Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Área de um triângulo e suas alturas

Area of a triangle and its heights

Chico Nery
Colégio San Conrado
chiconery@sanconrado.com.br

Edmundo Capelas de Oliveira
Imecc - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Unicamp
capelas@unicamp.br

Resumo

Com toda a certeza, o estudo das propriedades do triângulo e seus elementos, desempenha papel preponderante no estudo da geometria plana, também conhecida como geometria sintética. A partir deste estudo, por exemplo, o cálculo da área de outras figuras, tais como paralelogramo e trapézio, dentre outros, decorre de forma bastante natural, pois, em geral, podemos decompor tal figura plana em triângulos, somando as respectivas áreas a fim de obter a área da figura em questão. Aqui, neste trabalho, apresenta-se e discute-se uma relação entre a área de um triângulo e a área de seu correspondente triângulo cujos lados são o inverso das alturas do triângulo. Mostra-se que o produto dessas duas áreas é uma constante numérica, um resultado bastante interessante e aparentemente novo. Casos particulares são discutidos.

Palavras-chave: áreas. alturas. medianas. bissetrizes.

Abstract

Certainly, the study of the properties of the triangle and its elements plays a preponderant role in the study of plane geometry, also known as synthetic geometry. From this study, for example, the calculation of the area of other figures, such as parallelogram and trapezoid, among others, occurs quite naturally, since, in general, we can decompose such a plane figure into triangles, adding the respective areas in order to obtain the area of the figure in question. Here, in this work, it is presented and discussed a relationship between the area of a triangle and the area of its corresponding triangle whose sides are the inverse of the heights of the triangle. It is shown that the product of these two areas is a numerical constant, a very interesting and apparently novel result. Particular cases are discussed.

Keywords: areas. heights. medians. bisectors.

Artigo recebido em abr. 2024 e aceito em jul. 2024

1 Introdução

Existem várias expressões que permitem efetuar o cálculo da área de um triângulo. Dependendo do que temos como dados uma é mais conveniente que outra, isto é, a melhor maneira de calcular a área é, primeiro, saber quais são os dados. Por exemplo, se conhecemos dois lados e o ângulo formado entre eles, com certeza, a trigonometria é o melhor caminho. Antes de continuar, ressaltamos que o estudo do triângulo e seus elementos conta com um número enorme de pesquisadores que produziram os mais diferentes manuais e enciclopédias. Vários são os *sites* que apresentam uma calculadora que te permite determinar a área de um triângulo das mais diversas maneiras. Ainda mais, com o evento da inteligência artifical, vários outros modos de se estudar o triângulo têm aparecido (Kimberling, [2022]; Pamula; Szik; Benn, 2024).

Admitamos que o leitor tenha conhecimento de outras maneiras para efetuar o cálculo da área do triângulo, além da clássica: base vezes altura dividido por dois. Assim sendo, vamos propor uma pergunta que pode acarretar, de forma natural, outras, a saber: existe uma expressão para calcular a área de um triângulo conhecidas as três medianas? E se no lugar das três medianas, trocarmos por três outras cevianas, por exemplo as três alturas? Antes de discutir essas perguntas, como já mencionamos, é importante que conheçamos os dados, ou ainda, quais são os elementos conhecidos do triângulo que queremos calcular a sua área. Entendemos por elementos do triângulo, os lados, os ângulos, as bissetrizes, as alturas, dentre outros (Putnoki, 1989).

A partir da conhecida fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo, conhecidos os seus três lados (Oliveira; Nery, [2024]), é possível calcular a área dado um outro elemento, desde que conheçamos uma outra relação entre os dados e a respectiva área. No caso de conhecermos as alturas, sabemos que a área pode ser escrita em termos da base e da altura, esta é, neste caso, a relação entre os elementos, sendo, assim possível expressar a área em termos das alturas, e que podemos afirmar ser uma fórmula tipo Heron em termos das alturas. Ainda mais, no caso de os elementos serem as bissetrizes internas, podemos afirmar que, a menos de uma isometria, sempre existe o triângulo cujas bissetrizes internas são conhecidas (Mironescu; Panaitopol, 1994).

O presente trabalho está disposto do seguinte modo: na primeira seção, após apresentarmos a notação, vamos discutir diversas possibilidades para calcular a área do triângulo, focando numa particular, envolvendo as medianas, que nem sempre é apresentada nos ensinos fundamental e médio. Na segunda seção, nosso principal resultado e que acreditamos ser novo, procedendo de modo similar ao caso das medianas, vamos mostrar que necessitamos de uma “manobra” a fim de que tenhamos uma conveniente expressão desejável, que calcule a área do triângulo conhecidas as três alturas, ou seja, a partir dela e dos dados consigamos calcular a área. Por fim, na terceira seção, apresentamos alguns casos particulares a fim de sedimentar os resultados.

2 Área do triângulo

Antes de apresentarmos, como uma breve revisão, algumas possibilidades de se calcular a área do triângulo, vamos introduzir a notação, relativa aos elementos, a ser utilizada no decorrer do texto.

2.1 Preliminares

A fim de atingir um público mais amplo, acreditamos que se faz necessário tecer algumas considerações preliminares, em particular, a notação a ser usada, bem como apresentar conceitos que serão úteis na sequência.

Letras minúsculas denotam segmentos, em particular, lados do triângulo; letras maiúsculas denotam pontos, em particular, vértices do triângulo, e letras gregas, os ângulos. No caso de medianas e alturas, utilizamos um subíndice para deixar claro que tal segmento é uma mediana ou uma altura.

Vamos esboçar a Figura 1. Consideremos A, B e C os vértices do triângulo ABC. Denotemos por a, b e c os lados, respectivamente, opostos aos vértices, e α, β e γ os respectivos ângulos internos.

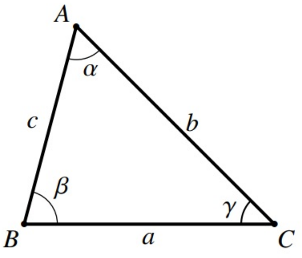

Figura 1: Triângulo ABC, lados, vértices e ângulos.

Passemos, agora, à definição de mediana, bem como do ponto de encontro das medianas, denominado baricentro. É importante notar que o baricentro é sempre um ponto interno ao triângulo, independente de o triângulo ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Definição 1 MEDIANA. *Chama-se mediana o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Definição 2 BARICENTRO. *O baricentro ou centro de gravidade do triângulo é o ponto de encontro das medianas.*

Devido a importância dos conceitos de mediana e baricentro, em particular, no contexto deste trabalho, vamos apresentar algumas propriedades, relativas a estes conceitos.

Proposição 3 *A mediana divide o triângulo em dois triângulos equivalentes, isto é, apresentam a mesma áreas.*

Demonstração Para uma demonstração, ver Putnoki (1989).

Como uma consequência da Proposição 3 temos o seguinte resultado: As medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (Putnoki, 1989).

Na Figura 2, consideramos o triângulo ABC, com destaque para as três medianas, denotadas por m_a, m_b e m_c, e o baricentro, denotado por G.

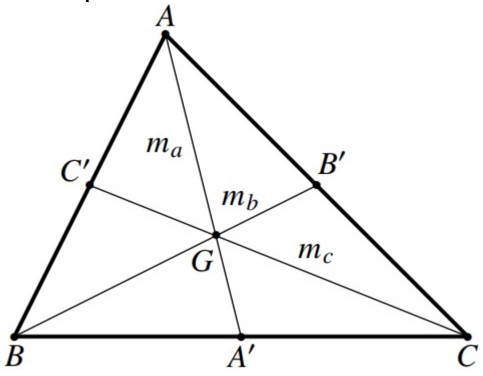

Figura 2: Triângulo ABC, medianas e o baricentro.

NERY, C.; OLIVEIRA, E. C. de. Área de um triângulo e suas alturas. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 24, e24005, 2024.
DOI: 10.21167/cqdv24e24005 Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/index

Proposição 4 *Num triângulo, a distância do vértice até o baricentro é o dobro da distância do baricentro até o ponto médio do lado oposto.*

Demonstração Para uma demonstração, ver (Oliveira; Nery, 2024).

A partir da Proposição 4 e utilizando a nomenclatura da Figura 2, podemos escrever as seguintes relações

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GA'}, \qquad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GB'}, \qquad \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GC'}.$$

Definição 5 ALTURA. *Chama-se altura o segmento que une o vértice à reta suporte do lado oposto, formando com esta um ângulo reto.*

Definição 6 ORTOCENTRO. *O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das retas suportes das alturas.*

É importante notar que o ortocentro não se encontra necessariamente na região interior ao triângulo. Num triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto. Por outro lado, para um triângulo obtusângulo o ortocentro encontra-se na região exterior ao triângulo. Em resumo, somente no triângulo acutângulo o ortocentro é um ponto que se encontra na região interior ao triângulo.

Na Figura 3, consideramos o triângulo ABC, com destaque para as três alturas, denotadas por h_a, h_b e h_c, e o ortocentro, denotado por O.

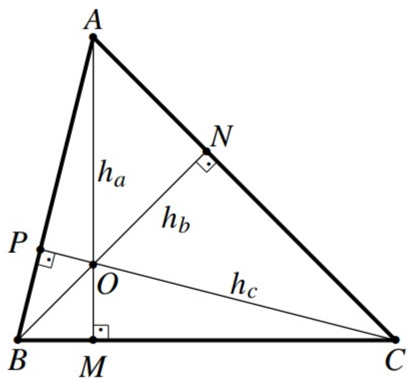

Figura 3: Triângulo ABC, alturas e o ortocentro.

Em analogia ao baricentro, o ortocentro também goza de propriedades interessantes, porém fogem ao escopo do presente trabalho, pois envolvem conceitos não abordados aqui. Para mais detalhes, sugerimos (Oliveira; Nery, [2024]).

2.2 Cálculo da área do triângulo

Como já mencionamos, o cálculo da área de um triângulo pode ser abordado de várias maneiras. Dependendo dos elementos que são conhecidos, a melhor abordagem emerge naturalmente. Além da clássica *base vezes altura dividido por dois*, citamos o cálculo da área por meio da expressão (Oliveira; Nery, [2024])

$$\mathcal{A} = \frac{a \cdot c}{2} \operatorname{sen} \beta,$$

onde a e c são dois lados e β é o ângulo por eles formado.

Uma vez conhecidos os três lados, é imediato o cálculo do semiperímetro, assim uma outra expressão bastante utilizada é a fórmula de Heron (Oliveira; Nery, [2024]),

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $2p = a + b + c$, sendo p o semiperímetro.

Como também já mencionamos, uma expressão que fornece a área do triângulo, conhecidas as três medianas, nem sempre é abordada nas disciplinas de geometria. Aqui, vamos esboçar o cálculo dessa área, apresentada como teorema, pois utiliza apenas conceitos até então apresentados.

Teorema 7 *Sejam ABC um triângulo e M, N e P os pontos médios dos lados, conforme* Figura 4*, sendo G o baricentro.*

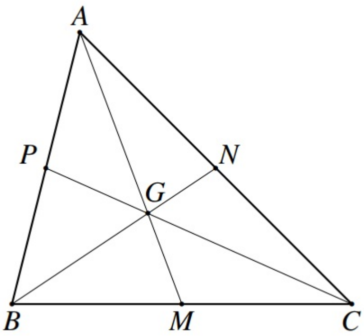

Figura 4: Triângulo, as três medianas e o baricentro.

Se as medianas são $\overline{AM} = m_a$, $\overline{BN} = m_b$ e $\overline{PC} = m_c$, então a área do triângulo ABC é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3}\sqrt{q(q-m_a)(q-m_b)(q-m_c)}$$

onde q é a semissoma das medianas $q = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)$.

Demonstração A fim de mostrar esse resultado, começamos por lembrar da propriedade do baricentro, Proposição 4, associada à mediana m_a,

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3}m_a.$$

Prolongamos a mediana $\overline{AM}$ de modo que tenhamos $\overline{GM} = \overline{MQ}$, conforme Figura 5, e unimos os pontos Q com B de modo a formar o triângulo BMQ

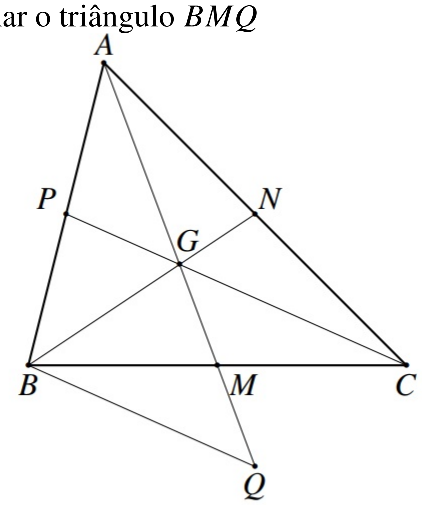

Figura 5: Prolongamento da mediana $\overline{AM}$.

Por construção, traços auxiliares, temos que $\overline{BQ} \parallel \overline{PC}$, bem como os triângulos BMQ e CMG, são semelhantes pelo critério LAL, pois $\overline{BM} = \overline{CM}$, $B\widehat{M}Q = C\widehat{M}G$ é comum, opostos pelo vértice, e $\overline{GM} = \overline{MQ}$.

A partir da propriedade do baricentro, cada um dos seis triângulos formados pelas medianas e os lados do triângulo, tem a área dada como $\frac{1}{6}$ da área do triângulo ABC, logo segue que a área do triângulo BGQ é tal que

$$\mathcal{A}_{BGQ} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BGM} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABC},$$

o que implica em $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{BGQ}$.

Note que, no triângulo BGQ são conhecidos os três lados, a saber:

$$\overline{GQ} = \frac{2}{3}m_a, \qquad \overline{BG} = \frac{2}{3}m_b, \qquad \overline{BQ} = \frac{2}{3}m_c,$$

logo podemos encontrar a área por meio da fórmula de Heron,

$$\mathcal{A}_{BGQ} = \sqrt{p\left(p - \frac{2}{3} \cdot m_a\right)\left(p - \frac{2}{3} \cdot m_b\right)\left(p - \frac{2}{3} \cdot m_c\right)}$$

onde, expressando p em termos das medianas e simplificando, temos

$$p = \frac{2}{3} \cdot m_a + \frac{2}{3} \cdot m_b + \frac{2}{3} \cdot m_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{m_a + m_b + m_c}{2} = \frac{2}{3}q,$$

sendo q a semissoma das medianas. Substituindo o semiperímetro, expresso em termos da semissoma da medianas e simplificando, obtemos

$$\mathcal{A}_{BGQ} = \sqrt{\frac{2}{3}q \cdot \frac{2}{3}(q - m_a) \cdot \frac{2}{3}(q - m_b) \cdot \frac{2}{3}(q - m_c)},$$

que, substituída na expressão que fornece a área do triângulo ABC e simplificando permite escrever

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{q \cdot (q - m_a) \cdot (q - m_b) \cdot (q - m_c)},$$

que é a expressão desejada. □

Ressaltamos que esta propriedade pode ser visualizada pela Figura 6, que se baseia exclusivamente na semelhança de triângulos.

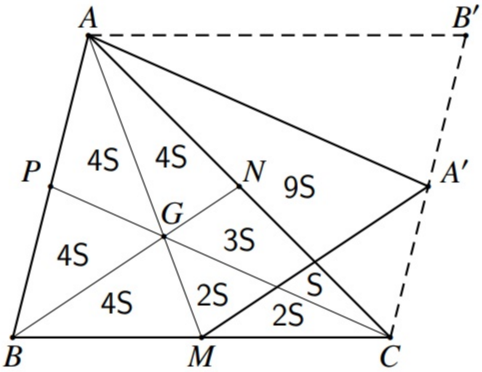

Figura 6: Triângulo ABC e as respectivas áreas.

Assim, da Figura 6, podemos escrever para as áreas, relativa ao triângulo ABC e relativa ao triângulo formado pelas medianas AMA', logo

$$\mathcal{A}_{ABC} = 24\mathsf{S} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{A}_{AMA'} = 18\mathsf{S},$$

respectivamente, de onde segue, imediatamente, a relação

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \mathcal{A}_{AMA'}.$$

3 Área em termos das alturas

Nesta seção, nosso principal resultado e que acreditamos ser pouco conhecido, vamos mostrar que existe um modo interessante de se calcular a área de um triângulo a partir dos inversos das alturas, e não diretamente das alturas, mesmo porque pode não existir o triângulo formado pelas respectivas alturas, mas sempre existe o respectivo triângulo formado pelos inversos das alturas, como vamos ver ainda neste trabalho.

Consideremos um triângulo ABC de área S, sendo a, b e c os lados e as alturas correspondentes denotadas por h_a, h_b e h_c, conforme Figura 3.

Substituindo o semiperímetro $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ na fórmula de Heron, rearranjando e simplificando, obtemos para o quadrado da área do triângulo, expressa exclusivamente em termos dos lados

$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a). \tag{1}$$

Como mencionado na Seção 2.2, a área de um triângulo pode ser calculada por meio do semiproduto do lado pela correspondente altura o que permite escrever, para cada um dos lados, as expressões,

$$a \cdot h_a = 2S, \qquad b \cdot h_b = 2S, \qquad c \cdot h_c = 2S.$$

Visto que as três expressões têm em comum o segundo membro, o dobro da área do triângulo, vamos rearranjar de modo a escrever as igualdades

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = 2S. \tag{2}$$

A Eq.(2) nos permite afirmar que o triângulo ABC, de lados a, b e c, é semelhante ao triângulo $A'B'C'$, de lados $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ e $\frac{1}{h_c}$, inversos das alturas, cuja razão de semelhança é o dobro da área, $2S$. Note que estes dois triângulos, uma vez definido o primeiro, garante a definição do segundo. Vamos expressar o principal resultado do trabalho por meio do teorema a seguir.

Teorema 8 *Se o triângulo ABC, de lados a, b e c tem área S e o correspondente triângulo $A'B'C'$, de lados $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ e $\frac{1}{h_c}$ tem área S', então o produto destas duas áreas é uma constante numérica.*

Demonstração Sendo S' a área do triângulo $A'B'C'$, podemos afirmar

$$\frac{S}{S'} = (2S)^2$$

de onde concluímos $S \cdot S' = \frac{1}{4}$. Esta relação é muito prática dada a sua simplicidade e a sua objetividade.

Vamos, a seguir, confirmar sua validade de modo mais operacional. Denotando por p' o semiperímetro do triângulo $A'B'C'$ cujos lados são os inversos das alturas e expressando-o em termos dos lados do triângulo ABC, obtemos

$$p' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{1}{4S}(a + b + c).$$

Utilizando a fórmula de Heron, agora para o triângulo $A'B'C'$, podemos escrever para o quadrado da área

$$(S')^2 = \frac{a+b+c}{4S}\left(\frac{a+b+c}{4S} - \frac{a}{2S}\right)\left(\frac{a+b+c}{4S} - \frac{b}{2S}\right)\left(\frac{a+b+c}{4S} - \frac{c}{2S}\right),$$

que, simplificando e rearranjando fornece

$$(S')^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16^2 S^4}.$$

Substituindo o resultado da Eq.(1) na expresão anterior, obtemos

$$(S')^2 = \frac{16S^2}{16^2 S^4} = \frac{1}{16S^2}.$$

Por fim, simplificando e reescrevendo de forma conveniente, temos

$$S \cdot S' = \frac{1}{4},$$

o que acarreta numa constante numérica. □

Por melhor que seja nosso conhecimento, acreditamos que este interessante resultado é relativamente novo. Como já mencionado, definido o triângulo, o triângulo formado pelo inverso das alturas sempre existe e, ainda mais, tem a sua área igual a $1/4S$, onde S é a área do triângulo ABC.

Como havíamos mencionado, existe uma relação tipo Heron para a área de um triângulo em termos das três alturas, pois, a altura é dada pelo quociente do dobro da área dividido pelo respectivo lado e que nos leva à expressão

$$\frac{1}{\mathcal{A}} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

sendo $h_i = \frac{2\mathcal{A}}{\ell_i}$ com $i = a, b, c$, e ℓ_i o respectivo lado.

Comparando as duas expressões, acreditamos ser nossa expressão, dada pelo Teorema 8 de mais fácil manipulação o que acarreta simplicidade.

A partir de nosso resultado, em resumo, podemos afirmar: dadas as alturas de um triângulo ABC, os inversos dessas alturas são lados de um triângulo cuja área, S', sabemos calcular. Uma vez determinada essa área, obtemos a área do triângulo, S, por meio de uma simples divisão.

4 Casos particulares

Vamos considerar dois exemplos específicos a fim de solidificar o resultado demonstrado. Para tal, separamos, para efeito de contas, o clássico triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5 e um segundo caso, um triângulo obtusângulo sendo dados dois lados, 6 e 10, e o ângulo por eles formado, 120°. É claro que, tanto no primeiro quanto no segundo casos, existem expressões que fornecem a área diretamente, isto é, no primeiro caso, a fórmula de Heron enquanto, no segundo caso a fórmula advinda da trigonometria. Por outro lado, se déssemos as respectivas alturas, bastava substituir diretamente na expressão e determinar a área. O objetivo não é esse, vamos especificá-lo a fim de comprovar a expressão que demonstramos.

4.1 Triângulo retângulo

Como é sabido, no caso do triângulo retângulo de catetos 3 e 4, são também a alturas, e hipotenusa 5 tem a correspondente altura $12/5$. É imediato comprovar que a área é

$$S = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot \frac{12}{5}}{2} = 6.$$

Vamos calcular a área a partir dos inversos das alturas, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{12}$, o que acarreta para o semiperímetro

$$p' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right) = \frac{1}{2}.$$

Novamente, utilizando a fórmula de Heron, temos

$$S' = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\right)}$$

de onde segue $S' = \frac{1}{24}$. Visto que as duas áreas são conhecidas, temos para o produto

$$S \cdot S' = 6 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4},$$

conforme garantido pelo Teorema 8.

Note que, neste caso, tanto o triângulo de lados com os inversos das alturas, quanto com as próprias alturas, estão bem definidos.

4.2 Triângulo obtusângulo

Consideremos um triângulo obtusângulo de lados 6 e 10, cujo ângulo por eles formado é 120°. Utilizando o teorema dos cossenos é imediato determinar o maior lado, 14. Visto não serem as alturas determinadas de modo imediato, lançamos mão de uma simples Figura 7.

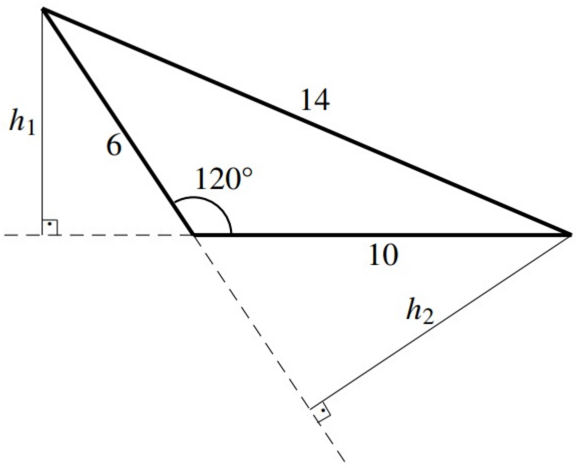

Figura 7: Triângulo obtusângulo.

Note que os dois triângulos retângulos são semelhantes, pois têm ângulos iguais, critério AA, de onde segue

$$\frac{h_1}{6} = \frac{h_2}{10} = \operatorname{sen} 60°,$$

o que nos leva aos valores $h_1 = 3\sqrt{3}$ e $h_2 = 5\sqrt{3}$. Ainda mais, da relação trigonométrica para a área temos

$$S = \frac{14 \cdot h_3}{2} = \frac{6 \cdot 10}{2} \operatorname{sen} 120° = 15\sqrt{3},$$

de onde obtemos para a altura $h_3 = \frac{15\sqrt{3}}{7}$.

Por meio dos respectivos inversos da alturas e simplificando, temos para o semiperímetro

$$p' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \frac{7}{15\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Utilizando a fórmula de Heron, podemos escrever para o quadrado da área

$$(S')^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{7}{15\sqrt{3}}\right),$$

que, após simplificação, permite escrever para a área

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{180}.$$

Visto que as duas áreas são conhecidas, temos para o produto

$$S \cdot S' = 15\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{180} = \frac{1}{4},$$

conforme garantido pelo Teorema 8. □

5 Conclusões

Neste trabalho discorremos sobre várias maneiras de calcular a área de um triângulo, focando da mais conhecida, base vezes altura dividido por dois, até a expressão que fornece a área, conhecidas as três medianas.

Com o intuito de escrever uma expressão para a área, conhecidas as três alturas, fomos levados a introduzir uma “manobra”, levando em conta o inverso das alturas o que acarretou numa interessante e nova expressão, ou seja, o produto das duas áreas, do triângulo dado e do triângulo obtido pelo inverso das alturas, que sempre está definido, é uma constante numérica.

Por fim, é importante ressaltar que nem sempre existe um triângulo $A''B''C''$, tendo por lados as alturas de um triângulo ABC, conforme mostra o contra-exemplo: um triângulo de lados 5, 12 e 13, com as correspondentes alturas dadas por 5, 12 e $\frac{60}{13}$, não está definido, pois, $12 > 5 + \frac{60}{13}$.

Agradecimento

Somos gratos ao Dr. Quintino A. G. Sousa, por profícuas discussões que contribuíram para a melhoria do texto. Agradecemos ao referee *ad hoc* e ao editor por sugerirem alterações que melhoraram o texto.

6 Bibliografia

KIMBERLING, C. **Encyclopedia of Triangle Center – ETC.** [*S. l.: s. n.*, 2022]. Disponível em: http://faculty.evansville.edu/ck6/ encyclopedia/ETC.html. Acesso em: 28 fev. 2024.

MIRONESCU, P.; PANAITOPOL, L. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. **American Mathematic Montly**, v. 101, n. 1, p. 58-60, 1994.

OLIVEIRA, E. C. de; NERY, C., **Geometria plana em 13 mandamentos**. Rio de Janeiro: SBM, [2024]. No prelo.

PAMULA, H.; SZYK, B.; BENN, A. **Triangle height calculator**. [Krakóv]: Omni Calculator, 2024. Disponível em: https://www.omnicalculator.com/math/triangle-height. Acesso em: 28 fev. 2024.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de geometria & desenho geométrico**: volume especial para o vestibulando. São Paulo: Scipione, 1989.