Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Iniciação Científica

Reginaldo Leoncio Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (Uesb), Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Itapetinga, reggekant@yahoo.com.br

Roger Luiz da Silva Almeida
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (Uesb), Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Itapetinga

O sistema fundamental generalizado de Jacobsthal: propriedades e identidades

The Jacbosthal generalized fundamental system: properties and identities

Resumo

Neste trabalho estudamos o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal, destacando suas principais propriedades e algumas identidades. São usadas as propriedades matriciais da matriz casoratiana para obtenção das identidades deste sistema. Também apresentamos expressões combinatórias para as propriedades e para as identidades. A metodologia que adotamos foi a revisão bibliográfica, onde procuramos responder a seguinte pergunta: Quais são as principais propriedades e identidades do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal? Começamos falando sobre a família de números de Jacobsthal generalizados, destacando seu papel fundamental e em seguida, apresentamos propriedades e identidades através do estudo da respectiva matriz de Casoratian deste sistema. Ainda, destacamos a fórmula combinatória para os números generalizados. Esperamos que este trabalho contribua para uma divulgação deste conteúdo e a elaboração de outras pesquisas futuras.
Palavras-chave: Sistema fundamental. Números generalizados. Propriedades. Identidades combinatórias.

Abstract

In this work we study the Jacobsthal generalized fundamental system, highlighting its main properties and some identities. The properties of Casoratian matrix are used to obtain the identities of this system. We also present combinatorial expressions for the properties and identities. The methodology adopted was the bibliographical rewiew, where we sought to answer the following question: What are the main properties and identities of the Jacobsthal generalized fundamental system? We start by talking about the family of generalized Jacobsthal numbers, highlighting its fundamental role and we present properties and identities through the study of the respective Casoratian matrix of this system. Furthermore, we highlight the combinatorial formula for the generalized numbers. We hope that this work contributes to the dissemination of this content and the development of other future research.
Keywords: Fundamental system. Generalized numbers. Properties. Combinatorial identities.

Artigo recebido em mar. 2024 e aceito em ago. 2024

1 Introdução

Dentre os assuntos da Matemática, um que é de extrema relevância e aplicabilidade, é com certeza, as sequências numéricas infinitas. Este assunto é amplamente estudado e existem uma gama de muitos trabalhos interessantes publicados. Uma sequência muito conhecida e famosa é a chamada sequência de Jacobsthal, atribuída ao matemático Ernest Erich Jacobsthal, que segundo [1] nasceu em 1882 e morreu em 1965. Para mais detalhes sobre essa sequência, sugerimos a leitura dos trabalhos de [2], [3] e [4].

A sequência clássica de Jacobsthal $\{J_n\}_{n\geq 0}$ é uma relação recursiva dada por $J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, onde as condições iniciais são $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$. Esta sequência e suas generalizações são amplamente estudadas do ponto de vista algébrico, analítico, combinatório e matricial, e é um assunto interessante com várias propriedades e identidades importantes (ver, por exemplo, [2], [3] e [4]).

Neste trabalho, estamos preocupados com a generalização definida pela seguinte equação de diferença linear de ordem r,

$$J_{n+1} = \sum_{i=0}^{r-2} J_{n-i} + 2J_{n-r+1} \qquad \text{para} \qquad n \geq r, \tag{1}$$

$$J_n = \alpha_n \qquad \text{para} \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1. \tag{2}$$

Entre as soluções da Equação (1), temos a família de números de Jacobsthal generalizados

$$\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}, \tag{3}$$

onde $J_n^{(s)} = \sum_{i=0}^{r-2} J_{n-i-1}^{(s)} + 2J_{n-r}^{(s)}, \forall n \geq r$, com condições iniciais $J_n^{(s)}$, para $n = 0, 1, 2, \cdots, r-1$ dadas por $J_{s-1}^{(s)} = 1$ e $J_n^{(s)} = 0$ para $0 \leq n \neq s-1 \leq r-1$.

No nosso estudo, nos concentramos em descrever explicitamente a conexão fechada entre as sequências $\{J_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ e $\{J_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ e entre $\{J_n^{(j)}\}_{n\geq 0}$ e $\{J_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$, com $2 \leq j \leq r-1$, do conjunto $\mathbb{J}_r$. Como consequência, fazendo-se o uso de propriedades da matriz casoratiana, muitas identidades são derivadas e relevantes expressões combinatórias são consideradas. Para este propósito, o conteúdo deste trabalho está organizado do seguinte modo. Na seção 2 estabelecemos que o conjunto $\mathbb{J}_r$ é um sistema fundamental de soluções da Equação (1) e definimos o sistema fundamental de Jacobsthal. Além disso, descrevemos as principais propriedades deste sistema. Na seção 3, apresentamos a matriz de Casoratian do sistema fundamental generalizado de Jacbosthal e suas principais propriedades. Também obtemos identidades interessantes com as propriedades matriciais. Por fim, na seção 4 apresentamos interessantes expressões combinatórias para o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal.

2 O sistema fundamental generalizado de Jacobsthal

Nesta seção abordamos sobre a família de números de Jacobsthal generalizados, destacando sua relevância e também definimos o sistema fundamental de Jacobsthal. Além disso são apresentadas interessanes propriedades deste sistema. Os resultados exibidos foram baseados nos trabalhos de [5], [11] e [14].

Definição 1 *A família de números de Jacobsthal generalizados é definida por:*

$$\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}, \tag{4}$$

onde $J_n^{(s)} = \sum_{i=0}^{r-2} J_{n-i-1}^{(s)} + 2J_{n-r}^{(s)}, \forall n \geq r$, *com condições iniciais* $J_n^{(s)}$, *para* $n = 0, 1, 2, \cdots, r-1$ *dadas por* $J_{s-1}^{(s)} = 1$ *e* $J_n^{(s)} = 0$ *para* $0 \leq n \neq s-1 \leq r-1$.

Exemplo 2 *A título de ilustração, tomando* $r = 3$ *em* (4), *obtemos a família de números de Jacobsthal generalizados* $\mathbb{J}_3 = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq 3\}$, *ou ainda:*

$$\begin{cases} J_n^{(1)} = J_{n-1}^{(1)} + J_{n-2}^{(1)} + 2J_{n-3}^{(1)}, n \geq 3, J_0^{(1)} = 1, J_1^{(1)} = 0, J_2^{(1)} = 0 \\ J_n^{(2)} = J_{n-1}^{(2)} + J_{n-2}^{(2)} + 2J_{n-3}^{(2)}, n \geq 3, J_0^{(2)} = 0, J_1^{(2)} = 1, J_2^{(2)} = 0 \\ J_n^{(3)} = J_{n-1}^{(3)} + J_{n-2}^{(3)} + 2J_{n-3}^{(3)}, n \geq 3, J_0^{(3)} = 0, J_1^{(3)} = 0, J_2^{(3)} = 1. \end{cases}$$

É possível provar que dentre as soluções da Equação (1), tem-se a família de números de Jacobsthal generalizados $\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}$, onde:

$$J_n^{(s)} = \sum_{i=0}^{r-2} J_{n-i-1}^{(s)} + 2J_{n-r}^{(s)}, \forall n \geq r,$$

com condições iniciais $J_n^{(s)}$, para $n = 0, 1, 2, \cdots, r-1$ dadas por $J_{s-1}^{(s)} = 1$ e $J_n^{(s)} = 0$ para $0 \leq n \neq s-1 \leq r-1$.

Em outros termos, o conjunto $\mathbb{J}_r$ é linearmente independente e um conjunto gerador para o espaço vetorial real, $\epsilon_k^{(r)}$, de soluções da Equação (1). Dessa forma, temos o resultado relevante dado na poposição a seguir.

Proposição 3 *Seja* $\mathbb{J}_r$ *a família de números de Jacobsthal generalizados. Então,* $\mathbb{J}_r$ *é uma base para o espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$, $\epsilon_k^{(r)}$, *de soluções da Equação* (1).

Diante do resultado da Proposição 3, temos a seguinte definição.

Definição 4 *O sistema fundamental de Jacobsthal é dado pelas* r *cópias da Equação* (1) *representadas na forma compacta abaixo:*

$$\begin{cases} J_{n+1}^{(s)} = J_n^{(s)} + J_{n-1}^{(s)} + \cdots + 2J_{n-r+1}^{(s)}, n \geq r-1, \\ J_n^{(s)} = \delta_{s-1,n}, 0 \leq n \leq r-1, \end{cases} \tag{5}$$

onde $1 \leq s \leq r$ *e* $\delta_{i,j}$ *é o simbolo de Kronecher, que é definido da seguinte forma:*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & se \;\; i = j, \\ 0, & se \;\; i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Exemplo 5 *A titulo de ilustração, tomando* $r = 3$ *na Expressão* (5), *temos o seguinte sistema fundamental de Jacobsthal:*

$$\begin{cases} J_{n+1}^{(s)} = J_n^{(s)} + J_{n-1}^{(s)} + 2J_{n-2}^{(s)}, n \geq 2, \\ J_n^{(s)} = \delta_{s-1,n}, 0 \leq n \leq 2, 1 \leq s \leq 3. \end{cases}$$

2.1 Propriedades do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal

Nesta subseção descrevemos algumas propriedades interessantes do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Mais especificamente, buscamos evidenciar a conexão entre $\{J_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ e $\{J_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ e entre $\{J_n^{(j)}\}_{n\geq 0}$ e $\{J_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ para $2 \leq j \leq r-1$. Começamos com o lema abaixo que é bastante útil nas demonstrações.

Lema 6 *(Veja [5]) Seja $\epsilon_k^{(r)}$ o espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) de soluções da Equação* (1)*. Considere duas sequências $\{J_n^{[C_1]}\}_{n\geq 0}$ e $\{J_n^{[C_2]}\}_{n\geq 0}$ de $\epsilon_k^{(r)}$, cujas condições iniciais são, respectivamente, $C_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1})$ e $C_2 = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{r-1})$. Suponha que existem $n_0, m_0, N \in \mathbb{N}$ tais que $J_{j+n_0}^{[C_1]} = J_{j+m_0}^{[C_2]}$, para $N \leq j \leq N+r-1$, então nós temos que $J_{n+n_0}^{[C_1]} = J_{n+m_0}^{[C_2]}$, para cada $n \geq N$.*

Demonstração:

Com efeito, por hipótese existem $n_0, m_0, N \in \mathbb{N}$ tais que $J_{j+n_0}^{[C_1]} = J_{j+m_0}^{[C_2]}$, para $N \leq j \leq N+r-1$. Logo:

$$J_{N+n_0}^{[C_1]} = J_{N+m_0}^{[C_2]}.$$

$$\vdots$$

$$J_{N+r-1+n_0}^{[C_1]} = J_{N+r-1+m_0}^{[C_2]}.$$

Portanto, o Lema é válido para $N, \cdots, N+r-1$.

Supondo $n = N + r$, temos pela Equação (5) que:

$$\begin{aligned} J_{N+r+n_0}^{[C_1]} &= J_{N+r-1+n_0}^{[C_1]} + J_{N+r-2+n_0}^{[C_1]} + \cdots + 2J_{N+n_0}^{[C_1]} \\ &= J_{N+r-1+m_0}^{[C_2]} + J_{N+r-2+m_0}^{[C_2]} + \cdots + 2J_{N+m_0}^{[C_2]} \\ &= J_{N+r+m_0}^{[C_2]}. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $J_{N+r+n_0}^{[C_1]} = J_{N+r+m_0}^{[C_2]}$. Dessa forma, obtemos que $J_{n+n_0}^{[C_1]} = J_{n+m_0}^{[C_2]}$, para cada $n \geq N$.

Exemplo 7 *Dado $r = 4$, temos o seguinte sistema fundamental generalizado de Jacobsthal:*

$$\begin{cases} J_{n+1}^{(s)} = J_n^{(s)} + J_{n-1}^{(s)} + J_{n-2}^{(s)} + 2J_{n-3}^{(s)}, n \geq 3, \\ J_n^{(s)} = \delta_{s-1,j}, 0 \leq n \leq 3, 1 \leq s \leq 4. \end{cases}$$

Fazendo os cálculos, obtemos para $0 \leq n \leq 11$, a seguinte tabela de valores:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$J_n^{(1)}$	1	0	0	0	2	2	4	8	18	34	68	126
$J_n^{(2)}$	0	1	0	0	1	3	4	8	17	35	68	136
$J_n^{(3)}$	0	0	1	0	1	2	5	8	17	34	69	136
$J_n^{(4)}$	0	0	0	1	1	2	4	9	17	34	68	137

Tabela 1: Tabela do sistema fundamental de Jacobsthal de ordem $r = 4$.

Na Tabela 1, podemos notar que existe uma relação entre as sequências $\{J_{n+1}^{(1)}\}$ e $\{J_n^{(r)}\}$, que é dada pela seguinte proposição:

Proposição 8 *Seja $\mathbb{J}_r$ o sistema fundamental de Jacobsthal. Então para cada $n \geq 1$, tem-se que:*

$$J_n^{(1)} = 2J_{n-1}^{(r)}. \tag{7}$$

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração usando indução matemática sobre n. Inicialmente, mostraremos a veracidade para $1 \leq n \leq r$. Com efeito, temos que $J_1^{(1)} = \cdots = J_{r-1}^{(1)} = 0$ e $J_r^{(1)} = 2$. Por outro lado, nós temos que $2J_0^{(r)} = 2J_1^{(r)} = \cdots = 2J_{r-2}^{(r)} = 0$ e $2J_{r-1}^{(r)} = 2$. Dessa forma, temos que $J_j^{(1)} = 2J_{j-1}^{(r)}$, para $j = 1, \cdots, r$.

Agora, vamos supor que $J_n^{(1)} = 2J_{n-1}^{(r)}$, para algum $n > r$, mostraremos que $J_{n+1}^{(1)} = 2J_n^{(r)}$. De fato, temos pela definição do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal que:

$$J_{n+1}^{(1)} = J_n^{(1)} + J_{n-1}^{(1)} + \cdots + 2J_{n-r+1}^{(1)}, n \geq r-1.$$

Dado por hipótese de indução que $J_n^{(1)} = 2J_{n-1}^{(r)}$, obtemos que:

$$J_{n+1}^{(1)} = 2J_{n-1}^{(r)} + 2J_{n-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-r}^{(r)} = 2J_n^{(r)}.$$

Portanto, segue-se que:

$$J_n^{(1)} = 2J_{n-1}^{(r)},$$

para todo $n \geq 1$.

Na Tabela 1, também podemos notar que

$$J_n^{(2)} = J_{n-1}^{(4)} + 2J_{n-2}^{(4)} \text{ e } J_n^{(3)} = J_{n-1}^{(4)} + J_{n-2}^{(4)} + 2J_{n-3}^{(4)}.$$

De modo geral, temos o resultado dado pela seguinte proposição.

Proposição 9 *Seja $\mathbb{J}_r$ o sistema fundamental de Jacobsthal. Então para $n \geq j$ tem-se que:*

$$J_n^{(j)} = J_{n-1}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-j}^{(r)}. \tag{8}$$

Demonstração:

Vamos fazer a demonstração usando indução. Inicialmente, mostraremos a veracidade para $j = 2$. Para isso, consideremos a sequência $\{q_n^{(2)}\}_{n\geq 2}$ dada por $q_n^{(2)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-2}^{(r)}$. É evidente que a sequência $\{q_n^{(2)}\}_{n\geq 2}$ satisfaz a Equação (1), com as seguintes condições iniciais $q_2^{(2)} = J_1^{(r)} + J_0^{(r)} = 0 + 0 = 0$, $q_s^{(2)} = J_{s-1}^{(r)} + J_{s-2}^{(r)} = 0 + 0 = 0$, para $2 \leq s \leq r-1$ e $q_r^{(2)} = J_{r-1}^{(r)} + J_{r-2}^{(r)} = 1 + 0 = 1$. Por outro lado, para $\{J_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ nós temos por (5) que $J_2^{(2)} = \delta_{2-1,2} = \delta_{1,2} = 0$, $J_s^{(2)} = \delta_{1,s} = 0$, para $2 \leq s \leq r-1$ e $J_r^{(2)} = J_{r-1}^{(2)} + J_{r-2}^{(2)} + \cdots + J_1^{(2)} + 2J_0^{(2)} = 0 + 0 + \cdots + 1 + 2.0 = 1$. Então nós temos que $J_2^{(2)} = q_2^{(2)} = 0$, $J_s^{(2)} = q_s^{(2)} = 0$, para $2 \leq s \leq r-1$ e $J_r^{(2)} = q_r^{(2)} = 1$. Logo, pelo Lema 6 temos que:

$$J_n^{(2)} = q_n^{(2)},$$

para $n \geq 2$. Isto é:

$$J_n^{(2)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-2}^{(r)}.$$

Para $3 \leq j \leq r-1$, vamos supor que $J_n^{(j)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-j}^{(r)}$, para cada $n \geq j$. Consideremos agora a sequência $\{q_n^{(j+1)}\}_{n\geq 2}$ definida por:

$$q_n^{(j+1)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-1}^{(j)}, \tag{9}$$

para cada $n \geq j$. Uma vez que $J_{n-1}^{(j)}$ é definida para $n-1 \geq j-1$, pois $n \geq j$, temos para $J_{n-1}^{(j)}$ que os primeiros r termos são $J_{n-1}^{(j)} = 0$, para $2 \leq n \neq j \leq r-1$, $J_{j-1}^{(j)} = 1$ e $J_r^{(j)} = J_{r-1}^{(r)} + J_{r-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{r-j}^{(r)} = 1 + 0 + \cdots + 2.0 = 1$. Dado que $J_{r-1}^{(r)} = 1$ e $J_r^{(n)} = 0$, para $n = 1, \cdots, r-1$, temos pela Equação (9), $(1 \leq n \leq r)$, que $q_n^{(j+1)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-1}^{(j)} = 0 + 0 = 0$, para $2 \leq n \neq j \leq r-1$, $q_j^{(j+1)} = J_{j-1}^{(r)} + J_{j-1}^{(j)} = 0 + 1 = 1$ e $q_r^{(j+1)} = J_{r-1}^{(r)} + J_{r-2}^{(r)} = 1 + 0 = 1$. Por outro lado, dada a sequência $\{J_n^{(j+1)}\}_{n\geq 0}$, temos por (5) que $J_n^{(j+1)} = \delta_{j,n} = 0$, para $2 \leq n \neq j \leq r-1$, $J_j^{(j+1)} = \delta_{j,j} = 1$ e $J_r^{(j+1)} = J_{r-1}^{(j+1)} + J_{r-2}^{(j+1)} + \cdots + J_{j-1}^{(j+1)} + J_j^{(j+1)} + \cdots + 2.J_0^{(j+1)} = 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 + 0 + \cdots + 2.0 = 1$. Dessa forma, obtemos que $\{q_n^{(j+1)}\} = \{J_n^{(j+1)}\} = \{0\}$, para $2 \leq n \neq j \leq r-1$, $\{q_j^{(j+1)}\} = \{J_j^{(j+1)}\} = \{1\}$ e $\{q_r^{(j+1)}\} = \{J_r^{(j+1)}\} = \{1\}$. Uma vez que a sequência $\{q_n^{(j+1)}\}_{n\geq 2}$ satisfaz a Equação (1), o Lema 6 assegura que:

$$J_n^{(j+1)} = q_n^{(j+1)}.$$

Mas, por (9), tem-se que:

$$q_n^{(j+1)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-1}^{(j)}.$$

Dessa forma, obtemos que:

$$\begin{aligned} J_n^{(j+1)} &= q_n^{(j+1)} \\ &= J_{n-1}^{(r)} + J_{n-1}^{(j)} \\ &= J_{n-1}^{(r)} + J_{n-2}^{(r)} + J_{n-3}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-(j+1)}^{(r)}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que:

$$J_n^{(j)} = J_{n-1}^{(r)} + J_{n-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-j}^{(r)},$$

para $n \geq j$.

Combinando as Proposições 3, 8 e 9 temos o seguinte resultado.

Proposição 10 *Seja* $\{w_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência generalizada de Jacobsthal do tipo* (1)*, com condições iniciais* $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}$*. Então para todo* $n \geq 0$*, temos que:*

$$w_n = \alpha_0 a_{r-1} J_n^{(r)} + \alpha_1 \sum_{i=0}^{1} a_{r-2+i} J_{n-(i+1)}^{(r)} + \cdots +$$
$$\alpha_{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} a_{r-j+i} J_{n-(i+1)}^{(r)} + \cdots + 2J_n^{(r)}.$$

3 A matriz Casoratiana do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal

Nesta seção apresentamos alguns resultados clássicos de Álgebra Linear referentes a matriz Casoratiana. Os resultados apresentados foram extraídos dos trabalhos de [6], [7], [8] e [9].

Definição 11 *A matriz casoratiana do sistema fundamental generalizado de Jacosthlal $\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}$ é dada pela seguinte matriz:*

$$\hat{C}_J(n) = \begin{bmatrix} J_n^{(1)} & \dots & J_n^{(j)} & \dots & J_n^{(r)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ J_{n+r-1}^{(1)} & \dots & J_{n+r-1}^{(j)} & \dots & J_{n+r-1}^{(r)} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Exemplo 12 *Tomando $r = 3$, temos a seguinte matriz casoratiana:*

$$\hat{C}_J(n) = \begin{bmatrix} J_n^{(1)} & J_n^{(2)} & J_n^{(3)} \\ J_{n+1}^{(1)} & J_{n+1}^{(2)} & J_{n+1}^{(3)} \\ J_{n+2}^{(1)} & J_{n+2}^{(2)} & J_{n+2}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Um resultado interessante da matriz casoratiana é dado na proposição a seguir.

Proposição 13 *Seja $\hat{C}_J(n)$ a matriz casoratiana do sistema fundamental generalizado de Jacosthal. Então, tem-se que $\hat{C}_J(n) = J_J \times (\mathbb{M}_\mathbb{J})_n \times J_J$ onde:*

$$(\mathbb{M}_\mathbb{J})_n = \begin{bmatrix} J_{n+r-1}^{(r)} & \dots & J_{n+r-1}^{(j)} & \dots & J_{n+r-1}^{(1)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ J_n^{(r)} & \dots & J_n^{(j)} & \dots & J_n^{(1)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

e J_J é a matriz anti-diagonal dada por $J_J = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$, onde $b_{i,j} = 1$ para $i + j = r + 1$ e $b_{i,j} = 0$ para caso contrário.

Lema 14 *(Veja [6] e [7]) Para cada $n \geq 0$, temos que $(\mathbb{A}_\mathbb{J})^n = (\mathbb{M}_\mathbb{J})_n$, onde $\mathbb{A}_\mathbb{J}$ é a matriz companheira clássica associada ao sistema fundamental generalizado de Jacobsthal dada por:*

$$\mathbb{A}_\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Demonstração:

Faremos a demonstração usando indução sobre n. Para $n = 0$, temos que $(\mathbb{A}_\mathbb{J})^0 = \mathbb{I}_r$, onde $\mathbb{I}_r$ é matriz identidade de ordem r. Por outro lado, temos que:

$$(\mathbb{M}_\mathbb{J})_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{r-1}^{(r)} & \mathrm{J}_{r-1}^{(r-1)} & \dots & \mathrm{J}_{r-1}^{(j)} & \dots & \mathrm{J}_{r-1}^{(1)} \\ \mathrm{J}_{r-2}^{(r)} & \mathrm{J}_{r-2}^{(r-1)} & \dots & \mathrm{J}_{r-2}^{(j)} & \dots & \mathrm{J}_{r-2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathrm{J}_0^{(r)} & \mathrm{J}_0^{(r-1)} & \dots & \mathrm{J}_0^{(j)} & \dots & \mathrm{J}_0^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Levando em consideração que $J_n^{(s)} = \delta_{s-1,n}, 0 \leq n \leq r-1$, segue-se que:

$$J_{r-1}^{(r)} = 1 \text{ e } J_{r-2}^{(r)} = \cdots = J_0^{(r)} = 0,$$

$$J_{r-1}^{(r-1)} = 0, J_{r-2}^{(r-1)} = 1 \text{ e } J_{r-3}^{(r)} = \cdots = J_0^{(r-1)} = 0,$$

$$\vdots$$

$$J_{r-i}^{(j)} = 0, 1 \leq i \leq r, \text{ para } j \neq r-i+1 \text{ e } J_{r-i}^{(j)} = 1, 1 \leq i \leq r, \text{ para } j = r-i+1,$$

$$\vdots$$

$$J_{r-1}^{(1)} = J_{r-2}^{(1)} = \cdots = J_1^{(1)} = 0 \text{ e } J_0^{(1)} = 1.$$

Dessa forma, temos que:

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_r = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^0.$$

Portanto, o caso base é verdade.

Suponhamos agora a veracidade da proposição para algum $n > 0$, ou seja, que $(\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n, n > 0$. Provaremos que $(\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_{(n+1)} = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+1)}$. Temos então que:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+1)} &= (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}} = (\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r-1)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(j)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(1)} \\ \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r-1)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(j)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathrm{J}_{n}^{(r)} & \mathrm{J}_{n}^{(r-1)} & \ldots & \mathrm{J}_{n}^{(j)} & \ldots & \mathrm{J}_{n}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(r-2)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(j-1)} & \ldots & 2\mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} \\ \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r-2)} & \ldots & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(j-1)} & \ldots & 2\mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(r-2)} & \ldots & \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(j-1)} & \ldots & 2\mathrm{J}_{n}^{(r)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, levando em consideração as Proposições 8, 9 e a Equação (5), obtemos que:

$$J_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(r-1)} = J_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-r+1}^{(r)} = J_{n+r}^{(r)},$$

$$\vdots$$

$$J_{n}^{(r)} + J_{n}^{(r-1)} = J_{n}^{(r)} + J_{n-1}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-r+1}^{(r)} = J_{n+1}^{(r)},$$

$$J_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(j-1)} = J_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r)} + \cdots + 2J_{n+r-j}^{(r)} = J_{n+r}^{(j)},$$

$$\vdots$$

$$J_n^{(r)} + J_n^{(j-1)} = J_n^{(r)} + J_{n-1}^{(r)} + \cdots + 2J_{n-j+1}^{(r)} = J_{n+1}^{(j)},$$
$$2J_{n+r-1}^{(r)} = J_{n+r}^{(1)},$$
$$\vdots$$
$$2J_n^{(r)} = J_{n+1}^{(1)}.$$

Por conseguinte, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+1)} &= (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \\
&= (\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(r-2)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} + J_{n+r-1}^{(j-1)} & \cdots & 2\mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} \\ \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(r-2)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} + J_{n+r-2}^{(j-1)} & \cdots & 2\mathrm{J}_{n+r-2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(r-1)} & \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(r-2)} & \cdots & \mathrm{J}_{n}^{(r)} + J_{n}^{(j-1)} & \cdots & 2\mathrm{J}_{n}^{(r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{n+r}^{(r)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+r}^{(j)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+r}^{(1)} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{J}_{n+1}^{(r)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+1}^{(j)} & \cdots & \mathrm{J}_{n+1}^{(1)} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n$, $\forall n \geq 0$.

Proposição 15 *Seja $\hat{C}_J(n)$ a matriz casoratiana do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então $\hat{C}_J(n) = J_J \times (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n \times J_J = (C_{i,j}^{(n)})_{1\leq i,j\leq r}$, onde $c_{i,j} = J_{n+i-1}^{(j)}$, $(1 \leq i, j \leq r)$ e $J_J = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ é a matriz unitária anti-diagonal cujas entradas são dadas por $b_{i,j} = 1$ para $i + j = r + 1$ e $b_{i,j} = 0$ caso contrário.*

Demonstração:

Com efeito, vimos que $\hat{C}_J(n) = J_J \times (\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n \times J_J$. Dado pelo Lema 14 que $(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n = (\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n$, temos então que:

$$\hat{C}_J(n) = J_J \times (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n \times J_J.$$

Definição 16 *O casoratiano $C_J(n)$ do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal $\mathbb{J}_r$ é definido por:*

$$C_J(n) = det\left(\hat{C}_J(n)\right). \tag{13}$$

Teorema 17 *Seja $\mathbb{J}_r$ o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então temos que:*

$$C_J(n) = det(\hat{C}_J(n)) = det\left((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n\right) = (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^n = 2^{n-1}(-1)^{n(r-1)}. \tag{14}$$

Demonstração:

Iremos fazer a demonstração usando indução finita sobre n. Para $n = 1$, temos que $C_J(1) = det(\hat{C}_J(1)) = det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^1) = (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^1 = 2^1.(-1)^{1(r-1)} = 2.(-1)^{(r-1)}$, o que é verdade, pois usando o Teorema de Laplace na última coluna da matriz $\mathbb{A}_{\mathbb{J}}$, temos que:

$$det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{ij}(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{ij}, \tag{15}$$

onde $(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{ij} = (-1)^{i+j} det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{ij})$ são os cofatores de a_{ij}.

Logo:

$$\begin{aligned}
det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}) &= \sum_{i=1}^{r-1} a_{ij}(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{ij} \\
&= 2.(-1)^{0+r-1}.det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{r-1}) + 0.(-1)^{1+r-1} det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{1.(r-1)}) + \\
&\cdots + 0.(-1)^{(r-1)+(r-1)}.det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})_{(r-1)(r-1)}) \\
&= 2.(-1)^{r-1}. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2.(-1)^{r-1}.
\end{aligned}$$

Supondo agora para algum $n > 1$ que $C_J(n) = det(\hat{C}_J(n)) = det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n) = (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^n = 2^n.(-1)^{n(r-1)}$, mostraremos que:

$$C_J(n+1) = det(\hat{C}_J(n+1)) = det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+1)}) = (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^{(n+1)} = 2^{n+1}.(-1)^{(n+1)(r-1)}.$$

De fato, temos que:

$$\begin{aligned}
C_J(n+1) &= det(\hat{C}_J(n+1)) \\
&= det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+1)}) \\
&= (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^{(n+1)} \\
&= (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^n (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})) \\
&= 2^n.(-1)^{n(r-1)}.2.(-1)^{(r-1)} \\
&= 2^{n+1}(-1)^{(n+1)(r-1)}.
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução finita, segue-se que:

$$C_J(n) = det(\hat{C}_J(n)) = det((\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n) = (det(\mathbb{A}_{\mathbb{J}}))^n = 2^n.(-1)^{n(r-1)}.$$

Corolário 18 *Seja $\hat{C}_J(n)$ a matriz casoratiana do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então, para cada n e m inteiros positivos, temos que:*

$$\hat{C}_J(n+m) = \hat{C}_J(n)\hat{C}_J(m). \tag{16}$$

Demonstração:

De fato, temos pela Proposição 15 que $\hat{C}_J(n+m) = J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+m)} J_J = J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m J_J$. Como J_J é uma matriz anti-diagonal, segue-se que $J_J.J_J = diag(1, \cdots, 1)$. Assim, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_J(n+m) &= J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(n+m)} J_J \\
&= J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m J \\
&= J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n J_J.J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m J_J \\
&= (J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n J_J).(J_J(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m J_J) \\
&= \hat{C}_J(n).\hat{C}_J(m).
\end{aligned}$$

3.1 Algumas identidades do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal

Nesta subseção são usadas propriedades das entradas da matriz comphaneira associada ao sistema fundamental generalizado de Jacobsthal para obtenção de algumas identidades interessantes.

Proposição 19 *Seja $\mathbb{A}_{\mathbb{J}}$ a matriz companheira associada ao sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então, as entradas da matriz de potências $(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n$ são dadas pela seguinte fórmula compacta:*

$$a_{i,j}^{(n)} = J_{n+r-i}^{(r-j+1)}. \tag{17}$$

Demonstração:
De fato, temos pela Expressão (11) que:

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{J}})_n = \begin{bmatrix} \mathrm{J}_{n+r-1}^{(r)} & \dots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(j)} & \dots & \mathrm{J}_{n+r-1}^{(1)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathrm{J}_{n}^{(r)} & \dots & \mathrm{J}_{n}^{(j)} & \dots & \mathrm{J}_{n}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, pelo Lema 14 tem-se que $(\mathbb{M}_{\mathbb{F}})_n = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n$.
Dessa forma, obtemos que:

$$a_{i,j}^{(n)} = J_{n+r-i}^{(r-j+1)}, 1 \leq i, j \leq r.$$

Exemplo 20 *Tomando $n = 1$ e $r = 2$ em (17), temos que:*

$$a_{i,j}^{(1)} = J_{1+2-i}^{(2-j+1)} = J_{3-i}^{(3-j)}.$$

Calculando essas entradas, temos que:

$$a_{1,1}^{(1)} = J_{3-1}^{(3-1)} = J_{2}^{(2)},$$

$$a_{1,2}^{(2)} = J_{3-1}^{(3-2)} = J_{2}^{(1)},$$

$$a_{2,1}^{(2)} = J_{3-2}^{(3-1)} = J_{1}^{(2)},$$

$$a_{2,2}^{(2)} = J_{3-2}^{(3-2)} = J_{1}^{(1)}.$$

Assim, temos a seguinte matriz:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{J}} = \begin{bmatrix} J_2^{(2)} & J_2^{(1)} \\ J_1^{(2)} & J_1^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Como $(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}}$, segue-se então que:

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^2 &= \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \times \mathbb{A}_{\mathbb{J}} \\ &= \begin{bmatrix} J_2^{(2)} & J_2^{(1)} \\ J_1^{(2)} & J_1^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_2^{(2)} & J_2^{(1)} \\ J_1^{(2)} & J_1^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_2^{(2)}.J_2^{(2)} + J_2^{(1)}J_1^{(2)} & J_2^{(2)}.J_2^{(1)} + J_2^{(1)}J_1^{(1)} \\ J_1^{(2)}.J_2^{(2)} + J_1^{(1)}J_1^{(2)} & J_1^{(2)}.J_2^{(1)} + J_1^{(1)}J_1^{(1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, derivamos que:

$$a^2_{1.1} = J^{(2)}_2.J^{(2)}_2 + J^{(1)}_2.J^{(2)}_1.$$

Tomando $n = 2$ e $r = 2$, obtemos que:

$$a^{(2)}_{i,j} = J^{(2-j+1)}_{2+2-i} = J^{(3-j)}_{4-i}.$$

Calculando essas entradas, temos que:

$$a^{(2)}_{1,1} = J^{(3-1)}_{4-1} = J^{(2)}_3,$$

$$a^{(2)}_{1,2} = J^{(3-2)}_{4-1} = J^{(1)}_3,$$

$$a^{(2)}_{2,1} = J^{(3-1)}_{4-2} = J^{(2)}_2,$$

$$a^{(2)}_{2,2} = J^{(3-2)}_{4-2} = J^{(1)}_2.$$

Assim, temos a seguinte matriz:

$$(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^2 = \begin{bmatrix} J^{(2)}_3 & J^{(1)}_3 \\ J^{(2)}_2 & J^{(1)}_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo desenvolvimento acima, temos que:

$$J^{(2)}_3 = J^{(2)}_2.J^{(2)}_2 + J^{(1)}_2.J^{(2)}_1.$$

De forma geral, dado que

$$(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^{(m+n)} = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m.(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n = (\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^n.(\mathbb{A}_{\mathbb{J}})^m = (a^{(m+n)}_{ij})_{1\leq i,j\leq r},$$

segue-se que:

$$a^{(m+n)}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a^{(m)}_{ik} a^{(n)}_{kj} = \sum_{k=1}^{r} a^{(n)}_{ik} a^{(m)}_{kj}.$$

Mas por definição, $a^{(n)}_{ij} = J^{(r-j+1)}_{n+r-i}$. Logo:

$$a^{(n)}_{ik} = J^{(r-k+1)}_{n+r-i},$$

$$a^{(m)}_{kj} = J^{(r-j+1)}_{m+r-k}.$$

Dessa forma, temos que:

$$a^{(m+n)}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a^{(m)}_{ik} a^{(n)}_{kj} = \sum_{k=1}^{r} J^{(r-k+1)}_{n+r-i} J^{(r-j+1)}_{m+r-k}.$$

Como $a^{(m+n)}_{ij} = J^{(r-j+1)}_{m+n+r-i}$, obtemos que:

$$J^{(r-j+1)}_{m+n+r-i} = \sum_{k=1}^{r} J^{(r-k+1)}_{n+r-i} J^{(r-j+1)}_{m+r-k}.$$

Fazendo as mudanças de variável: $r-j+1=q$, $p=r-1$ e $d=r-k+1$, derivamos que:

$$J^{(q)}_{m+n+p}=\sum_{d=1}^{r}J^{(d)}_{n+p}J^{(q)}_{m+d-1},$$

para inteiros $m,n\geq 0$ e cada $p,q(1\leq p,q\geq r)$.

Usando agora o fato de que $J^{[C_1]}_{n+n_0}=J^{[C_2]}_{n+m_0}$, temos que $J^{(d)}_{n+p}=J^{(d)}_{m+p}$ e $J^{(q)}_{m+d-1}=J^{(q)}_{n+d-1}$ e consequentemente:

$$J^{(q)}_{m+n+p}=\sum_{d=1}^{r}J^{(d)}_{m+p}J^{(q)}_{n+d-1}=\sum_{d=1}^{r}J^{(d)}_{n+p}J^{(q)}_{m+d-1},$$

para cada inteiro $m,n\geq 0$ e cada p,q com $1\leq p,q\leq r$.

Uma vez que $J^{(j)}_{n}=J^{(r)}_{n-1}+\cdots+2J^{(r)}_{n-j}$, para $2\leq j\leq r-1$ e $n\geq j$, obtemos para $1\leq q\leq r-1$ que:

$$J^{(d)}_{m+p}=J^{(r)}_{m+p-1}+J^{(r)}_{m+p-2}+\cdots+2J^{(r)}_{m+p-d}=\sum_{i=1}^{d-1}J^{(r)}_{m+p-i}+2J^{(r)}_{m+p-d},$$

$$J^{(q)}_{n+d-1}=J^{(r)}_{n+d-2}+J^{(r)}_{n+d-3}+\cdots+2J^{(r)}_{n+d-1-q}=\sum_{j=1}^{q-1}J^{(r)}_{n+d-j-1}+2J^{(r)}_{n+d-1-q}.$$

Assim, obtemos o seguinte resultado:

$$J^{(q)}_{m+n+p}=\sum_{d=1}^{r}\left[\sum_{i=1}^{d-1}J^{(r)}_{m+p-i}+2J^{(r)}_{m+p-d}\right]\left[\sum_{j=1}^{q-1}J^{(r)}_{n+d-j-1}+2J^{(r)}_{n+d-1-q}\right].$$

Tomando $q=r$, obtemos:

$$J^{(r)}_{m+n+p}=\sum_{d=1}^{r}J^{(d)}_{m+p}J^{(r)}_{n+d-1}=\sum_{d=1}^{r}J^{(d)}_{n+p}J^{(r)}_{m+d-1}.$$

De modo geral, temos o resultado do seguinte teorema.

Teorema 21 *Seja $\mathbb{J}_r=\{\{J^{(s)}_n\}_{n\geq 0},1\leq s\leq r\}$ o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então, para cada $n,m\geq 0$, temos a seguinte identidade:*

$$J^{(r)}_{m+n}=\sum_{d=1}^{(r)}\left[\sum_{i=1}^{d-1}J^{(r)}_{m-i}+2J^{(r)}_{m-d}\right]J^{(r)}_{n+d-1}\tag{18}$$

Como aplicação do Teorema 21, temos os resultados dados no corolário abaixo.

Corolário 22 *Os termos dos números de Jacobsthal generalizados usuais $\{J^{(r)}_n\}_{n\geq 0}$ para $r=2$ e $r=3$ verificam, respectivamente, as identidades:*

$$J^{(2)}_{m+s}=2J^{(2)}_{s}J^{(2)}_{m-1}+J^{(2)}_{s+1}J^{(2)}_{m}.\tag{19}$$

$$J^{(3)}_{m+s}=2J^{(3)}_{s}J^{(3)}_{m-1}+J^{(3)}_{s+1}\left[J^{(3)}_{m-1}+2J^{(3)}_{m-2}\right]+J^{(3)}_{s+2}J^{(3)}_{m}.\tag{20}$$

4 Aspecto combinatório do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal

Apresentamos nesta seção expressões combinatórias para os números de Jacobsthal generalizados $J_n^{(j)}, 2 \leq j \leq r$. Os resultados evidenciados foram baseados nos trabalhos de [5], [6] [10], [11] e [14].

Consideremos inicialmente $\{\rho(n,r)\}_{n\geq 0}$ a sequência definida em [6] dada da seguinte forma:

$$\rho(n,r) = \sum_{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=n-r} \frac{(k_0+\cdots+k_{r-1})!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!} b_0^{k_0}.b_1^{k_1}\cdots b_{r-1}^{k_{r-1}}, n \geq r, \tag{21}$$

onde $\rho(r,r) = 1$ e $\rho(n,r) = 0$ para $0 \leq n \leq r-1$.

Usando a Identidade estabelecida em [10]

$$\frac{(k_0+\cdots+k_{r-1}-1)!}{k_0!k_1!\cdots k_{i-1}!(k_i-1)!k_{i+1}!\cdots k_{r-1}!} = k_j \frac{(k_0+\cdots+k_{r-1}-1)!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!}, \tag{22}$$

temos que $\rho(n,r)$ satisfaz a seguinte equação de diferença linear $\rho(n+1,r) = b_0\rho(n,r) + b_1\rho(n-1,r) + \cdots + b_{r-1}\rho(n-r+1,r)$ para cada $n \geq r$. Especialmente para o caso em que $b_i = 1$, $i = 0, \cdots, r-2$ e $b_{r-1} = 2$ obtemos que:

$$\rho(n+1,r) = \sum_{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=n-r+1} \frac{(k_0+\cdots+k_{r-1})!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!} 2^{k_{r-1}}, n \geq r, \tag{23}$$

onde $\rho(r,r) = 1$ e $\rho(n,r) = 0$ para $0 \leq n \leq r-1$.

Dessa forma, formulamos o resultado dado pela proposição a seguir.

Proposição 23 *(Expressão combinatória dos números de Jacobsthal generalizados) Para os números de Jacobsthal generalizados* $\{J_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$*, temos a seguinte expressão combinatória:*

$$J_n^{(r)} = \rho(n+1,r) = \sum_{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=n-r+1} \frac{(k_0+\cdots+k_{r-1})!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!} 2^{k_{r-1}}, n \geq r, \tag{24}$$

onde $\rho(r,r) = 1$ *e* $\rho(n,r) = 0$ *para* $0 \leq n \leq r-1$.

Exemplo 24 *Tomando* $r = 4$ *e* $n = 6$ *na Expressão* (24)*, temos a seguinte expressão combinatória:*

$$J_6^{(4)} = \sum_{k_0+2k_1+3k_3+4k_4=6-4+1=3} \frac{(k_0+k_1+k_2+k_3)!}{k_0!k_1!k_2!k_3!},$$

onde $J_{2-1}^{(2)} = J_1^{(2)} = 1$ *e* $J_0^{(2)} = 0$.

Temos que dada a equação $k_0 + 2k_1 + 3k_3 + 4k_4 = 3$*, encontramos como solução inteira não-negativa* $k_0 = k_1 = k_3 = 0, k_2 = 1$ *e* $k_0 = k_1 = 1, k_2 = k_3 = 0$ *. Dessa forma obtemos que:*

$$J_6^{(4)} = \sum_{k_0+2k_1+3k_3+4k_4=6-4+1=3} \frac{(k_0+k_1+k_2+k_3)!}{k_0!k_1!k_2!k_3!} = \frac{(0+0+0+1)!}{0!0!0!1!}2^1 + \frac{(1+1+0+0)!}{1!1!0!0!}2^0 = 2+2 = 4,$$

que é um resultado que pode ser verificado na Tabela 1.

De forma geral, uma aplicação direta das Proposições 8 e 9 leva à formulação combinatória dos elementos do sistema fundamental generalizado de Jacobsthal, que é dada pela proposição a seguir.

Proposição 25 *Seja o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal* $\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}$. *A expressão combinatória de cada elemento* $\{J_n^{(j)}\}_{n\geq 0}$, $2 \leq j \leq r-1$, *onde* $J_n^{(r)} = \rho(n+1,r)$, *para cada* $n \geq j$ *é:*

$$J_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j-1} \rho(n-i+1,r) + 2\rho(n-j+1,r), \tag{25}$$

onde os $\rho(n,r)$ *são dadas como em* (24).

Em geral, podemos obter a representação combinatória para qualquer sequência do tipo (1), combinando as Proposições 23 e 10.

Proposição 26 *Seja* $\{w_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de Jacobsthal generalizada do tipo* (1), *com condições iniciais* α_0, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}$. *Então, a seguinte identidade é verificada:*

$$\begin{aligned} w_n = \alpha_0 a_{r-1}\rho(n+1,r) + \alpha_1 \sum_{i=0}^{1} a_{r-2+i}\rho(n-i,r) + \cdots + \\ \alpha_{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} a_{r-j+i}\rho(n-i,r) + \cdots + 2\rho(n+1,r). \end{aligned} \tag{26}$$

Uma aplicação direta do Teorema 21 e da Proposição 25, permite estabelecer uma identidade combinatória envolvendo $J_{m+s}^{(r)}$. Mais precisamente, temos a identidade combinatória fornecida pelo seguinte teorema.

Teorema 27 *Seja* $\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}$ *o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então, para cada* $s, m \geq 0$, *temos a seguinte identidade combinatória:*

$$\rho(m+s+1,r) = \sum_{d=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{d-1} \rho(m-i+1,r) + 2\rho(m-d+1,r) \right] \rho(s+d,r). \tag{27}$$

Demonstração:

De fato, temos que $J_{m+n}^{(r)} = \sum_{d=1}^{r} \sum_{i=1}^{d-1} \left[J_{m-i}^{(r)} + 2J_{m-d}^{(r)} \right] J_{n+d-1}^{(r)}$. Dado que $J_n^{(r)} = \rho(n+1,r)$, obtemos que $J_{m+s}^{(r)} = \rho(m+s+1,r)$, $J_{m-i}^{(r)} = \rho(m-i+1,r)$, $J_{s+d-1}^{(r)} = \rho(s+d-1+1,r) = \rho(s+d,r)$ e $2J_{m-d}^{(r)} = 2\rho(m-d+1,r)$. Dessa forma, segue-se que:

$$\rho(m+s+1,r) = \sum_{d=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{d-1} \rho(m-i+1,r) + 2\rho(m-d+1,r) \right] \rho(s+d,r). \tag{28}$$

Nos casos particulares de $r = 2$ e $r = 3$, a fórmula do Teorema 27 mostra que a Identidade Combinatória (28) assume, respectivamente, as seguintes formas, dadas pelo corolário abaixo:

Corolário 28 *Seja* $\mathbb{J}_r = \{\{J_n^{(s)}\}_{n\geq 0}, 1 \leq s \leq r\}$ *o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal. Então, para* $r = 2$ *e* $r = 3$*, temos, respectivamente, para cada* $m \geq 0$ *e* $s \geq 0$ *as seguintes identidades combinatórias:*

$$\rho(m+s+1,2) = 2\rho(m,2)\rho(s+1,2) + \rho(m+1,2)\rho(s+2,2), \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\rho(m+s+1,3) = 2\rho(s+1,3)\rho(m,3) + \rho(s+2,3)[\rho(m,3) + 2\rho(m-1,3)]+ \\ \rho(s+3,3)\rho(m+1,3),\end{aligned} \tag{30}$$

para cada $m \geq 2$ *e* $s \geq 0$*, onde* $\rho(n,s)$ *é dado pela Expressão* (23).

5 Conclusão

Como vimos, o sistema fundamental generalizado de Jacobsthal está associado a uma certa equação de diferença linear, sendo uma base para o espaço vetorial real de soluções desta equação. Este resultado é muito importante, pois significa dizer que qualquer sequência deste espaço pode ser obtida através da combinação linear dos vetores da base. Apresentamos importantes propriedades deste sistema, e com o uso da matriz casoratiana, muitas identidades foram derivadas. Acreditamos que este trabalho é de grande relevância e esperamos que o mesmo seja uma importante fonte de pesquisa para quem queira procurar ter mais conhecimentos sobre este assunto e que possa impulsionar outras pesquisas futuras.

Referências

[1] VIEIRA, R. P. M. et al. Um estudo dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 21, p. 81-89, 2021. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/322. Acesso em: 14 abr. 2024.

[2] HORADAM, A. F. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quartely**, v. 34, n.1, p. 40-54, 1996.

[3] DAŞDEMIR, A. On the Jacobsthal numbers by matrix method. **SDU Journal of Science**, v. 7, n. 1, p. 69-76, 2012.

[4] KOKEN, F.; BOZKURT, D. On the Jacobsthal-Lucas numbers by matrix methods. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, v. 3, n. 13, p. 605-614, 2008.

[5] PEREIRA-SPREAFICO, E. V.; RACHIDI, M. Fibonacci fundamental system and generalized Cassini identity. **The Fibonacci Quarterly**, v. 57, n. 2, p. 155-167, 2019.

[6] MOULINE, M; RACHIDI, M. Application of Markov chains properties to r-generalized Fibonacci sequences. **The Fibonacci Quarterly**, v. 37, n. 1, p. 34-38, 1999.

[7] TAHER, R. B.; RACHIDI, M. On the matrix powers and exponential by the r-generalized Fibonacci sequences methods: the companion matrix case. **Linear Algebra and Its Applications**, v. 370, p. 341-353, 2003.

[8] EL WAHBI, B.; MOULINE, M.; RACHIDI, M. Solving nonhomogeneous recurrence relations of order r by matrix methods. **The Fibonacci Quarterly**, v. 40, n. 2, p. 106-117, 2002.

[9] KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **Difference equations**: an introduction with applications. San Diego: Academic press, 2001.

[10] CHEN, W. Y.C.; LOUCK, J. D. The combinatorial power of the companion matrix. **Linear Algebra and its Applications**, v. 232, p. 261-278, 1996.

[11] CRAVEIRO, I. M.; PEREIRA-SPREAFICO, E. V.; RACHIDI, M. On a model of generalized Pell numbers. **International Journal of Advanced Engineering Research and Science (IJAERS)**, v. 8, n.8, p. 523-546, 2021.

[12] KALMAN, D. Generalized Fibonacci numbers by Matrix Methods. **The Fibonacci Quarterly**, v. 20, n.1, p. 73-76, 1982.

[13] MILES JR, E. P. Generalized Fibonacci numbers and associated matrices. **The American Mathematical Monthly**, v. 67, n. 8, p. 745-752, 1960.

[14] PEREIRA-SPREAFICO, E. V.; RACHIDI, M. On generalized Pell numbers of order $r \geq 2$. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, v. 22, n. 1, p. 125-138, 2021.

[15] STANLEY, R. P. **Enumerative combinatorics**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. v. 1. (Cambridge studies in advanced mathematics).