Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Uma nota acerca da matriz repunidade

A note about the repunit matrix

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias

Douglas Catulio dos Santos
Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Barreiras, catuliodouglas4@gmail.com

Francival Santos Monteiro
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias

Vitor Manoel Alves de Souza
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias

Resumo

O estudo investiga a sequencia repunidade, caracterizados por uma recorrência linear de segunda ordem. Empregando a teoria de Horadam a sequência e a álgebra matricial, elucidamos a sequência, destacando o papel central da matriz geradora na análise de sequência. Os resultados revelam uma profunda inter-relação entre as propriedades da sequência e da matriz. A investigação culmina em um exame meticuloso das propriedades aritméticas e numa interpretação da matriz repunidade. Metodologicamente, integra análises teóricas e matriciais, enraizadas em recorrências e álgebra linear, oferecendo uma visão acadêmica abrangente sobre as complexidades das sequências.
Palavras-chave: Sequência repunidade. Sequência de Horadam. Matriz repunidade. Matriz repunidade inversa.

Abstract

The study investigates repunit sequence, characterized by a second-order linear recurrence. Employing Horadam's sequence theory and matrix algebra, we elucidate the sequence, highlighting the central role of the generating matrix in sequence analysis. The results reveal a profound interrelationship between sequence and matrix properties. The investigation culminates in a meticulous examination of the arithmetic properties and the interpretation of the repunit matrix. Methodologically, it integrates theoretical and matrix analyses, rooted in recurrences and linear algebra, offering a comprehensive academic overview of the complexities of the sequence.
Keywords: Repunit sequence. Horadam sequence. Repunit matrix. Inverse repunit matrix.

Artigo recebido em abr. 2024 e aceito em ago. 2024

1 Introdução

Os números repunidades $\{r_n\}_{n\geq 0}$ são os termos da sequência $\{0, 1, 11, 111, 1111, 1111, \ldots\}$, a sequência $A002275$ em OEIS (Sloane, 2024). Tem-se que, para todo $n \geq 1$, $r_n = 10r_{n-1} + 1$ com $r_0 = 0$. Veja ainda que, para $n \geq 1$, os termos desta sequência são escritos no sistema decimal como uma concatenação, ou repetição, da unidade. Na literatura há diversos trabalhos acerca desta clássica sequência, entre as quais podemos destacar Beiler (1964), Jaroma (2007), Yates (1982) e referências.

Conforme Santos e Costa (2023), a sequência $\{r_n\}_{n\geq 0}$ também satisfaz a seguinte fórmula recursiva, para todo $n \geq 1$,

$$r_{n+1} = 11r_n - 10r_{n-1}, \text{ com } r_0 = 0 \,, \tag{1}$$

uma recorrência linear de 2^a ordem.

Para n natural, considere $\{H_n\}$ a sequência de Horadam definida pela relação de recorrência de segunda ordem, em que p e q são números inteiros fixados, tais que

$$H_{n+1} = pH_n + qH_{n-1}, \; n \geq 1 \,.$$

Então, se fizermos $p = 11; q = -10; a = 0$; e $b = 1$; então a sequência de Horadam é especificada na sequência repunidade. Resultados mais gerais podem ser encontrados em Cerda (2012). Outros pesquisadores também usaram o método de representação matricial no estudo de sequências de recorrência de números naturais, veja por exemplo, (Catarino, Campos, Vasco; 2016); entre outros.

Por fim, considere a matriz de ordem 2, da forma $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} p & q \\ b & a \end{bmatrix}$, associada a sequência $\{H_n\}$ com $\det \mathcal{H} = pa - qb$, a matriz geradora da sequência. Em Santos e Costa (2024b), fazendo $H_n = r_n$, $p = 11$, $q = -10$ e $\mathcal{H} = R$, apresentam uma matriz geradora para a sequência repunidade, a *matriz repunidade* $R = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Assim para todo $n \geq 1$, a matriz repunidade R descreve cada elemento da sequência r_n em termos das potências da matriz R na posição a_{11}, e mais $\det R = 10$.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção 2, prosseguimos no estudo de estender a sequência numérica repunidade à matriz repunidade, determinamos a matriz repunidade inversa e a fórmula de Binet para as duas recorrências dadas; na seção 3 estudamos propriedades aritméticas da sequência numérica e a sequência matricial repunidade; na seção 4 apresentamos as identidades clássicas para a sequência matricial repunidade; por fim, na seção 5 apresentamos a matriz repunidade como uma transformação linear no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como motivação de uma aplicação em álgebra linear.

Para que o texto fique o mais autocontido possível, apresentamos a demonstração de resultados relevantes no desenvolvimento deste, mesmo com a indicação de referência.

2 As matrizes repunidade, repunidade inversa e a fórmula de Binet

Dada a matriz repunidade $R = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$, observe que ao fazermos R^2 temos:

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 & -110 \\ 11 & -10 \end{bmatrix} \,.$$

Notamos que na posição a_{11} da matriz R^2 é o r_3, o termo sucessor de r_2. De maneira geral, a potência n da matriz R, na célula a_{11} determina o termo sucessor de r_n.

Proposição 1 (Santos e Costa, 2024b)**.** *Dada a matriz* $R = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$. *Para todo natural* $n \geq 1$, *tem-se*

$$R^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Aplicaremos a indução sobre n. Para $n = 1$ temos que

$$\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix},$$

o que atesta a validade da sentença para $n = 1$.

Suponha que para algum $n \geq 1$ a sentença $R^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}$ seja válida. Vamos mostrar a validade para todo $n + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} R^{n+1} &= R^n \times R \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & r_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} - 10r_n & -10r_{n+1} \\ r_{n+1} & -10r_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10r_{n+1} \\ r_{n+1} & -10r_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto garante a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Exemplo 2. *Dada a matriz* $R = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *um cálculo direto, mostra que* $\det R = \begin{vmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$ *, ou seja,* $\det R = 10$. *Agora, fazendo uso da propriedade* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, *obtemos que*

$$\det R^n = (\det R)^n = 10^n,$$

ou seja, para todo natural $n \geq 1$, *tem-se* $\det R^n = 10^n$.

Nota 3. *Como observado em Santos e Costa (2024b), a permutação das linhas ou colunas na matriz repunidade R, produz novas matrizes com propriedades análogas a R. Por exemplo, dado* $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$, *então* $\tilde{R}^n = \begin{bmatrix} -10r_{n-1} & r_n \\ -10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix}$. *Veja ainda que* $\det \tilde{R}^n$ *também é* 10^n, *para todo natural* $n \geq 1$.

Lembremos que uma matriz quadrada A é dita invertível (ou não singular) quando existe outra matriz denotada por A^{-1}, tal que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$, sendo I a matriz identidade de ordem n. E dada uma matriz A de ordem 2, isto é, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sabemos que a matriz inversa A^{-1} é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, desde que $\det A \neq 0$.

Exemplo 4. *Especificamente para a* $R = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$, *e tendo que* $\det R = 10$, *Exemplo 4. Assim a matriz inversa de* R, *isto é, a matriz* $R^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -10r_0 & r_1 \\ 10r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$. *Elevando essa matriz ao quadrado temos* $R^{-2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \\ -\frac{11}{100} & \frac{111}{100} \end{bmatrix} = \frac{1}{10^2}\begin{bmatrix} -10 & 110 \\ -11 & 111 \end{bmatrix} = \frac{1}{10^2}\begin{bmatrix} -10r_1 & 110 \\ -11 & 111 \end{bmatrix}$.

Chamamos a matriz R^{-1} de matriz repunidade inversa .

Agora, fazendo uso da Proposição 1, como no Exemplo 4, obtemos o resultado seguinte:

Proposição 5. *Dada a matriz* $R = \begin{bmatrix} r_2 & -10r_1 \\ r_1 & -10r_0 \end{bmatrix}$. *Para todo natural* $n \geq 1$, *tem-se*

$$R^{-n} = \frac{1}{10^n}\begin{bmatrix} -10r_{n-1} & -r_n \\ 10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix} .$$

Em Costa, Santos, Monteiro e Souza (2024) os autores apresentaram uma extensão da sequência repunidade com índice negativo. Aqui R^{-n} é a inversa da matriz R^n para todo número natural n.

Dada a relação de recorrência (1) dos números repunidades, verificaremos que esta relação de recorrência "coincide" com a relação de recorrência da sequência de matrizes para $\{R^n\}_{n>0}$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
11 \cdot R^n - 10 \cdot R^{n-1} &= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{n+1} & -r_n 10 \\ r_n & -r_{n-1}10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_n & -r_{n-1}10 \\ r_{n-1} & -r_{n-2}10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} & -110r_n \\ 11r_n & -110r_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10r_n & 100r_{n-1} \\ -10r_{n-1} & 100r_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11r_{n+1} - 10r_n & -110r_n + 100r_{n-1} \\ 11r_n - 10r_{n-1} & -110r_{n-1} - 100r_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10(11r_n + -10r_{n-1}) \\ r_{n+1} & -10(r_{n-1} - 10r_{n-2}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{n+2} & -10r_{n+1} \\ r_{n+1} & -10r_n \end{bmatrix} = R^{n+1} .
\end{aligned}$$

Na discussão anterior, temos o próximo resultado.

Proposição 6. *Para todo natural* $n \geq 1$, *a matriz repunidade* $R^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}$ *satisfaz a relação de recorrência*

$$R^{n+1} = (11I_2) \cdot R^n - (10I_2) \cdot R^{n-1} . \tag{2}$$

A seguir mostramos uma relação recursiva para as potências da matriz repunidade inversa, a saber temos:

Proposição 7. *Para todo natural* $n \geq 1$, *a matriz repunidade* $R^{-n} = \frac{1}{10^n}\begin{bmatrix} -10r_{n-1} & -r_n \\ 10r_n & r_{n+1} \end{bmatrix}$ *satisfaz a relação de recorrência*

$$R^{-(n+1)} = \left(\frac{11}{10}\right) \cdot R^{-n} - \left(\frac{1}{10}\right) \cdot R^{-(n+1)} . \tag{3}$$

Demonstração. Segue da Proposição 5 que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{11}{10}\right)\cdot R^{-n}-\left(\frac{1}{10}\right)\cdot R^{-(n+1)}\\
=&\frac{1}{10^n}\begin{bmatrix}\frac{11}{10} & 0\\ 0 & \frac{11}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10r_{n-1} & -r_n\\ 10r_n & r_{n+1}\end{bmatrix}-\frac{1}{10^{n-1}}\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & 0\\ 0 & \frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10r_{n-2} & -r_{n-1}\\ 10r_{n-1} & r_n\end{bmatrix}\\
=&\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10r_{n-1} & -r_n\\ 10r_n & r_{n+1}\end{bmatrix}-\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10r_{n-2} & -r_{n-1}\\ 10r_{n-1} & r_n\end{bmatrix}\\
=&\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}-110r_{n-1} & -11r_n\\ 110r_n & 11r_{n+1}\end{bmatrix}-\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}-100r_{n-2} & -10r_{n-1}\\ 100r_{n-1} & -10r_n\end{bmatrix}\\
=&\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}-110r_{n-1}+100r_{n-2} & -11r_n+10r_{n-1}\\ -110r_n+100r_{n-1} & 11r_{n+1}-10r_n\end{bmatrix}\\
=&\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}-10(11r_{n-1}-10r_{n-2}) & -(11r_n-10r_{n-1})\\ 10(11r_n+10r_{n-1}) & r_{n+2}\end{bmatrix}\\
=&\frac{1}{10^{n+1}}\begin{bmatrix}-10r_n & -r_{n+1}\\ 10r_{n+1} & r_{n+2}\end{bmatrix}=R^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

□

Segundo Morgado e Carvalho (2012) ou Rosen (2007), se a equação característica de recorrência for $x^2+px+q=0$ tiver raízes distintas x_1 e x_2, então as sequências $a_n=c_1(x_1)^n+c_2(x_2)^n$, com $n\in\mathbb{N}$, e $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, são soluções de

$$x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=0,\ \text{para } n\in\mathbb{N}, n\geq 1\ .$$

Veja que a relação de recorrência (2) da sequência matriz repunidade tem como equação característica $r^2-11r+10=0$ e suas raízes reais são $r_1=10$ e $r_2=1$. Temos que uma solução geral para a Equação (2) é da forma $R^n=A(10)^n+B(1)^n$, em que A e B são matrizes de ordem 2 à determinar.

Vamos determinar as matrizes $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$, considerando que $R^0=I_2$ e $R^1=R$, e obtemos o sistema,

$$\begin{cases}I_2=A+B\\ R=10A+B\ .\end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A=\begin{bmatrix}\frac{10}{9} & -\frac{10}{9}\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{10}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9}\end{bmatrix}$. Assim solução geral da Equação (2) é

$$\begin{aligned}
R^n &= A(10)^n+B(1)^n\\
&= \begin{bmatrix}\frac{10}{9} & -\frac{10}{9}\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10^n & 0\\ 0 & 10^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{9} & \frac{10}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0\\ 0 & 1^n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{10^{n+1}}{9}-\frac{1}{9} & -\frac{10^{n+1}}{9}+\frac{10}{9}\\ \frac{10^n}{9}-\frac{1}{9} & -\frac{10^n}{9}+\frac{10}{9}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então acabamos de determinar

Proposição 8 (Fórmula de Binet)**.** *Para todo $n \geq 1$, temos*

$$R^n = \begin{bmatrix} \frac{10^{n+1}-1}{9} & -10\left(\frac{10^n-1}{9}\right) \\ \frac{10^n-1}{9} & -10\left(\frac{10^{n-1}-1}{9}\right) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

A Equação (4) apresenta a clássica fórmula de Binet para a sequência matriz repunidade $\{R^n\}_{n>0}$. Sendo assim, de maneira similar o nosso próximo resultado apresenta essa representação clássica para $\{R^n\}_{n<0}$, uma extensão da sequência matriz repunidade com índice negativo.

Proposição 9 (Fórmula de Binet)**.** *Para todo $n \geq 1$, temos*

$$R^{-n} = \begin{bmatrix} -10\left(\frac{10^{n-1}-1}{9\cdot 10^{n-1}}\right) & -\frac{10^n-1}{9\cdot 10^n} \\ -10\left(\frac{10^n-1}{9\cdot 10^n}\right) & -\frac{10^{n+1}-1}{9\cdot 10^{n+1}} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Demonstração. Uma vez que a recorrência (3), que descreve a sequência matriz repunidade com índices negativos, possui a equação característica $r^2 - \frac{11}{10}r + \frac{1}{10}$, cujas raízes reais são $r_1 = \frac{1}{10}$ e $r_2 = 1$, assim uma solução para a Equação (3) segue a forma $R^{-n} = A\left(\frac{1}{10}\right)^n + B(1)^n$, em que A e B são matrizes de ordem 2 à serem determinadas.

De fato, para determinar as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, podemos utilizar a solução do sistema obtido ao tomar R^{-1} e R^{-2} conforme o Exemplo 3, isto é:

$$\begin{cases} R^{-1} = \dfrac{1}{10}A + B \\ R^{-2} = \dfrac{1}{100}A + B\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$. Portanto, a solução geral da Equação (3) é expressa por

$$\begin{aligned} R^{-n} =& A\left(\frac{1}{10}\right)^n + B(1)^n \\ =& \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ =& \begin{bmatrix} \frac{10}{9\cdot 10^n} - \frac{1}{9} & \frac{1}{9\cdot 10^n} - \frac{1}{9} \\ \frac{10}{9\cdot 10^n} - \frac{10}{9} & -\frac{1}{9\cdot 10^n} + \frac{10}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Disto obtemos o resultado desejado. □

3 Algumas propriedades e identidades

O seguinte resultado auxiliar pode ser encontrado em Santos e Costa (2024b).

Lema 10. *Para quaisquer m, n naturais, temos $r_m r_{n+1} - 10 r_{m-1} r_n = r_{m+n}$.*

Em geral dadas duas matrizes A e B, nem sempre $A \cdot B = B \cdot A$. No entanto veremos que tal fato ocorre com as matrizes repunidades.

Proposição 11. *Para quaisquer m, n naturais, temos que $R^m \cdot R^n = R^n \cdot R^m$.*

Demonstração. Pela Proposição 1, temos que

$$\begin{aligned}
R^m \cdot R^n &= \begin{bmatrix} r_{m+1} & -10r_m \\ r_m & -10r_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{m+1} \cdot r_{n+1} + (-10r_m) \cdot r_n & r_{m+1} \cdot (-10r_n) + (-10r_m) \cdot (-10r_{n-1}) \\ r_m \cdot r_{n+1} + (-10r_{m-1}) \cdot r_n & r_m \cdot (-10r_n) + (-10r_{m-1}) \cdot (-10r_{n-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{m+1} \cdot r_{n+1} - 10r_m \cdot r_n & -10(r_{m+1} \cdot r_n - 10r_m \cdot r_{n-1} \\ r_m \cdot r_{n+1} - 10r_{m-1} \cdot r_n & -10(r_m \cdot r_n - 10r_{m-1} \cdot r_{n-1}) \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Agora, fazendo uso do Lema 10

$$R^m \cdot R^n = \begin{bmatrix} r_{(m+1)+n} & -10r_{(m+1)+(n-1)} \\ r_{m+n} & -10r_{m+(n-1)} \end{bmatrix} . \tag{6}$$

Usando a associatividade e comutatividade nos inteiros, na Equação (6), obtemos que:

$$\begin{aligned}
R^m \cdot R^n &= \begin{bmatrix} r_{(n+1)+m} & -10r_{(n+1)+(m-1)} \\ r_{n+m} & -10r_{n+(m-1)} \end{bmatrix} \\
&= R^n \cdot R^m .
\end{aligned}$$

□

Proposição 12. *Para quaisquer m, n naturais, temos que $R^m \cdot R^n = \begin{bmatrix} r_{m+n+1} & -10r_{m+n} \\ r_{m+n} & -10r_{m+n-1} \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Segue diretamente da Equação 6. □

Corolário 13. *Para qualquer m natural, temos que $R^m \cdot R^{m+1} = \begin{bmatrix} r_{2m+2} & -10r_{2m+1} \\ r_{2m+1} & -10r_{2m} \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Basta fazer $n = m + 1$. □

De igual maneira para o índice negativo.

Proposição 14. *Para quaisquer m, n naturais, temos que $R^{-m} \cdot R^{-n} = R^{-n} \cdot R^{-m}$.*

Demonstração. Combinando as Proposições 5 e 11 obtemos que

$$\begin{aligned}
R^{-m} \cdot R^{-n} &= \frac{1}{10^m} \begin{bmatrix} -10.r_{m-1} & 10.r_m \\ -r_m & r_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10^n} \begin{bmatrix} -10.r_{n-1} & 10.r_n \\ -r_n & r_{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{10^{m+n}} \begin{bmatrix} -10r_{m-1} \cdot (-10r_{n-1}) + 10r_m \cdot (-r_n) & -10r_{m-1} \cdot 10r_n + 10r_m \cdot r_{n+1} \\ -r_m \cdot (-10r_{n-1}) + r_{m+1} \cdot (-r_n) & -r_m \cdot 10r_n + r_{m+1} \cdot r_{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{10^{n+m}} \begin{bmatrix} -10r_{n-1} \cdot (-10r_{m-1}) + 10r_n \cdot (-r_m) & -10r_{n-1} \cdot 10r_m + 10r_n \cdot r_{m+1} \\ -r_n \cdot (-10r_{m-1}) + r_{n+1} \cdot (-r_m) & -r_n \cdot 10r_m + r_{n+1}r_{m+1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{10^n} \begin{bmatrix} -10.r_{n-1} & 10.r_n \\ -r_n & r_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10^m} \begin{bmatrix} -10.r_{m-1} & 10.r_m \\ -r_m & r_{m+1} \end{bmatrix} \\
&= R^{-n} \cdot R^{-m} .
\end{aligned}$$

□

Em geral obtemos os resultados para índice negativo, basta combinar as Proposições 5, 11 e 14, e para não ficar muito enfadonho, estes serão omitidos aqui.

Obtemos os dois próximos resultados acerca da sequência numérica repunidade aplicando indução em n, que nos será um resultado auxiliar, no entanto apresentaremos apenas a demonstração do primeiro.

Lema 15. *Para todo $n \geq 1$ tem-se que $r_{n+1} - 10r_{n-1} = 10^n + 1$.*

Demonstração. Como $11 - 0 = 10 + 1$, a afirmação é válida para $n = 1$.

Suponhamos que para algum $n > 1$, a sentença $r_{n+1} - 10r_{n-1} = 10^n + 1$ é válida. Devemos mostrar a validade para $n + 1$. Com

$$\begin{aligned} r_{n+2} &\overset{(1)}{=} 11r_{n+1} - 10r_n \\ &= r_{n+1} + 10r_{n+1} - 10r_n \\ &\overset{(1)}{=} (11r_n - 10r_{n-1}) + 10r_{n+1} - 10r_n \\ &= 10r_n + r_n - 10r_{n-1} + 10r_{n+1} - 10r_n \\ &= 10r_n + (r_{n+1} - 10r_{n-1}) + (9r_{n+1} - 9r_n) \ , \end{aligned}$$

equivalentemente

$$r_{n+2} - 10r_n = (r_{n+1} - 10r_{n-1}) + 9(r_{n+1} - r_n) \ . \tag{7}$$

Agora, no lado direito da Equação (7) usamos a hipótese de indução na primeira parcela e o Lema 25 na segunda parcela. Assim

$$\begin{aligned} r_{n+2} - 10r_n &= (10^n + 1) + 9 \cdot 10^n \\ &= 10^{n+1} + 1 \ . \end{aligned}$$

Isso garante a validade da sentença para todo $n + 1$. □

Lema 16. *Para todo $n \geq 1$ tem-se que $r_{n+1}^2 - 10r_n^2 = r_{n+2}$.*

Para a sequência matricial repunidade vale que:

Proposição 17. *Sejam m, n naturais, então $R^m R^{n+1} - 10R^{m-1}R^n = \begin{bmatrix} 10^{m+n+1} + 1 & -10(10^{m+n} + 1) \\ 10^{m+n} + 1 & -10(10^{m+n-1} + 1) \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Pela Proposição 12, temos que

$$\begin{aligned} R^m R^{n+1} - 10R^{m-1}R^n &= \begin{bmatrix} r_{m+n+2} & -10r_{m+n+1} \\ r_{m+n+1} & -10r_{m+n} \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} r_{m+n} & -10r_{m+n-1} \\ r_{m+n-1} & -10r_{m+n-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{m+n+2} - 10r_{m+n} & -10(r_{m+n+1} - 10r_{m+n-1}) \\ r_{m+n+1} - 10r_{m+n-1} & -10(r_{m+n} - 10r_{m+n-2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora fazendo uso do Lema 15, obtemos o resultado. □

Proposição 18. *Para todo $n \geq 1$ tem-se que $(R^{n+1})^2 - 10(R^n)^2 = \begin{bmatrix} 10^{2n+2} + 1 & -10(10^{2n+1} + 1) \\ 10^{2n+1} + 1 & -10(10^{2n} + 1) \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Usando a Proposição 12, obtemos que:

$$\begin{aligned} (R^{n+1})^2 - 10(R^n)^2 &= \begin{bmatrix} r_{2n+3} & -10r_{2n+2} \\ r_{2n+2} & -10r_{2n+1} \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} r_{2n+1} & -10r_{2n} \\ r_{2n} & -10r_{2n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{2n+3} - 10r_{2n+1} & -10(r_{2n+2} - 10r_{2n}) \\ r_{2n+2} - 10r_{2n} & -10(r_{2n+1} - r_{2n-1}) \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

Agora fazendo uso novamente do Lema 15, obtemos o resultado. □

4 As clássicas identidades

Nesta seção, apresentamos algumas identidades clássicas para a sequência matricial repunidade, especificamente as identidades de D'Ocagne, Catalan, Cassini e Tagiuri-Vajda. Como consequência das Proposições 11 e 12, veremos que todas essas identidades resultam na matriz nula de ordem 2. De forma surpreendente, não existe similaridade entre estas (versão matricial) e as identidades da sequência repunidade numérica usual, apresentada em Santos e Costa (2023), ou em Santos e Costa (2024a).

Exemplo 19. *Verificaremos que* $R^8 \cdot R^7 = R^7 \cdot R^9$*. No primeiro lado da igualdade, temos:*

$$
\begin{aligned}
& R^8 \cdot R^7 \\
= & \begin{bmatrix} 111111111 & -111111110 \\ 11111111 & -11111110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11111111 & -11111110 \\ 1111111 & -1111110 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 111111111 \cdot (11111111) - 111111110 \cdot (1111111) & 111111111 \cdot (-11111110) - 11111110 \cdot (-1111110) \\ 11111111 \cdot (11111111) - 11111110 \cdot (1111111) & 11111111 \cdot (-11111110) - 11111110 \cdot (-1111110) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1111111111111111 & -1111111111111110 \\ 111111111111111 & 111111111111110 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora façamos

$$
\begin{aligned}
& R^9 \cdot R^6 \\
= & \begin{bmatrix} 1111111111 & -1111111110 \\ 111111111 & -111111110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1111111 & -1111110 \\ 111111 & -111110 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1111111111 \cdot (1111111) - 1111111110 \cdot (111111) & 1111111111 \cdot (-1111110) - 1111111110 \cdot (-111110) \\ 111111111 \cdot (1111111) - 111111110 \cdot (111111) & 111111111 \cdot (-1111110) - 111111110 \cdot (-111110) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1111111111111111 & -1111111111111110 \\ 111111111111111 & -111111111111110 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Perceba que em ambos os casos, $R^8 \cdot R^7$ *e* $R^9 \cdot R^6$*, obtemos o mesmo resultado.*

No caso geral temos a identidade de d'Ocagne.

Proposição 20 (Identidade de d'Ocagne)**.** *Sejam* m, n *naturais quaisquer. Para* $m \geq n$ *tem-se*

$$R^m R^{n+1} - R^{m+1} R^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Demonstração. Veja que

$$R^m R^{n+1} = \begin{bmatrix} r_{m+n+2} & -10r_{m+n+1} \\ r_{m+n+1} & -10r_{m+n} \end{bmatrix} = R^{m+1} R^n .$$

□

Exemplo 21. *Veremos que* $R^3 \cdot R^7 = R^{5-2} \cdot R^{5+2} = (R^5)^2$*. Veja que:*

$$\begin{aligned}
& A^3 \cdot A^7 \\
= & \begin{bmatrix} 1111 & -1110 \\ 111 & -110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11111111 & -11111110 \\ 1111111 & -1111110 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 1111 \cdot (11111111) - 1110 \cdot (1111111) & 1111 \cdot (-11111110) - 1110 \cdot (-1111110) \\ 111 \cdot (11111111) - 110 \cdot (1111111) & 111 \cdot (-11111110) - 110 \cdot (-1111110) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 11111111111 & -11111111110 \\ \\ 1111111111 & -1111111110 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& (A^5)^2 \\
= & \begin{bmatrix} 111111 & -111110 \\ 11111 & -11110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 111111 & -111110 \\ 11111 & -11110 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 111111 \cdot (111111) - 111110 \cdot (11111) & 111111 \cdot (-111110) - 111110 \cdot (-11110) \\ \\ 11111 \cdot (111111) - 11110 \cdot (11111) & 11111 \cdot (-111110) - 11110 \cdot (-11110) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 11111111111 & -11111111110 \\ 1111111111 & -1111111110 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

No caso geral temos a Identidade de Catalan.

Proposição 22 (Identidade de Catalan)**.** *Sejam* m, n *naturais quaisquer. Para* $m \geq n$ *tem-se*

$$(R^m)^2 - R^{m-n}R^{m+n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned}
(R^m)^2 - R^{m-n}R^{m+n} &= \begin{bmatrix} r_{m+m+1} & -10r_{m+m} \\ r_{m+m} & -10r_{m+m-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{(m-n)+(m+n)+1} & -10r_{(m-n)+(m+n)} \\ r_{(m-n)+(m+n)} & -10r_{(m-n)+(m+n)-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_{2m+1} & -10r_{2m} \\ r_{2m} & -10r_{2m-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{2m+1} & -10r_{2m} \\ r_{2m} & -10r_{2m-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Segue diretamente da Proposição 22, basta tomar $n = 1$, que:

Corolário 23 (Identidade de Cassini)**.** *Para todo* $m \geq 1$*, tem-se* $(R^m)^2 - R^{m+1}R^{m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De igual maneira obtemos que

Proposição 24 (Identidade de Tagiuri-Vajda)**.** *Para* n, k, r *inteiros,* $R^{n+k}R^{n+r} - R^nR^{n+k+r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5 A aplicação linear matriz repunidade

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, lembramos que o polinômio de grau n dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado polinômio característico da matriz A, em que I é a matriz identidade de ordem n. As raízes do polinômio característico, se existirem, satisfazem a relação $AX = \lambda X$, sendo X um vetor não nulo. Neste caso, o escalar λ é denominado um autovalor e o vetor $X \neq 0$ de autovetor; detalhes adicionais podem ser consultados em Hoffman e Kunze (1979) ou Lax (2007).

Antes apresentamos alguns resultados auxiliares acerca da diferença de termos de repunidades. O primeiro é bastante simples e de verificação imediata, e pode ser encontrado em Toumasis (1994).

Lema 25. *Para todo $n \geq 1$ tem-se que $r_{n+1} - r_n = 10^n$.*

O lema a seguir é conhecido na literatura como Identidade de Cassini para a sequência repunidade, e pode ser encontrado em Santos e Costa (2023).

Lema 26. *Para todo $n \geq 1$ tem-se que $r_n^2 - r_{n+1}r_{n-1} = 10^{n-1}$.*

O próximo resultado estabelece os autovalores associados à matriz R^n.

Teorema 27. *Para todo $n \geq 1$, os autovalores associados à matriz R^n são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10^n$.*

Demonstração. Segue da Proposição 1 que para todo natural $n \geq 1$, tem-se

$$R^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico associado a matriz R^n é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} r_{n+1} - \lambda & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (r_{n+1} - \lambda)(-10r_{n-1} - \lambda) - (-10r_n)r_n \\ &= \lambda^2 - (r_{n+1} - 10r_{n-1})\lambda + 10(r_n^2 - r_{n+1}r_{n-1}) \end{aligned}$$

Segue do Lema 15 que $r_{n+1} - 10r_{n-1} = 10^n + 1$ e do Lema 26 que $r_n^2 - r_{n+1}r_{n-1} = 10^{n-1}$. Assim

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (10^n + 1)\lambda + 10^n \ .$$

Disto obtemos que as raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 10^n$. □

Exemplo 28. *Considere o operador linear em $\mathbb{R}^2$ dado por $R = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Segue do Teorema 27 que os autovalores são $\lambda = 1$ e $\lambda = 10$. Um cálculo direto mostra que os autovalores associado à $\lambda = 1$ são o vetores do tipo $v_1 = (x, x)$, enquanto os autovetores associado à $\lambda = 10$ são os vetores do tipo $v_{10} = (10x, x)$, com $x \in \mathbb{R}$.*

Proposição 29. *Para todo $n \geq 1$, os autovetores associados à matriz R^n são $v_1 = (x, x)$ e $v_2 = (10x, x)$.*

Demonstração. Segue da Proposição 1 que para todo natural $n \geq 1$, tem-se

$$R^n = \begin{bmatrix} r_{n+1} & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} \end{bmatrix} .$$

Dessa forma os autovetores associados são da forma $(R^n - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} - \lambda & -10r_n \\ r_n & -10r_{n-1} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Donde obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (r_{n+1} - \lambda)x - 10r_n y = 0 \\ r_n x - (10r_{n-1} - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Considerando $\lambda_1 = 1$ e resolvendo o sistema, obtemos $v_1 = (x, x)$. O caso $\lambda_2 = 10^n$ segue de modo análogo. □

Exemplo 30. *O polinômio característico de* $R^{-2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{11}{10} \\ -\frac{11}{100} & \frac{111}{100} \end{bmatrix}$ *é*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda & \frac{11}{10} \\ -\frac{11}{100} & \frac{111}{100} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{10} - \lambda\right)\left(\frac{111}{100} - \lambda\right) - \left(-\frac{11}{100} \cdot \frac{11}{10}\right) \\ &= \lambda^2 - \frac{101}{100}\lambda + \frac{1}{100} \\ &= (10^2\lambda - 1)(\lambda - 1) . \end{aligned}$$

De forma que as raízes da equação polinomial $(10^2\lambda - 1)(\lambda - 1)$ *são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = \frac{1}{10^2}$.

De modo similar ao Teorema 27, como no exemplo anterior, temos:

Proposição 31. *Para todo* $n \geq 1$*, os autovalores associados à matriz* R^{-n} *são* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = \frac{1}{10^n}$.

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado que generaliza a Proposição 29 para a matriz inversa de R^n, a saber tem-se

Proposição 32. *Para todo* $n \geq 1$*, os autovetores associados à matriz* R^{-n} *são* $v_1 = (x, x)$ *e* $v_2 = (\frac{1}{10}x, x)$.

Demonstração. Análoga a Proposição 29. □

6 Considerações

Este estudo oferece uma análise das sequências numérica e matricial repunidade, ampliamos a compreensão das sequências repunidade introduzindo a matriz repunidade, sua inversa e a fórmula de Binet para as recorrências associadas. Esperamos estar fornecendo ferramentas fundamentais para compreender as propriedades e comportamentos da sequência. Adentramos nas propriedades aritméticas tanto das sequências numéricas quanto matriciais repunidade. Ao examinar essas propriedades, conseguimos obter resultados significativos acerca das características fundamentais dos números e matrizes repunidade, abrindo portas para investigações mais detalhadas sobre sua natureza matemática e inter-relações. Por fim, exploramos a matriz repunidade como uma transformação linear no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, oferecendo uma motivação enraizada em álgebra linear.

Em trabalhos futuros focaremos em uma abordagem que forneça uma interpretação geométrica da matriz repunidade, lançando mais luz sobre seu comportamento como uma transformação linear e suas implicações na compreensão da estrutura subjacente da sequência repunidade. Por isso, essas investigações fornecem uma base sólida para pesquisas subsequentes, aplicações em diferentes contextos matemáticos e no ensino da mesma.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.

7 Bibliografia

BEILER, Albert H. **Recreations in the theory of numbers**: the queen of mathematics entertains. New York: Dover Publications, 1964.

CAHILL, Nathan D.; D'ERRICO, John R.; NARAYAN, Darren A.; NARAYAN, Jack Y. Fibonacci determinants. **The College Mathematics Journal**, v. 33, n. 3, p. 221-225, 2002. Disponível em: https://doi.org/10.1080/07468342.2002.11921945. Acesso em: 30 jun. 2024.

CATARINO, Paula; CAMPOS, Helena; VASCO, Paulo. On the Mersenne sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 46, p. 37-53, 2016.

CERDA, Gamaliel. Matrix methods in Horadam sequences. **Boletín de Matemáticas**, v. 19, n. 2, p. 97-106, 2012.

COSTA, Eudes A.; SANTOS, Douglas C.; MONTEIRO, Francival S.; SOUZA, Vitor M. A. On the repunit sequence at negative indices. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, n. 1, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.5281/zenodo.11062161. Acesso em: 30 jun. 2024.

FALCON, Sergio. On the generating matrices of the K-Fibonacci numbers. **Proyecciones Journal of Mathematics**, v. 32, n. 4, p. 347-357, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.4067/S0716-09172013000400004. Acesso em: 30 jun. 2024.

HOFFMANN, Kenneth; KUNZE, Ray Alden. **Álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

JAROMA, John H. Factoring generalized repunits. **Irish Mathematical Society**, n. 59, p. 29-35, 2007.

LAX, Peter D. **Linear algebra and its applications**. 2nd ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2007.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT; 12).

ROSEN, Kenneth H. **Discrete mathematics and its applications**. 2nd ed. Boston: McGraw-Hill Education, 2007.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. A note on repunit number sequence. **Intermaths**, v. 5, n. 1, p. 54-66, 2024a. Disponível em:https://doi.org/10.22481/intermaths.v5i1.14922. Acesso em: 30 jun. 2024.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. Números repunidades e a representação matricial. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 9, n. 1, p. 81-96, 2024b. Disponível em: https://doi.org/10.34179/revisem.v9i1.19491. Acesso em: 30 jun. 2024.

SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. Um passeio pela sequência repunidade. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 23, n. 1, p. 241–254, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.21167/cqdv23n1ic2023241254. Acesso em: 30 jun. 2024.

SLOANE, Neil J. A. **The on-line encyclopedia of integer sequences.** Sequence A002275. *[S. l.]*: The OEIS Foundation Inc., 2024. Disponível em: http://oeis.org/A002275. Acesso em: 30 jun. 2024.

TOUMASIS, Charalampos. Exploring repunits. **School Science and Mathematics**, v. 94, n.3, p.142-145, 1994.

YATES, Samuel. **Repunits and repetends**. Boynton Beach: Star Publishing Co., 1982.