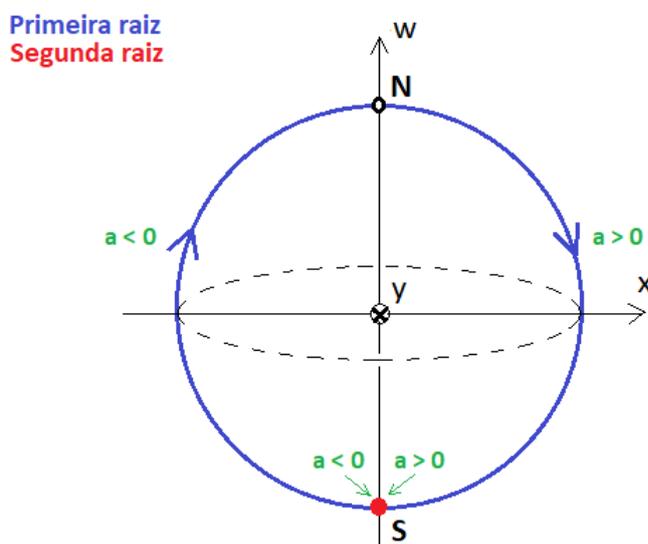


Figura 9: ($b_0 < 0, c_0 = 0$) Raízes de f_a , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

3.9 $b_0 = 0, c_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_a(z) = az^2$, $a \neq 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 47) para \mathbb{S}^2 .

Neste caso, os caminhos das imagens por Φ de ambas as raízes estão no pólo sul S , $\forall a \neq 0$.

4 Segundo caso

Estudaremos os seguintes seis subcasos:

4.1 $a_0 > 0, c_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$, $a_0 > 0, c_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 50) para \mathbb{S}^2 (Figura 10 para $\frac{c_0}{a_0} > 1$; Figura 11 para $\frac{c_0}{a_0} < 1$).

Definimos $p = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}$. Inicialmente determinaremos a circunferência λ' em \mathbb{S}^2 que é a imagem por Φ da circunferência $\lambda : x^2 + y^2 = p^2$. Dos pontos $(p, 0)$, $(-p, 0)$ e $(0, p)$ de λ encontramos os pontos

$$A = \Phi(p) = \left(\frac{2p}{p^2 + 1}, 0, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \quad , \quad B = \Phi(-p) = \left(\frac{-2p}{p^2 + 1}, 0, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \quad e$$

$$C = \Phi(ip) = \left(0, \frac{2p}{p^2 + 1}, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right).$$

A , B e C determinam λ' . Note que os pontos A e B determinam o diâmetro de λ' , de modo que seu centro O' e seu raio r são dados, respectivamente, por

$$O' = \frac{A + B}{2} = \left(0, 0, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\right) \quad \text{e} \quad r = \|\overrightarrow{O'A}\| = \frac{2|p|}{p^2 + 1}.$$

O plano Λ cuja equação geral é

$$w + \frac{1 - p^2}{1 + p^2} = 0$$

contém a circunferência λ' . λ' (exceto A e B) é formada por duas semicircunferências: a primeira raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y > 0$, a segunda raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y < 0$. Logo, a imagem por Φ das raízes complexas não reais é a circunferência λ' (exceto A e B) de centro O' , de raio r e que está contida no plano Λ .

Finalmente levamos por Φ as raízes reais para \mathbb{S}^2 : com relação à primeira raiz, o intervalo $[p, +\infty[$ é levado sobre o arco \widehat{AN} (exceto N) no plano xOw , e $[-p, 0[$ é levado sobre \widehat{BS} (exceto S) no plano xOw ; com relação à segunda raiz, $]0, p]$ é levado sobre \widehat{SA} (exceto S) no plano xOw , e $] -\infty, -p]$ é levado sobre \widehat{NB} (exceto N) no plano xOw . Logo, a imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo os pontos S e N .

Evidentemente, para $\frac{c_0}{a_0} = 1$, λ' é o equador de \mathbb{S}^2 .

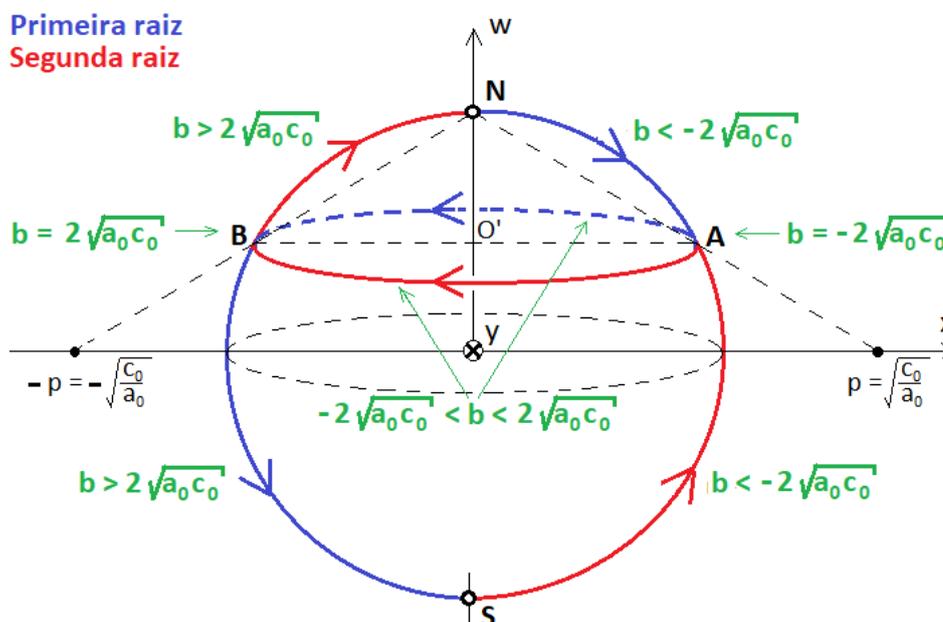


Figura 10: ($a_0 > 0, c_0 > 0, c_0/a_0 > 1$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre o arco azul de circunferência com traçado contínuo, de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e caminha até A ; de A , ela segue sobre a semicircunferência azul tracejada até B e, daí, segue pelo arco azul de circunferência com traçado contínuo para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre o arco vermelho de circunferência, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e caminha até A ; de A , ela segue sobre a semicircunferência vermelha até B e, daí, segue pelo arco vermelho de circunferência para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). Veja a subseção 7.4.

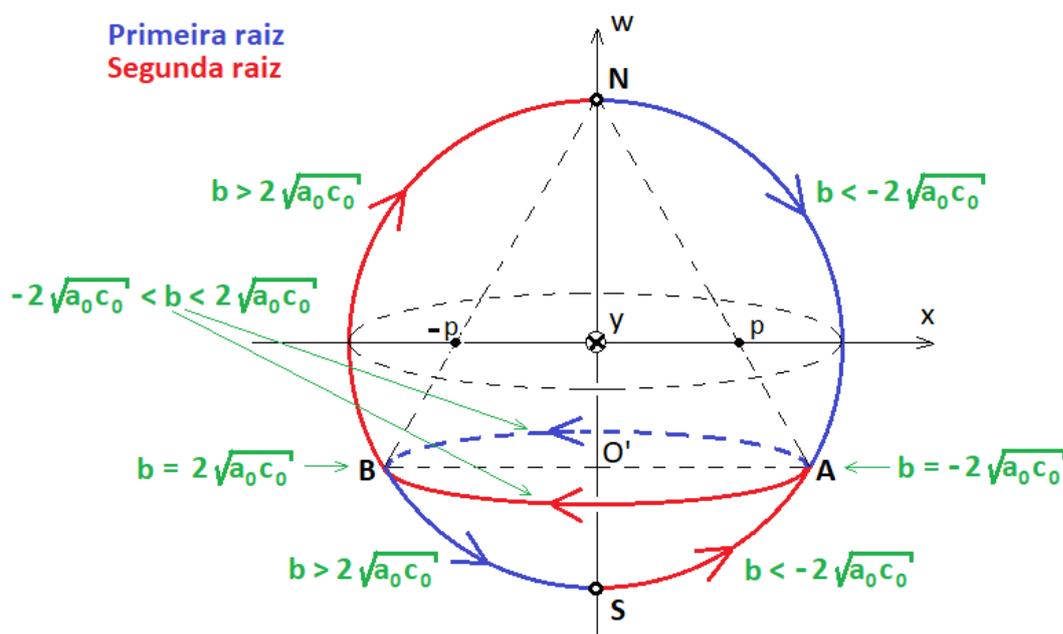


Figura 11: ($a_0 > 0, c_0 > 0, c_0/a_0 < 1$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A descrição dos caminhos das imagens por Φ de ambas as raízes é idêntica à da Figura 10.

Em 4.2, definindo $p = \sqrt{c_0/a_0}$, obtemos as mesmas fórmulas.

4.2 $a_0 < 0, c_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$, $a_0 < 0, c_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 51) para \mathbb{S}^2 (Figura 12 para $c_0/a_0 > 1$; Figura 13 para $c_0/a_0 < 1$).

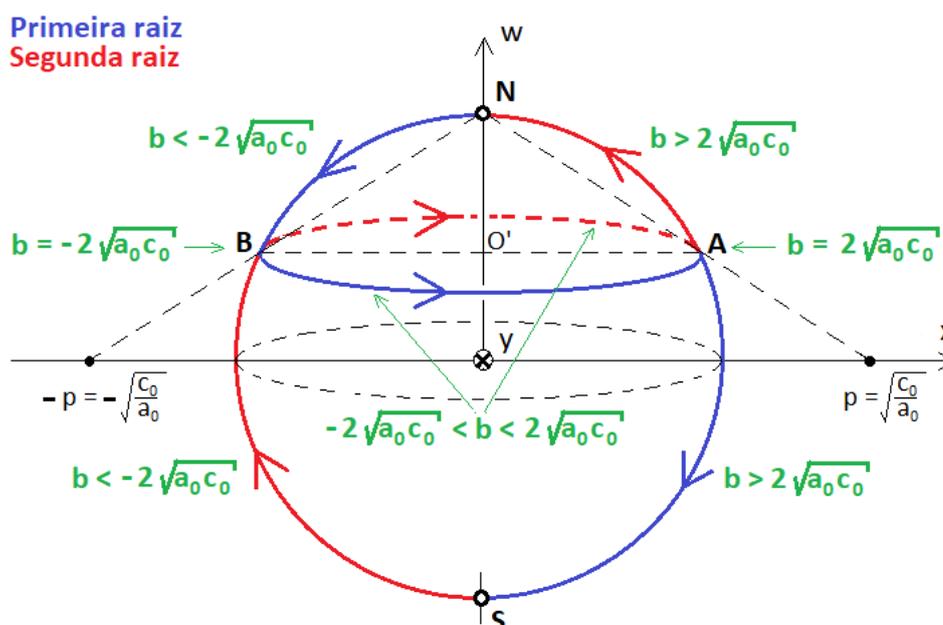


Figura 12: ($a_0 < 0, c_0 < 0, c_0/a_0 > 1$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

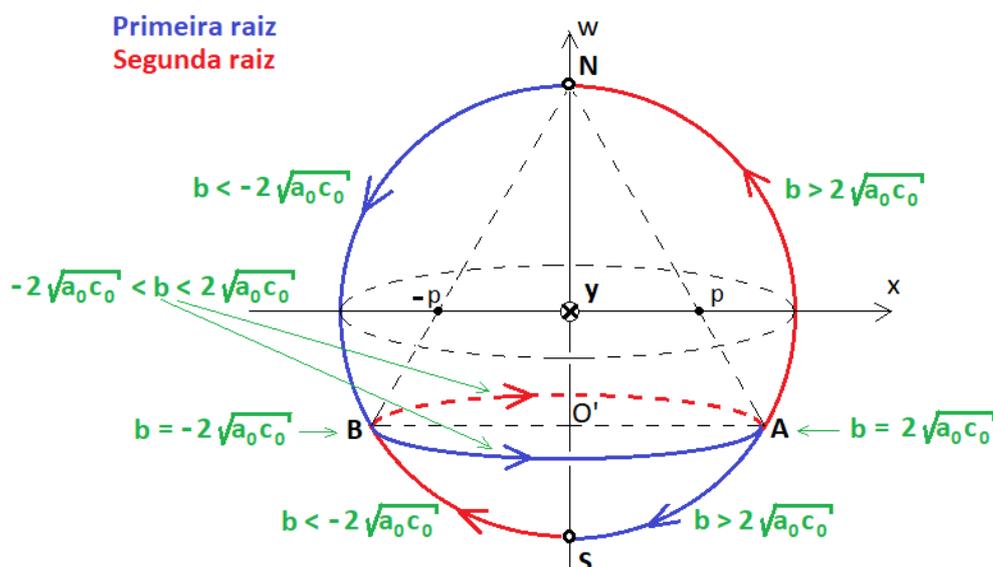


Figura 13: $(a_0 < 0, c_0 < 0, c_0/a_0 < 1)$ Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

4.3 $a_0 > 0, c_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0 z^2 + bz + c_0$, $a_0 > 0, c_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 52) para \mathbb{S}^2 (Figura 14).

A primeira e a segunda raízes são reais. Com relação à primeira raiz, Φ leva $]0, +\infty[$ (para o plano xOw) sobre $x^2 + w^2 = 1$ tal que $x > 0$. Com relação à segunda raiz, Φ leva $]-\infty, 0[$ (para o plano xOw) sobre $x^2 + w^2 = 1$ tal que $x < 0$. Logo, a imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo S e N .

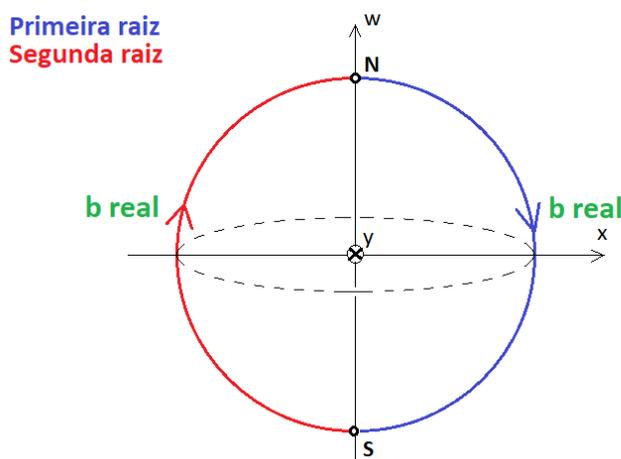


Figura 14: $(a_0 > 0, c_0 < 0)$ Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre a semicircunferência azul, de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e segue para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre a semicircunferência vermelha, de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e segue para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N).

4.4 $a_0 < 0, c_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$, $a_0 < 0, c_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 52) para \mathbb{S}^2 (Figura 15).

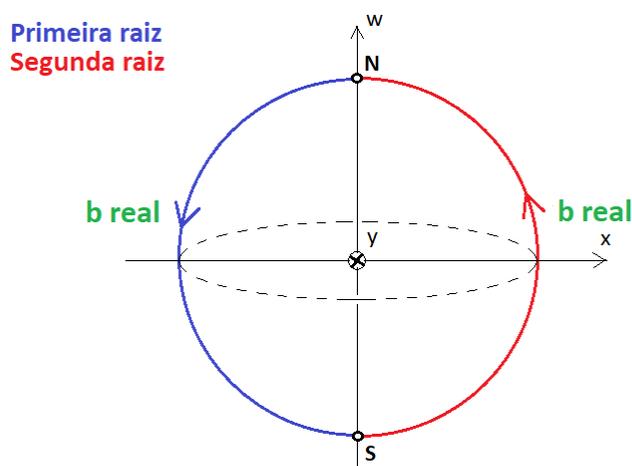


Figura 15: ($a_0 < 0, c_0 > 0$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

4.5 $a_0 > 0, c_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz$, $a_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 53) para \mathbb{S}^2 (Figura 16).

A primeira e a segunda raízes são reais. Com relação à primeira raiz, Φ leva $[0, +\infty[$ (para o plano xOw) sobre $x^2 + w^2 = 1$ tal que $x \geq 0$, excluindo N . Com relação à segunda raiz, Φ leva $] -\infty, 0]$ (para o plano xOw) sobre $x^2 + w^2 = 1$ tal que $x \leq 0$, excluindo N . Logo, a imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo N .

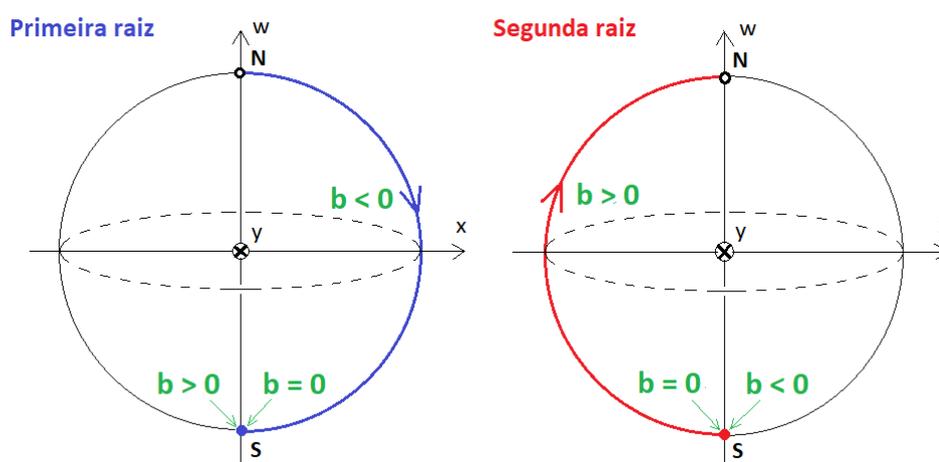


Figura 16: ($a_0 > 0, c_0 = 0$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre a semicircunferência azul, de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e segue até S . A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre a semicircunferência vermelha, de S e segue para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N).

4.6 $a_0 < 0, c_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_b(z) = a_0z^2 + bz$, $a_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 54) para \mathbb{S}^2 (Figura 17).

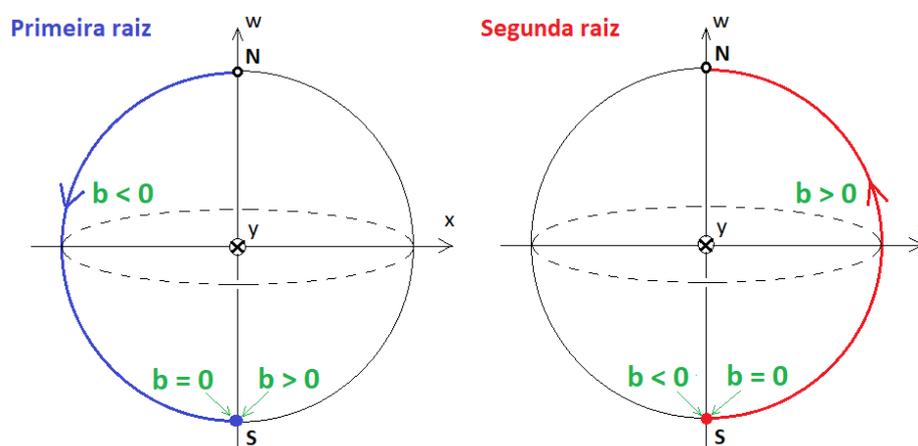


Figura 17: ($a_0 < 0, c_0 = 0$) Raízes de f_b , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

5 Terceiro caso

5.1 $a_0 > 0, b_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $a_0 > 0, b_0 > 0, \frac{b_0}{2a_0} < 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 56) para \mathbb{S}^2 (Figura 18).

Definimos $p = \frac{b_0}{2a_0}$. Inicialmente determinaremos a circunferência λ' em \mathbb{S}^2 que é a imagem por Φ da reta $\lambda : x + p = 0$ unida com ∞ . Tomemos os pontos $(-p, 0)$ e $(-p, -p)$ de λ , e ∞ . Os pontos

$$A = \Phi(-p) = \left(\frac{-2p}{p^2 + 1}, 0, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right), B = \Phi(-p - ip) = \left(\frac{-2p}{2p^2 + 1}, \frac{-2p}{2p^2 + 1}, \frac{2p^2 - 1}{2p^2 + 1} \right) \text{ e } N = (0, 0, 1)$$

determinam λ' . Note que os pontos A e N determinam o diâmetro de λ' , de modo que seu centro O' e seu raio r são dados, respectivamente, por

$$O' = \frac{A + N}{2} = \left(\frac{-p}{p^2 + 1}, 0, \frac{p^2}{p^2 + 1} \right) \text{ e } r = \frac{\|\vec{NA}\|}{2} = \frac{\|A - N\|}{2} = \frac{\left\| \left(\frac{-2p}{p^2 + 1}, 0, \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \right\|}{2} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Agora, o plano Λ que contém λ' é aquele que passa por N e é paralelo aos vetores linearmente independentes

$$\vec{NA} \text{ e } \vec{NB} = B - N = \left(\frac{-2p}{2p^2 + 1}, \frac{-2p}{2p^2 + 1}, \frac{-2}{2p^2 + 1} \right).$$

Então $(x, y, w) \in \Lambda$ se e somente se

$$0 = \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & w - 1 \\ \frac{-2p}{p^2 + 1} & 0 & \frac{-2}{p^2 + 1} \\ \frac{-2p}{2p^2 + 1} & \frac{-2p}{2p^2 + 1} & \frac{-2}{2p^2 + 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & w - 1 \\ -2p & 0 & -2 \\ -2p & -2p & -2 \end{vmatrix} = -x + pw - p \text{ (equação geral de } \Lambda).$$

λ' (sem os pontos A e N) é formada por duas semicircunferências: a primeira raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y > 0$, a segunda raiz ocupa a semicircunferência que possui coordenada $y < 0$. Logo, a imagem por Φ das raízes complexas não reais é a circunferência λ' (sem os pontos A e N) de centro O' , de raio r e que está contida no plano Λ . Observe que:

- Λ é paralelo ao eixo y . De fato, escrevendo Λ como $-1x + 0y + pw - p = 0$ e tomando o vetor $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ temos: $-1.0 + 0.1 + p.0 = 0$, mas o ponto $(0, 1, 0)$ pertence ao eixo y e não pertence a Λ , pois $-1.0 + 0.1 + p.0 - p \neq 0$.
- A interseção de λ com o equador de \mathbb{S}^2 é a solução, para $w = 0$, de

$$\begin{cases} x + p = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

que fornece $C = (-p, \sqrt{1 - p^2}, 0) \in \lambda'$ e $D = (-p, -\sqrt{1 - p^2}, 0) \in \lambda'$, e ocorrem para $c = a_0$.

Finalmente levamos por Φ as raízes reais para \mathbb{S}^2 : com relação à primeira raiz, o intervalo $[-p, +\infty[$ é levado sobre o arco azul com traçado contínuo \widehat{AN} (exceto N) no plano xOw ; com relação à segunda raiz, $] - \infty, -p]$ é levado sobre o arco vermelho \widehat{NA} (exceto N) no plano xOw . Logo, a imagem por Φ das raízes reais é a circunferência $x^2 + w^2 = 1$, excluindo o ponto N .

Quando $\frac{b_0}{2a_0} = 1$, os resultados obtidos acima permanecem verdadeiros; quando $\frac{b_0}{2a_0} > 1$ (Figura 19), eles também permanecem verdadeiros, entretanto não existem os pontos C e D .

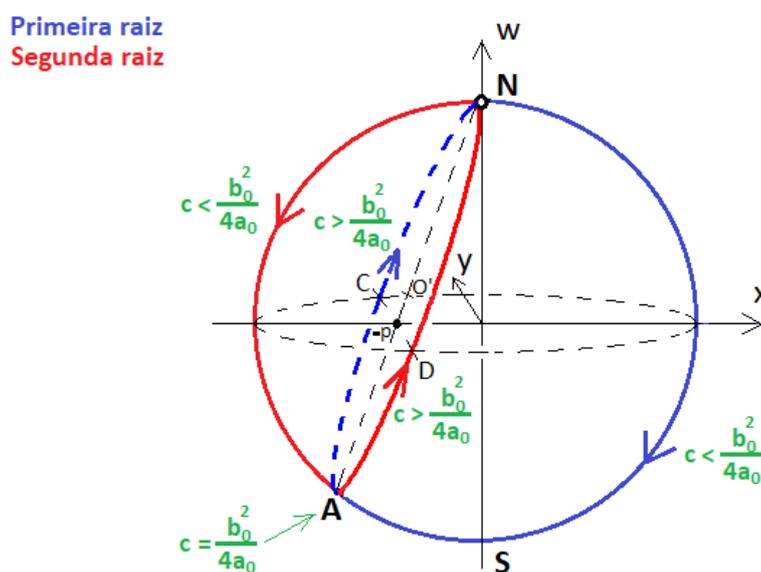


Figura 18: ($a_0 > 0, b_0 > 0, \frac{b_0}{2a_0} < 1$) Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre o arco azul de circunferência com traçado contínuo, de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e caminha até A ; daí, ela segue sobre a semicircunferência azul tracejada para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre o arco vermelho de circunferência (contido no plano xOw), de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e caminha até A ; daí, ela segue sobre a semicircunferência vermelha para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). Veja a subseção 7.5.

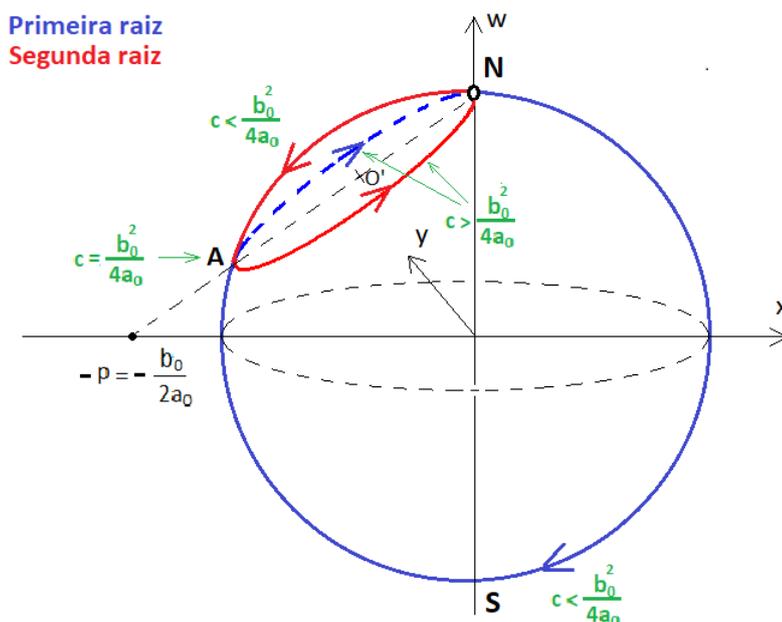


Figura 19: $(a_0 > 0, b_0 > 0, \frac{b_0}{2a_0} > 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

Em 5.2, 5.3 e 5.4, definindo $p = b_0/(2a_0)$, obtemos as mesmas fórmulas.

5.2 $a_0 > 0, b_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $a_0 > 0, b_0 < 0$, $-\frac{b_0}{2a_0} < 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 57) para \mathbb{S}^2 (Figura 20).

Quando $-\frac{b_0}{2a_0} > 1$, tem-se a Figura 21.

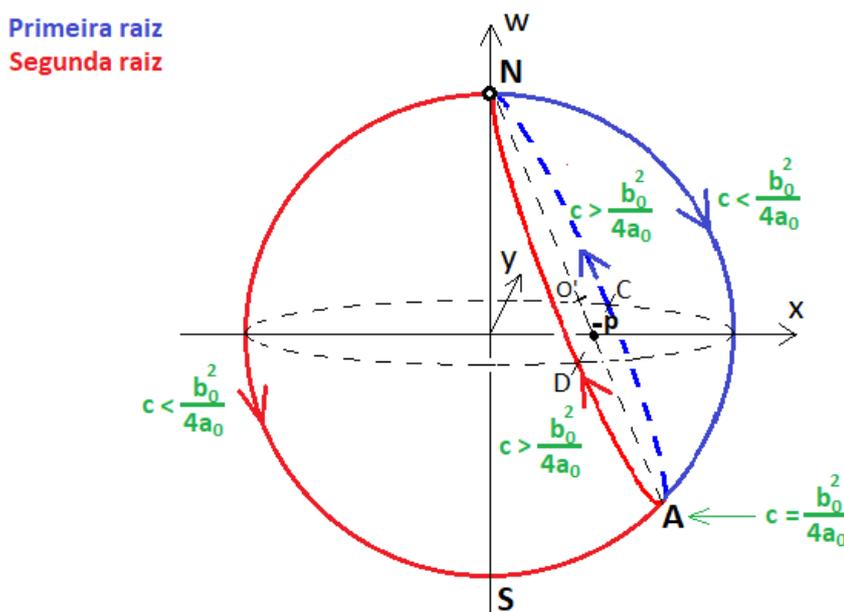


Figura 20: $(a_0 > 0, b_0 < 0, -\frac{b_0}{2a_0} < 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

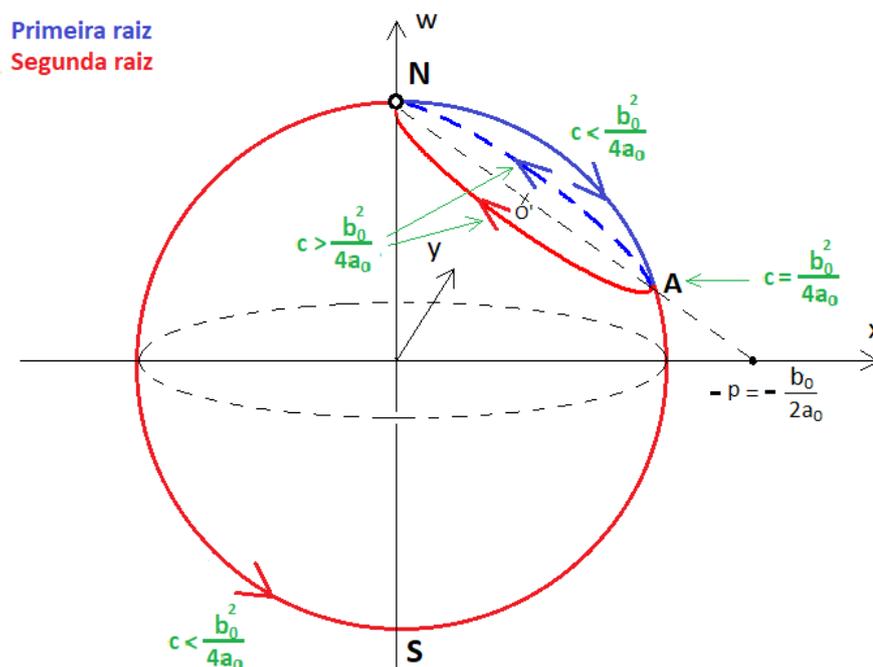


Figura 21: $(a_0 > 0, b_0 < 0, -\frac{b_0}{2a_0} > 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

5.3 $a_0 < 0, b_0 < 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $a_0 < 0, b_0 < 0, \frac{b_0}{2a_0} < 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 57) para \mathbb{S}^2 (Figura 22).

Quando $\frac{b_0}{2a_0} > 1$, tem-se a Figura 23.

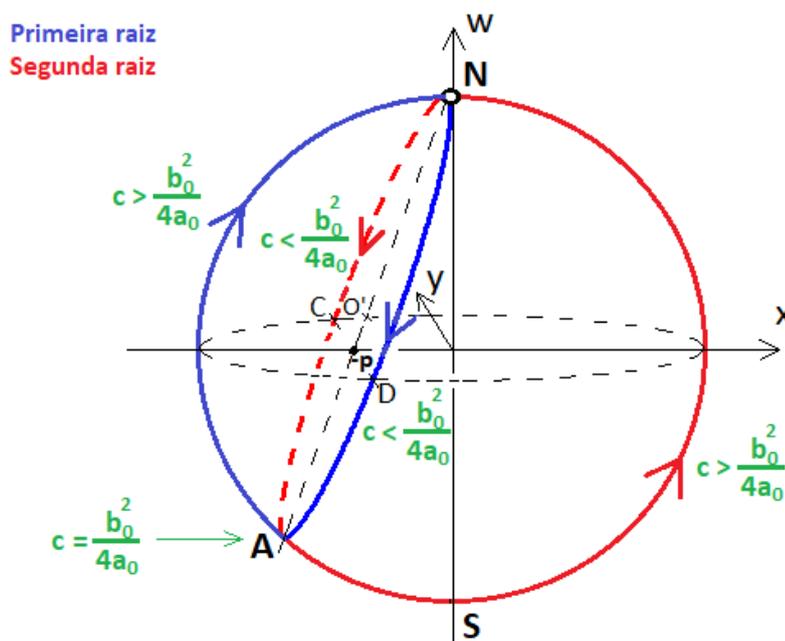


Figura 22: $(a_0 < 0, b_0 < 0, \frac{b_0}{2a_0} < 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

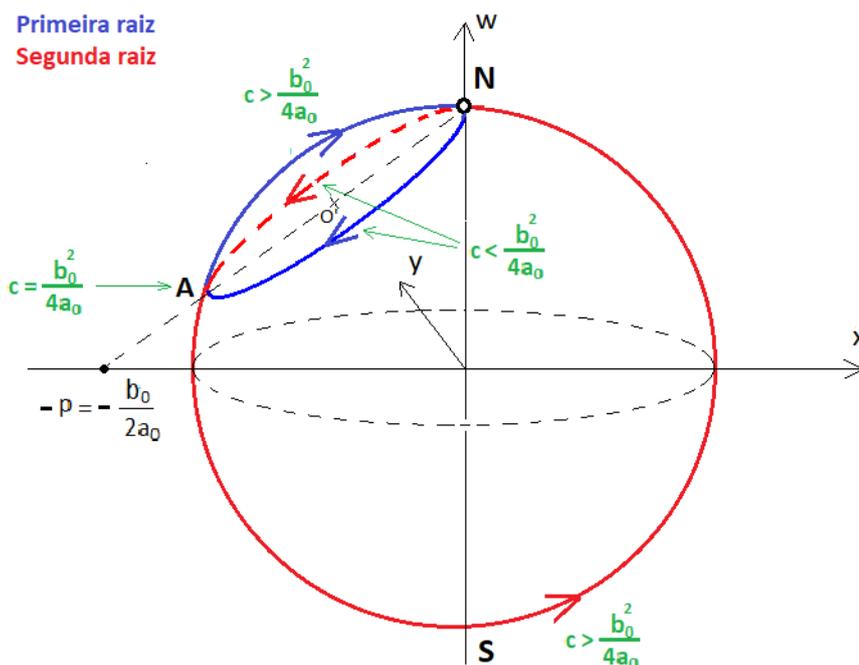


Figura 23: $(a_0 < 0, b_0 < 0, \frac{b_0}{2a_0} > 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

5.4 $a_0 < 0, b_0 > 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $a_0 < 0, b_0 > 0$, $-\frac{b_0}{2a_0} < 1$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 57) para \mathbb{S}^2 (Figura 24).

Quando $-\frac{b_0}{2a_0} > 1$, tem-se a Figura 25.

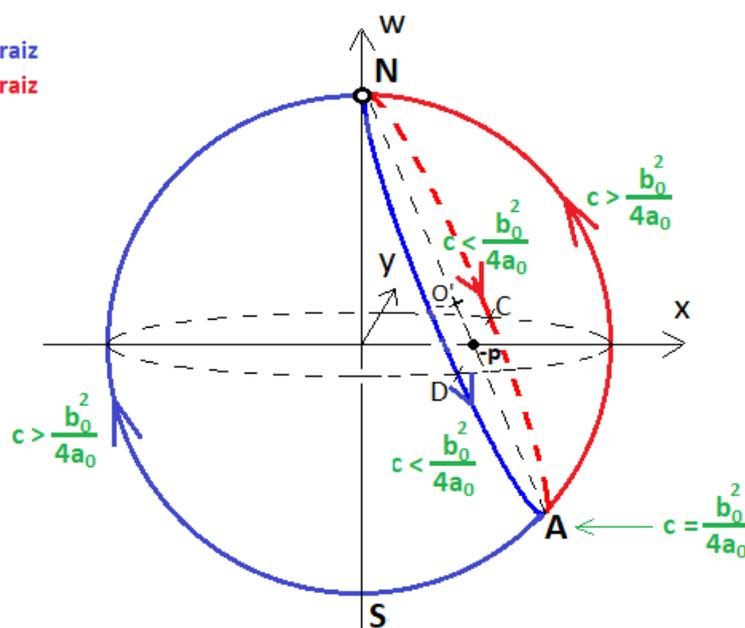


Figura 24: $(a_0 < 0, b_0 > 0, -\frac{b_0}{2a_0} < 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

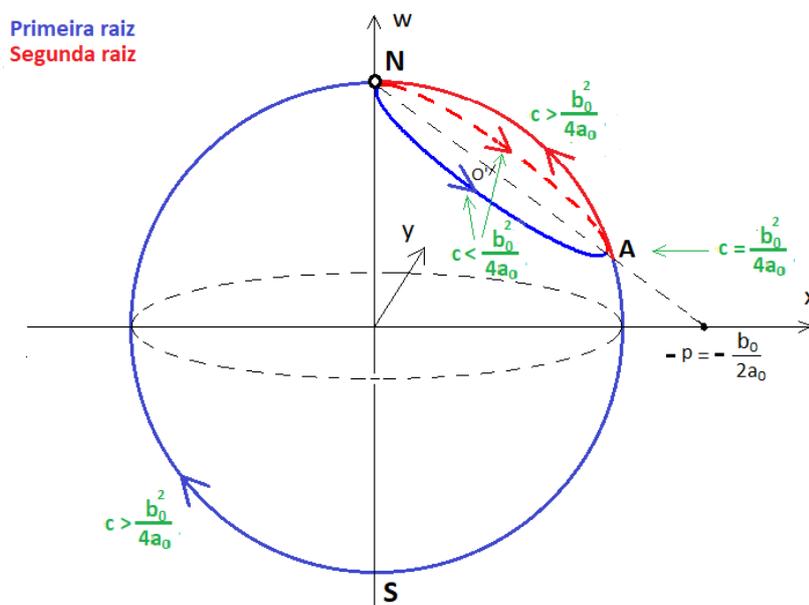


Figura 25: $(a_0 < 0, b_0 > 0, -\frac{b_0}{2a_0} > 1)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

5.5 $a_0 > 0, b_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + c$, $a_0 > 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 58) para \mathbb{S}^2 (Figura 26).

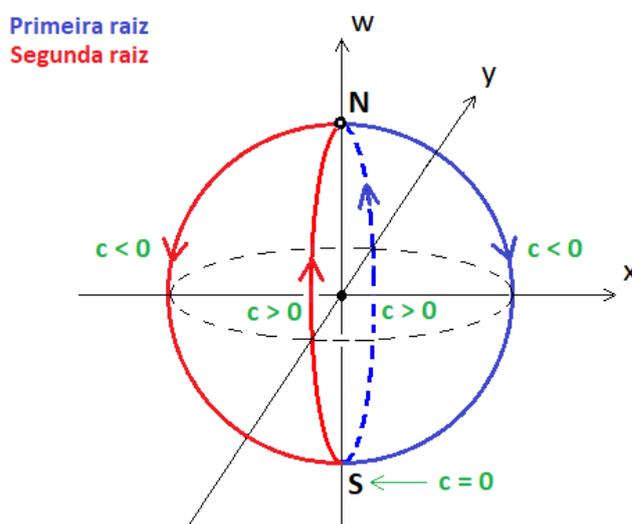


Figura 26: $(a_0 > 0, b_0 = 0)$ Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 . A imagem por Φ da primeira raiz parte, sobre a semicircunferência azul com traçado contínuo, de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e caminha até S; daí segue sobre a semicircunferência azul tracejada para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). A imagem por Φ da segunda raiz parte, sobre a semicircunferência vermelha (no plano xOw), de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e caminha até S; daí segue sobre a semicircunferência vermelha (no plano yOw) para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N).

5.6 $a_0 < 0, b_0 = 0$

Levaremos, via Φ , os caminhos das duas raízes de $f_c(z) = a_0z^2 + c$, $a_0 < 0$, do plano \mathbb{C} (Yamaoka, 2023, p. 58) para \mathbb{S}^2 (Figura 27).

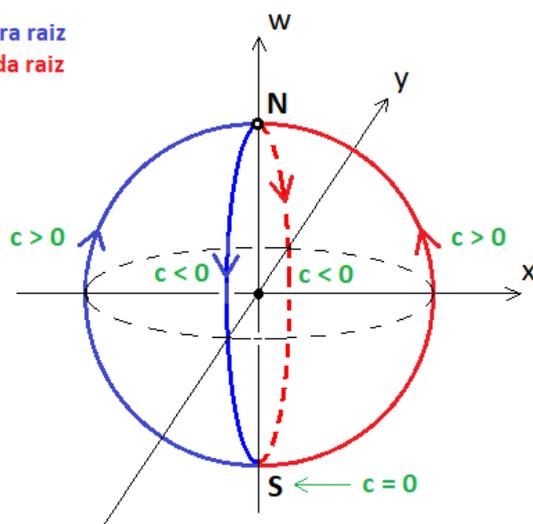


Figura 27: ($a_0 < 0, b_0 = 0$) Raízes de f_c , via Φ , em \mathbb{S}^2 .

6 Exemplos

Na Figura 28, para $a = 2$, a imagem por Φ da primeira raiz está sobre a semicircunferência azul tracejada; para $a = 3$, ela está sobre esta mesma semicircunferência, porém mais próxima de S .

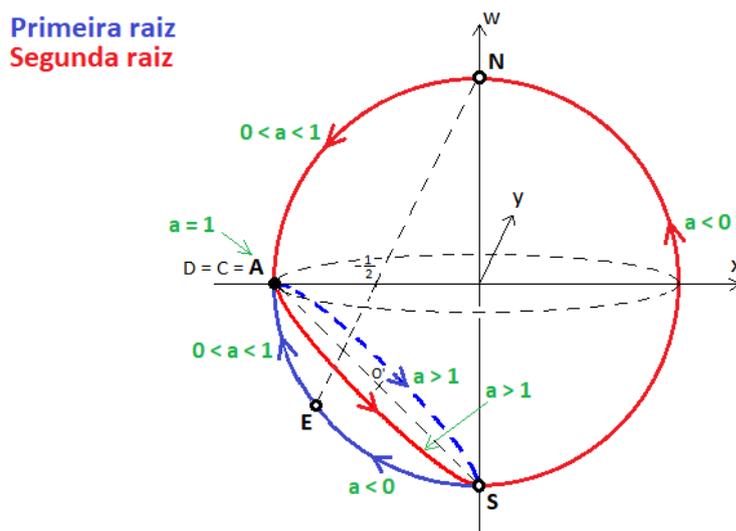


Figura 28: Raízes de $f_a(z) = az^2 + 2z + 1$, via Φ , em \mathbb{S}^2 .

Na Figura 29, para $b = 2$, a imagem por Φ da primeira raiz está sobre a semicircunferência azul tracejada; para $b = 3$, ela está sobre esta mesma semicircunferência, porém mais próxima de B .

Na Figura 30, para $c = 2$, a imagem por Φ da primeira raiz está sobre a semicircunferência azul tracejada; para $c = 3$, ela está sobre esta mesma semicircunferência, porém mais próxima de N .

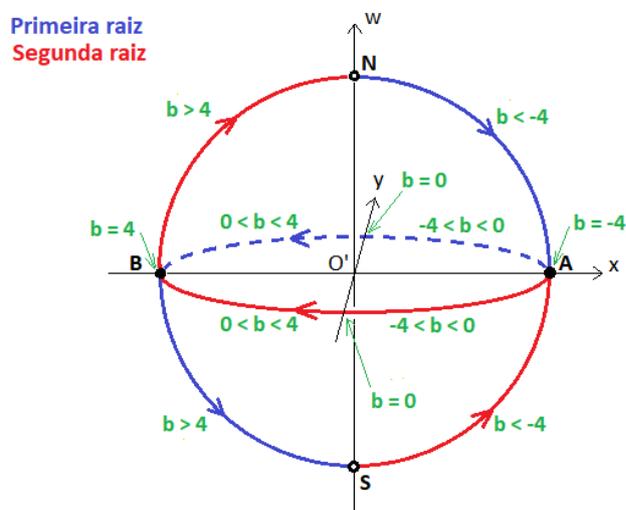


Figura 29: Raízes de $f_b(z) = 2z^2 + bz + 2$, via Φ , em \mathbb{S}^2 .

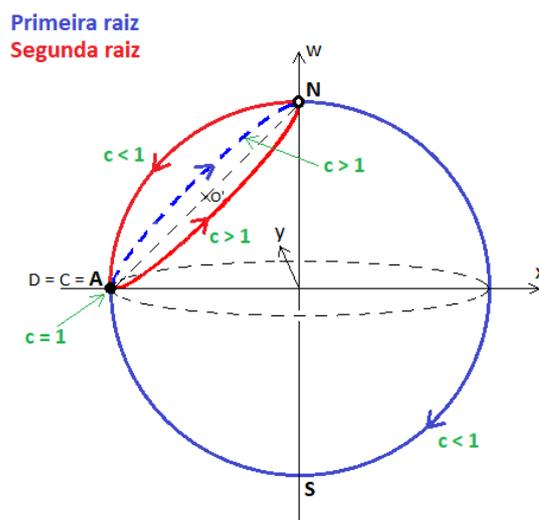


Figura 30: Raízes de $f_c(z) = z^2 + 2z + c$, via Φ , em \mathbb{S}^2 .

7 Apêndice

7.1 A.1

- Primeiro caso

Sejam $z_1 : \mathbb{R}^* \rightarrow I(z_1) \subset \mathbb{R}^2$ e $z_2 : \mathbb{R}^* \rightarrow I(z_2) \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente, os caminhos contínuos da primeira e da segunda raízes, onde $I(z_1)$ e $I(z_2)$ são suas respectivas imagens. Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{N\}$. Note que continuamos denotando por Φ a restrição $\Phi|_{\mathbb{R}^2}$. De Lima

(2000, p.29), Φ é contínua, daí $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é contínua; conseqüentemente, as restrições $\Phi|_{I(z_1)} : I(z_1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $\Phi|_{I(z_2)} : I(z_2) \rightarrow \mathbb{S}^2$ são contínuas. Portanto, as aplicações compostas (caminhos em \mathbb{S}^2) $(\Phi|_{I(z_1)} \circ z_1) : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $(\Phi|_{I(z_2)} \circ z_2) : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{S}^2$ são contínuas (contínuos).

- Segundo e terceiro casos

Basta trocar \mathbb{R}^* por \mathbb{R} .

7.2 A.2

1. Sejam j e d tais que $z_j(d) = x_j(d) + iy_j(d)$ e $\lim_{d \rightarrow -\infty} z_j(d) = 0$. Então $\lim_{d \rightarrow -\infty} \Phi(z_j(d)) = S$.
(Sejam j e d tais que $z_j(d) = x_j(d) + iy_j(d)$ e $\lim_{d \rightarrow +\infty} z_j(d) = 0$. Então $\lim_{d \rightarrow +\infty} \Phi(z_j(d)) = S$.)

Para deixar as notações menos carregadas, denotamos $\Phi|_{I(z_j)}$ apenas por Φ .

Prova:

De $\lim_{d \rightarrow -\infty} z_j(d) = 0$ segue que $\lim_{d \rightarrow -\infty} |z_j(d)| = \lim_{d \rightarrow -\infty} x_j(d) = \lim_{d \rightarrow -\infty} y_j(d) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow -\infty} \Phi(z_j(d)) &= \lim_{d \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, \frac{2y_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, \frac{|z_j(d)|^2 - 1}{|z_j(d)|^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\lim(2x_j(d))}{\lim(|z_j(d)|^2 + 1)}, \frac{\lim(2y_j(d))}{\lim(|z_j(d)|^2 + 1)}, \frac{\lim(|z_j(d)|^2 - 1)}{\lim(|z_j(d)|^2 + 1)} \right) \\ &= \left(\frac{2 \lim x_j(d)}{(\lim |z_j(d)|)^2 + 1}, \frac{2 \lim y_j(d)}{(\lim |z_j(d)|)^2 + 1}, \frac{(\lim |z_j(d)|)^2 - 1}{(\lim |z_j(d)|)^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1}, \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1}, \frac{0^2 - 1}{0^2 + 1} \right) \\ &= (0, 0, -1) \\ &= S. \quad \square \end{aligned}$$

2. Sejam j e d tais que $z_j(d) = x_j(d) + iy_j(d)$ e $\lim_{d \rightarrow -\infty} z_j(d) = \infty$. Então $\lim_{d \rightarrow -\infty} \Phi(z_j(d)) = N$.
(Sejam j e d tais que $z_j(d) = x_j(d) + iy_j(d)$ e $\lim_{d \rightarrow +\infty} z_j(d) = \infty$. Então $\lim_{d \rightarrow +\infty} \Phi(z_j(d)) = N$.)

Para deixar as notações menos carregadas, denotamos $\Phi|_{I(z_j)}$ apenas por Φ .

Prova:

De $\lim_{d \rightarrow -\infty} z_j(d) = \infty$ segue que

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} |z_j(d)| = +\infty. \quad (1)$$

Observe que, para $z_j(d) \neq 0$,

$$0 \leq \frac{|x_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} \leq \frac{|z_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} \leq \frac{|z_j(d)|}{|z_j(d)|^2} = \frac{1}{|z_j(d)|}, \quad (2)$$

$$0 \leq \frac{|y_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} \leq \frac{|z_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} \leq \frac{|z_j(d)|}{|z_j(d)|^2} = \frac{1}{|z_j(d)|}, \quad (3)$$

e

$$\frac{|z_j(d)|^2 - 1}{|z_j(d)|^2 + 1} = \frac{1 - 1/|z_j(d)|^2}{1 + 1/|z_j(d)|^2}. \quad (4)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{|x_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} = 0 \implies \lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{x_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1} = 0. \quad (5)$$

De (1) e (3) obtemos

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{|y_j(d)|}{|z_j(d)|^2 + 1} = 0 \implies \lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{y_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1} = 0. \quad (6)$$

De (1) e (4) obtemos

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{|z_j(d)|^2 - 1}{|z_j(d)|^2 + 1} = 1. \quad (7)$$

Portanto, de 5, 6 e 7 decorre que

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow -\infty} \Phi(z_j(d)) &= \lim_{d \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, \frac{2y_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, \frac{|z_j(d)|^2 - 1}{|z_j(d)|^2 + 1} \right) \\ &= \left(2 \lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{x_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, 2 \lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{y_j(d)}{|z_j(d)|^2 + 1}, \lim_{d \rightarrow -\infty} \frac{|z_j(d)|^2 - 1}{|z_j(d)|^2 + 1} \right) \\ &= (2.0, 2.0, 1) \\ &= (0, 0, 1) \\ &= N. \quad \square \end{aligned}$$

7.3 A.3

Por inspeção visual é simples identificar, para cada subcaso, os percursos (caminhos) das imagens por Φ de ambas as raízes em \mathbb{S}^2 , como função de a , a partir dos percursos (caminhos) de ambas as raízes no plano \mathbb{C} presentes em Yamaoka (2023). A justificativa formal se dá da seguinte maneira:

Considere, por exemplo, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$.

- $c_0/b_0 > 1$ e $J = \{a \in \mathbb{R}^* \mid 0 < a < b_0^2/(4c_0)\}$

Sejam, $\forall a \in J$,

$$z_1(a) = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad z'_1(a) = \frac{2ac_0 + b_0\sqrt{b_0^2 - 4ac_0} - b_0^2}{2a^2\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}.$$

O pedaço do caminho da imagem por Φ da primeira raiz restrita a J é a aplicação $(\Phi \circ z_1) : J \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\Phi \circ z_1)(a) = ((\Phi \circ z_1)_x(a), (\Phi \circ z_1)_y(a), (\Phi \circ z_1)_w(a)) = \left(\frac{2z_1(a)}{z_1^2(a) + 1}, 0, \frac{z_1^2(a) - 1}{z_1^2(a) + 1} \right).$$

$\Phi \circ z_1$ denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J)} \circ z_1|_J$, onde $I(z_1|J)$ é a imagem da restrição $z_1|_J$. Como $(\Phi \circ z_1)$ é diferenciável em J , estudaremos os sinais das 3 componentes do vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'(a)$. Temos

$$\begin{aligned} (\Phi \circ z_1)'_x(a) &= \frac{2z_1'(a)(z_1^2(a) + 1) - 2z_1(a)2z_1(a)z_1'(a)}{(z_1^2(a) + 1)^2} \\ &= \frac{2z_1'(a)[1 - z_1^2(a)]}{(z_1^2(a) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Da Figura 1 (Yamaoka, 2023, p. 41), $-2\frac{c_0}{b_0} < z_1(a) < -\frac{c_0}{b_0}$, $\forall a \in J$, e $z_1'(a) < 0$, $\forall a \in J$. Por hipótese, $c_0/b_0 > 1$. Daí, $z_1(a) < -1$, $\forall a \in J$, o que implica que $[1 - z_1^2(a)] < 0$, $\forall a \in J$. Logo, $(\Phi \circ z_1)'_x(a) > 0$, $\forall a \in J$, isto é, a componente x do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo x .

Evidentemente, $(\Phi \circ z_1)'_y(a) = 0$, $\forall a \in J$, ou seja, a componente y do vetor velocidade é nula. Por fim,

$$\begin{aligned} (\Phi \circ z_1)'_w(a) &= \frac{2z_1(a)z_1'(a)(z_1^2(a) + 1) - (z_1^2(a) - 1)2z_1(a)z_1'(a)}{(z_1^2(a) + 1)^2} \\ &= \frac{4z_1(a)z_1'(a)}{(z_1^2(a) + 1)^2} > 0, \forall a \in J, \end{aligned}$$

isto é, a componente w do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo w . Portanto, o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $a \in J$.

- $J = \{a \in \mathbb{R}^* \mid a > b_0^2/(4c_0)\}$

Seja, $\forall a \in J$,

$$z_1(a) = -\frac{b_0}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}.$$

O pedaço do caminho da imagem por Φ da primeira raiz restrita a J é a aplicação $(\Phi \circ z_1) : J \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\Phi \circ z_1)(a) = \left(-\frac{b_0}{a + c_0}, \frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{a + c_0}, \frac{c_0 - a}{a + c_0} \right).$$

$\Phi \circ z_1$ denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J)} \circ z_1|_J$, onde $I(z_1|J)$ é a imagem da restrição $z_1|_J$.

Como $(\Phi \circ z_1)$ é diferenciável em J , estudaremos os sinais das 3 componentes do vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'(a)$. Temos

$$(\Phi \circ z_1)'_x(a) = \frac{b_0}{(a + c_0)^2} > 0, \forall a \in J,$$

isto é, a componente x do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo x . Agora,

$$(\Phi \circ z_1)'_y(a) = \frac{-2c_0a + b_0^2 + 2c_0^2}{(a + c_0)^2 \sqrt{4ac_0 - b_0^2}}.$$

Como o denominador é positivo, o sinal do numerador determina o sinal de $(\Phi \circ z_1)'_y(a)$, que é

$$\begin{cases} > 0, & \text{para } b_0^2/(4c_0) < a < b_0^2/(2c_0) + c_0, \\ = 0, & \text{para } a = b_0^2/(2c_0) + c_0, \\ < 0, & \text{para } a > b_0^2/(2c_0) + c_0. \end{cases}$$

Isto quer dizer que a componente y do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo y para $b_0^2/(4c_0) < a < b_0^2/(2c_0) + c_0$, se anula para $a = b_0^2/(2c_0) + c_0$ e passa a ter sentido contrário ao do eixo y para $a > b_0^2/(2c_0) + c_0$. Por fim,

$$(\Phi \circ z_1)'_w(a) = -\frac{2c_0}{(a + c_0)^2} < 0, \forall a \in J,$$

o que significa que a componente w do vetor velocidade tem sentido contrário ao do eixo w . Portanto, o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $a \in J$.

Observe que, como $\lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^-} (\Phi \circ z_1)'_y(a) = 0$ e $\lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^+} (\Phi \circ z_1)'_y(a) = +\infty$, segue que não existe

o vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'$ em $a = \frac{b_0^2}{4c_0}$.

- $c_0/b_0 > 1$ e $J = \{a \in \mathbb{R}^* \mid a < 0\}$

Da Figura 1 (Yamaoka, 2023, p. 41), $-\frac{c_0}{b_0} < z_1(a) < 0, \forall a \in J$, e $z'_1(a) < 0, \forall a \in J$. Como $z_1(a) = -1 \Leftrightarrow a = b_0 - c_0 < 0$, fazemos $J = J_1 \cup \{b_0 - c_0\} \cup J_2$, onde $J_1 = \{a \in \mathbb{R}^* \mid a < b_0 - c_0\}$ e $J_2 = \{a \in \mathbb{R}^* \mid b_0 - c_0 < a < 0\}$. Temos

$$\begin{aligned} -1 < z_1(a) < 0, \forall a \in J_1, & \quad e \quad z'_1(a) < 0, \forall a \in J_1; \\ z_1(b_0 - c_0) = -1 & \quad e \quad z'_1(b_0 - c_0) = -\frac{1}{2c_0 - b_0} < 0; \\ -\frac{c_0}{b_0} < z_1(a) < -1, \forall a \in J_2, & \quad e \quad z'_1(a) < 0, \forall a \in J_2. \end{aligned}$$

Como $\Phi \circ z_1$, que denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J_1)} \circ z_1|_{J_1}$, é diferenciável em J_1 , segue que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ z_1)'_x(a) &= \frac{2z'_1(a)[1 - z_1^2(a)]}{(z_1^2(a) + 1)^2} < 0, \forall a \in J_1, \\ (\Phi \circ z_1)'_y(a) &= 0, \forall a \in J_1, \\ (\Phi \circ z_1)'_w(a) &= \frac{4z_1(a)z'_1(a)}{(z_1^2(a) + 1)^2} > 0, \forall a \in J_1, \end{aligned}$$

e portanto o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $a \in J_1$.

Em $a = b_0 - c_0$ temos

$$\begin{aligned}(\Phi \circ z_1)'_x(b_0 - c_0) &= \frac{2z'_1(b_0 - c_0)[1 - z_1^2(b_0 - c_0)]}{(z_1^2(b_0 - c_0) + 1)^2} = 0, \\(\Phi \circ z_1)'_y(b_0 - c_0) &= 0, \\(\Phi \circ z_1)'_w(b_0 - c_0) &= \frac{4z_1(b_0 - c_0)z'_1(b_0 - c_0)}{(z_1^2(b_0 - c_0) + 1)^2} = \frac{1}{2c_0 - b_0} > 0,\end{aligned}$$

e portanto o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz em $a = b_0 - c_0$.

Por fim, como $\Phi \circ z_1$, que denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J_2)} \circ z_1|_{J_2}$, é diferenciável em J_2 , segue que

$$\begin{aligned}(\Phi \circ z_1)'_x(a) &= \frac{2z'_1(a)[1 - z_1^2(a)]}{(z_1^2(a) + 1)^2} > 0, \quad \forall a \in J_2, \\(\Phi \circ z_1)'_y(a) &= 0, \quad \forall a \in J_2, \\(\Phi \circ z_1)'_w(a) &= \frac{4z_1(a)z'_1(a)}{(z_1^2(a) + 1)^2} > 0, \quad \forall a \in J_2,\end{aligned}$$

e portanto o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $a \in J_2$.

Deixamos como exercício a análise para a segunda raiz.

7.4 A4

Por inspeção visual é simples identificar, para cada subcaso, os percursos (caminhos) das imagens por Φ de ambas as raízes em \mathbb{S}^2 , como função de b , a partir dos percursos (caminhos) de ambas as raízes no plano \mathbb{C} presentes em Yamaoka (2023). A justificativa formal se dá da seguinte maneira:

Considere, por exemplo, $a_0 > 0$, $c_0 > 0$ e $J = \{b \in \mathbb{R} \mid -2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}\}$.

Seja, $\forall b \in J$,

$$z_1(b) = -\frac{b}{2a_0} + i\frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0}.$$

O *pedaço do caminho* da imagem por Φ da primeira raiz restrita a J é a aplicação $(\Phi \circ z_1) : J \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\Phi \circ z_1)(b) = \left(-\frac{b}{a_0 + c_0}, \frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{a_0 + c_0}, \frac{c_0 - a_0}{a_0 + c_0} \right).$$

$\Phi \circ z_1$ denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J)} \circ z_1|_J$, onde $I(z_1|J)$ é a imagem da restrição $z_1|_J$.

Como $(\Phi \circ z_1)$ é diferenciável em J , estudaremos os sinais das 3 componentes do vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'(b)$. Temos

$$(\Phi \circ z_1)'_x(b) = -\frac{1}{a_0 + c_0} < 0, \quad \forall b \in J,$$

isto é, a componente x do vetor velocidade tem sentido contrário ao do eixo x . Agora,

$$(\Phi \circ z_1)'_y(b) = \frac{-b}{(a_0 + c_0)\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}.$$

Como o denominador é positivo, o sinal do numerador determina o sinal de $(\Phi \circ z_1)'_y(b)$, que é

$$\begin{cases} > 0, & \text{para } -2\sqrt{a_0c_0} < b < 0, \\ = 0, & \text{para } b = 0, \\ < 0, & \text{para } 0 < b < 2\sqrt{a_0c_0}. \end{cases}$$

Isto quer dizer que a componente y do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo y para $-2\sqrt{a_0c_0} < b < 0$, se anula para $b = 0$ e passa a ter sentido contrário ao do eixo y para $0 < b < 2\sqrt{a_0c_0}$. Por fim,

$$(\Phi \circ z_1)'_w(b) = 0, \forall b \in J,$$

o que significa que a componente w do vetor velocidade é nula. Portanto, o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $b \in J$.

Observe que, como $\lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}^-} (\Phi \circ z_1)'_y(b) = 0$ e $\lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}^+} (\Phi \circ z_1)'_y(b) = +\infty$, segue que não existe o vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'$ em $b = -2\sqrt{a_0c_0}$. Tampouco existe o vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'$ em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$.

Deixamos como exercício a finalização do estudo para a primeira raiz e a análise para a segunda raiz.

7.5 A.5

Por inspeção visual é simples identificar, para cada subcaso, os percursos (caminhos) das imagens por Φ de ambas as raízes em \mathbb{S}^2 , como função de c , a partir dos percursos (caminhos) de ambas as raízes no plano \mathbb{C} presentes em Yamaoka (2023). A justificativa formal se dá da seguinte maneira:

Considere, por exemplo, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ e $J = \{c \in \mathbb{R} \mid c > b_0^2/(4a_0)\}$.

Seja, $\forall c \in J$,

$$z_1(c) = -\frac{b_0}{2a_0} + i \frac{\sqrt{4a_0c - b_0^2}}{2a_0}.$$

O *pedaço do caminho* da imagem por Φ da primeira raiz restrita a J é a aplicação $(\Phi \circ z_1) : J \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\Phi \circ z_1)(c) = \left(-\frac{b_0}{c + a_0}, \frac{\sqrt{4a_0c - b_0^2}}{c + a_0}, \frac{c - a_0}{c + a_0} \right).$$

$\Phi \circ z_1$ denota a aplicação composta $\Phi|_{I(z_1|J)} \circ z_1|_J$, onde $I(z_1|J)$ é a imagem da restrição $z_1|_J$.

Como $(\Phi \circ z_1)$ é diferenciável em J , estudaremos os sinais das 3 componentes do vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'(c)$. Temos

$$(\Phi \circ z_1)'_x(c) = \frac{b_0}{(c + a_0)^2} > 0, \forall c \in J,$$

isto é, a componente x do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo x . Agora,

$$(\Phi \circ z_1)'_y(c) = \frac{-2a_0c + b_0^2 + 2a_0^2}{(c + a_0)^2 \sqrt{4a_0c - b_0^2}}.$$

Como o denominador é positivo, o sinal do numerador determina o sinal de $(\Phi \circ z_1)'_y(c)$, que é

$$\begin{cases} > 0, & \text{para } b_0^2/(4a_0) < c < b_0^2/(2a_0) + a_0, \\ = 0, & \text{para } c = b_0^2/(2a_0) + a_0, \\ < 0, & \text{para } c > b_0^2/(2a_0) + a_0. \end{cases}$$

Isto quer dizer que a componente y do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo y para $b_0^2/(4a_0) < c < b_0^2/(2a_0) + a_0$, se anula para $c = b_0^2/(2a_0) + a_0$ e passa a ter sentido contrário ao do eixo y para $c > b_0^2/(2a_0) + a_0$. Por fim,

$$(\Phi \circ z_1)'_w(c) = \frac{2a_0}{(c + a_0)^2} > 0, \forall c \in J,$$

o que significa que a componente w do vetor velocidade tem o mesmo sentido do eixo w . Portanto, o vetor velocidade corrobora o *pedaço do caminho* descrito pela imagem por Φ da primeira raiz para todo $c \in J$.

Observe que, como $\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^-} (\Phi \circ z_1)'_y(c) = 0$ e $\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^+} (\Phi \circ z_1)'_y(c) = +\infty$, segue que não existe o

vetor velocidade $(\Phi \circ z_1)'$ em $c = \frac{b_0^2}{4a_0}$.

Deixamos como exercício a finalização do estudo para a primeira raiz e a análise para a segunda raiz.

8 Conclusões

1. Exceto no subcaso $b_0 = 0$ e $c_0 = 0$, no qual os caminhos das imagens por Φ de ambas as raízes estão restritos ao pólo sul S de \mathbb{S}^2 , em cada um dos demais 20 subcasos os caminhos das imagens por Φ de ambas as raízes repousam ou sobre uma circunferência (que contém a imagem por Φ das raízes reais) ou sobre duas circunferências (uma contém a imagem por Φ das raízes reais; a outra contém a imagem por Φ das raízes complexas não reais) em \mathbb{S}^2 . Veja ao longo do texto os pontos que devem ser excluídos das circunferências.
2. Quando o coeficiente variável tende a $-\infty$ e a $+\infty$, observamos as seguintes relações das duas raízes, via Φ , com os pólos norte N e/ou sul S :

(a) Primeiro caso (Pólo sul S):

- As imagens por Φ de ambas as raízes saem de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e retornam para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). [Subcasos 3.1 a 3.6]
- A imagem por Φ de uma raiz sai de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e retorna para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S); a imagem por Φ da outra raiz está em S . [Subcasos 3.7 e 3.8]

- As imagens por Φ de ambas as raízes estão em S . [Subcaso 3.9]

(b) Segundo caso (Pólos norte N e sul S):

- A imagem por Φ da primeira raiz sai de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e segue para pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S). A imagem por Φ da segunda raiz sai de pontos arbitrariamente próximos de S (exceto S) e segue para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). [Subcasos 4.1 a 4.4]
- A imagem por Φ da primeira raiz sai de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e segue até S . A imagem por Φ da segunda raiz sai de S e segue para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). [Subcasos 4.5 e 4.6]

(c) Terceiro caso (Pólo norte N):

- As imagens por Φ de ambas as raízes saem de pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N) e retornam para pontos arbitrariamente próximos de N (exceto N). [Subcasos 5.1 a 5.6]

O Primeiro caso será representado pelas notações “ $\Phi(z_j) : S \xrightarrow{a} S$ ”, $j = 1, 2$, que significam: para cada j , o primeiro S indica que o limite da imagem por Φ da j -ésima raiz é o pólo sul quando a tende a $-\infty$ e o segundo S indica que o limite da imagem por Φ da j -ésima raiz é o pólo sul quando a tende a $+\infty$. Procedendo da mesma maneira com as demais notações para o Segundo e para o Terceiro casos, obtemos a seguinte representação esquemática:

Primeiro caso	Segundo caso	Terceiro caso
$\Phi(z_1) : S \xrightarrow{a} S$	$\Phi(z_1) : N \xrightarrow{b} S$	$\Phi(z_1) : N \xrightarrow{c} N$
$\Phi(z_2) : S \xrightarrow{a} S$	$\Phi(z_2) : S \xrightarrow{b} N$	$\Phi(z_2) : N \xrightarrow{c} N$

3. Em cada subcaso, sejam $G_1 \subset \mathbb{S}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da imagem por Φ da primeira raiz e $G_2 \subset \mathbb{S}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da imagem por Φ da segunda raiz. Em \mathbb{S}^2 , o(s) ponto(s) aderente(s) comum(ns) a G_1 e a G_2 é (são) :

(a) Primeiro caso:

- $b_0 > 0, c_0 > 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $b_0 < 0, c_0 > 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $b_0 > 0, c_0 < 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $b_0 < 0, c_0 < 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $b_0 = 0, c_0 > 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e $N [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 = 0, c_0 < 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e $N [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 > 0, c_0 = 0$: $S [\in G_1, \notin G_2]$;
- $b_0 < 0, c_0 = 0$: $S [\notin G_1, \in G_2]$;
- $b_0 = 0, c_0 = 0$: S [imagem por Φ da raiz dupla].

(b) Segundo caso (i.r.d.: imagem por Φ da raiz dupla):

- $a_0 > 0, c_0 > 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$, $N [\notin G_1, \notin G_2]$, A [i.r.d.] , B [i.r.d.];
- $a_0 < 0, c_0 < 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$, $N [\notin G_1, \notin G_2]$, A [i.r.d.] , B [i.r.d.];



- $a_0 > 0, c_0 < 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e $N [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $a_0 < 0, c_0 > 0$: $S [\notin G_1, \notin G_2]$ e $N [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $a_0 > 0, c_0 = 0$: S [i.r.d.] e $N [\notin G_1, \notin G_2]$;
- $a_0 < 0, c_0 = 0$: S [i.r.d.] e $N [\notin G_1, \notin G_2]$.

(c) Terceiro caso:

- $a_0 > 0, b_0 > 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $a_0 > 0, b_0 < 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 < 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 > 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e A [imagem por Φ da raiz dupla];
- $a_0 > 0, b_0 = 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e S [imagem por Φ da raiz dupla];
- $a_0 < 0, b_0 = 0$: $N [\notin G_1, \notin G_2]$ e S [imagem por Φ da raiz dupla].

Conforme visto acima no primeiro, no segundo e no terceiro casos, para cada subcaso existe pelo menos um ponto $P \in \mathbb{S}^2$ que é aderente a G_1 e a G_2 , ou seja, $P \in \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$, onde $\overline{G_j}$ denota o conjunto dos pontos aderentes a G_j , $j = 1, 2$, o que implica que a distância entre G_1 e G_2 é $d(G_1, G_2) = d(\overline{G_1}, \overline{G_2}) = 0$.

9 Bibliografia

AHLFORS, L.V. **Complex analysis**: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. v. 2.

PENROSE, R. **The road to reality**: a complete guide to the laws of the universe. New York: Vintage Books, 2007.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. (Coleção Matemática Universitária).

YAMAOKA, L. C. Os caminhos das raízes da função quadrática. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 23, n. 2, p. 36-61, dez. 2023. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/402>. Acesso em: 02 jan. 2024.