



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Jorge Andrés Julca Avila

Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Câmpus Santo Antônio (CSA), São João del-Rei, avila_jaj@ufs.edu.br

Éder Luis Tostes

Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Santo Antônio (CSA), São João del-Rei

Gabriel Silva de Andrade

Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Santo Antônio (CSA), São João del-Rei

Polinômios e números primos: explorando padrões através de cálculos computacionais e a Conjectura 41

Polynomials and prime numbers: exploring patterns through computational calculations and Conjecture 41

Resumo

Hardy e Littlewood, ao longo de suas notáveis carreiras, propuseram várias conjecturas matemáticas. Em particular, a Conjectura F de Hardy-Littlewood, formulada em 1922, sugere que certas funções quadráticas geram infinitos números primos e estabelece uma relação assintótica para a função de contagem de números primos. O polinômio de segundo grau, $v_{41}(x) = x^2 + 81x + 41^2$, derivado do n -quadrado Zeta representa uma aplicação específica da Conjectura F. Neste trabalho, propomos uma fórmula assintótica para a função contagem de primos-41 e formulamos a Conjectura 41, que postula que “A função de contagem de primos-41 é assintoticamente igual a $\frac{x}{A \ln x + B}$ ”. Se a Conjectura 41 for verdadeira, o polinômio em questão gerará infinitos números primos. Além disso, apresentamos abordagens para a demonstração da conjectura, baseadas no Teorema do Número Primos, e resultados computacionais. **Palavras-chave:** Números Primos. n -quadrado Zeta. Polinômio $v_{41}(x)$. Conjectura F. Conjectura 41.

Abstract

Hardy and Littlewood, throughout their remarkable careers, proposed several mathematical conjectures. In particular, Hardy-Littlewood’s Conjecture F, formulated in 1922, suggests that certain quadratic functions generate infinitely many prime numbers and establishes an asymptotic relationship for the prime counting function. The quadratic polynomial $v_{41}(x) = x^2 + 81x + 41^2$, derived from the n -square Zeta, represents a specific application of Conjecture F. In this work, we propose an asymptotic formula for the 41-prime counting function and formulate Conjecture 41, which postulates that “The 41-prime counting function is asymptotically equal to $\frac{x}{A \ln x + B}$ ”. If Conjecture 41 is true, the polynomial in question will generate infinitely many prime numbers. Furthermore, we present approaches for proving the conjecture based on the Prime Number Theorem, along with computational results. **Keywords:** Prime Numbers. n -square Zeta. Polynomial $v_{41}(x)$. Conjecture F. Conjecture 41.





1 Introdução

O estudo dos números primos é um caminho fascinante e extenso, que poucos matemáticos se aventuram a explorar. Dentre as diversas vertentes que este campo oferece, alguns preferem investigar a distribuição dos números primos, enquanto outros se dedicam aos testes de primalidade, à criptografia, aos polinômios que geram números primos, ou ainda à questão da infinitude dos números primos. Para exemplos dessas vertentes, consulte [1].

Um dos problemas interessantes da infinitude dos números primos é o Teorema de Dirichlet sobre progressão aritmética. Este teorema estabelece que “A função linear $f(n) = a + bn$ de variável inteira positiva e com coeficientes inteiros positivos, gera infinitos números primos, desde que a e b sejam primos relativos.”

Legendre escreveu um capítulo intitulado: “Recherches d’analyse indéterminée”, para o livro [2], p. 465-559, publicado em 1785. Nele, apresenta a formulação do Teorema de Dirichlet, e destaca a dificuldade de sua demonstração. No entanto, a demonstração foi realizada apenas em 1837 por Dirichlet utilizando principalmente a teoria das L -funções.

Em 1854, dezessete anos mais tarde, o matemático russo Bunyakovsky apresentou sua conjectura, veja [3] e ([4], p. 145), que afirma: “Qualquer função polinomial de grau $m > 1$ gera infinitos números primos, desde que sejam satisfeitas as seguintes duas condições: (i) Os coeficientes da polinomial devem verificar que o $\text{mdc}(\text{coeficientes}) = 1$. (ii) A polinomial tem que ser irredutível, ou seja, não deve ser divisível por nenhuma outra polinomial de grau d com $0 \leq d < m$.”

Em 1922, Hardy e Littlewood apresentaram sua Conjectura F ([5], p. 48) que afirma: “A função quadrática $f(n) = an^2 + bn + c$, de variável inteira positiva e com coeficientes inteiros positivos, gera infinitos números primos, desde que a , b e c sejam primos relativos”. Além disso, eles forneceram uma fórmula assintótica para a função contagem de primos. Embora esta conjectura seja um caso particular da Conjectura de Bunyakovsky quando $m = 2$, ela vai além, pois expressa uma fórmula assintótica análoga à apresentada pelo Teorema dos Números Primos.

O n -quadrado Zeta [6] é um novo arranjo, em formato quadrado, dos números naturais, desenvolvido para identificar padrões especiais na distribuição dos números primos. Ele nos fornece o conjunto dos primos-41, denotado por \mathbb{V}_{41} . Esses números primos são gerados pela função polinomial de segundo grau $v_{41}(k) = k^2 + 81k + 41^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Vale destacar que esse polinômio foi obtido pela primeira vez nesse artigo. O desafio atual é determinar se esse conjunto contém infinitos números primos, inserindo-se assim na discussão sobre a infinitude dos números primos.

Neste estudo, propomos uma fórmula assintótica para a função contagem de primos-41, $\pi_{41}(x)$, e formulamos a Conjectura 41. Esta conjectura postula que $\pi_{41}(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B}$. Se confirmada, essa conjectura implicará na infinitude do conjunto \mathbb{V}_{41} . Adicionalmente, apresentamos possíveis abordagens para a demonstração da conjectura, baseadas na prova do Teorema dos Números Primos, além de resultados computacionais, exibidos em tabelas, que comparam as fórmulas assintóticas das Conjecturas 41 e F de Hardy-Littlewood.

2 Alguns conceitos e resultados preliminares

Nessa seção, apresentaremos os conceitos e resultados preliminares essenciais para o desenvolvimento das próximas seções. Parte do conteúdo foi baseada no trabalho de [6].



Os conjuntos dos Números Naturais e dos Números Inteiros, respectivamente,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos Números Primos: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$

A sequência ordenada de números primos é dada por: $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, onde $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$

Definição 1 (Igualdade assintótica) *Sejam f e g funções reais de variável real, com $g(x) \neq 0$. Então, $f(x)$ é assintoticamente igual a $g(x)$, denotamos por $f(x) \sim g(x)$, se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$.*

Definição 2 (“Grande O”) *Sejam f e g funções reais de variável real. $f(x)$ é “grande O” de $h(x)$, denotamos por $f(x) = O(h(x))$, se $\exists C > 0$ e um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq C|h(x)|, \quad \forall x \geq x_0$$

Definição 3 (Função integral logarítmica) *Definimos*

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \tag{1}$$

Definição 4 (Função contagem de primos) *Para $x > 0$, definimos*

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}$$

onde $\#$ denota o cardinal de um conjunto.

Na Tabela 1 apresentamos alguns valores de $\pi(x)$, $x = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$. Na Figura 2 (fornecida por [6]) apresentamos o gráfico de $\pi(x)$ para $0 < x \leq 12$ e $0 < x \leq 100$.

Tabela 1: Função Contagem de Primos $\pi(x)$, $x = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$.

k	$x = 10^k$	$\pi(x)$
1	10	4
2	10^2	25
3	10^3	168
4	10^4	1.229
5	10^5	9.592
6	10^6	78.498
7	10^7	664.579
8	10^8	5.761.455
9	10^9	50.847.534

Fonte: Os autores (2024).

Teorema 5 (Teorema dos Números Primos (TNP))

$$\pi(x) \sim x/\ln x \tag{2}$$

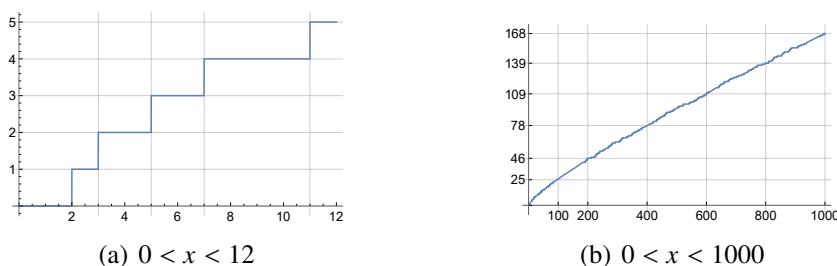


Figura 1: Gráfico da função contagem de primos $\pi(x)$.

Fonte: [6].

A igualdade assintótica (2) é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1 \quad (3)$$

A demonstração do TNP foi devido a Hadamard e de La Valle Poussin que em 1896 apresentaram, independentemente, uma prova **não elementar** do TNP.

Observação 6

O teorema acerca da infinitude dos números primos, provado por Euclides, é equivalente à seguinte expressão:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty \quad (4)$$

Notação 1 Para $p \in \mathbb{P}$, temos

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad (5)$$

A seguir definiremos a primeira e segunda função de Chebyshev, respectivamente.

Definição 7 (Primeira função de Chebyshev)

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \quad (6)$$

onde $p \in \mathbb{P}$.

Definição 8 (Segunda função de Chebyshev)

$$\psi(x) = \sum_{m \geq 1} \sum_{p^m \leq x} \ln p = \sum_{p^m \leq x} \ln p \quad (7)$$

onde $p \in \mathbb{P}$.

Definição 9 (Função de von Mangoldt)

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{se } n = p^m \text{ para algum } m \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{em outro lugar} \end{cases} \quad (8)$$

Observação 10

- (i) A relação entre a primeira e a segunda função de Chebyshev é dada pela expressão: $\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$.
- (ii) A segunda função de Chebyshev pode escrever-se em termos da função de von Mangoldt, i.e., $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.
- (iii) A prova elementar do TNP usa a Fórmula Assintótica de Selberg [7]:

$$\psi(x) \ln x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \ln x + O(x) \quad (9)$$

Definição 11 (Função geradora de números primos) Dizemos que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função geradora de números primos se $f(n) \in \mathbb{P}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 12 (Quantidade de primos de uma função geradora) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definimos a quantidade de primos de 1 até n de uma função geradora f , por

$$\pi_f(n) := \#\{p \in \mathbb{P} : f(m) = p, 1 \leq m \leq n\} \quad (10)$$

Exemplo 13 O polinômio de Euler: $p_E(n) = n^2 - n + 41$, $n = 1, 2, 3, \dots$ é uma função geradora de números primos. Na Tabela 2 apresentamos alguns valores da quantidade de primos da função geradora $p_E(n)$, $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Tabela 2: $\pi_{p_E}(n)$: Quantidade de primos de $p_E(n)$, $n = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 8$.

k	$n = 10^k$	$\pi_{p_E}(n)$
1	10	10
2	10 ²	86
3	10 ³	581
4	10 ⁴	4.149
5	10 ⁵	31.985
6	10 ⁶	261.081
7	10 ⁷	2.208.197
8	10 ⁸	19.132.652

Fonte: Os autores (2024).

Definição 14 (Densidade natural de um conjunto) Sejam A e B conjuntos, $B \subset A$. Definimos a densidade natural de B , por

$$\rho(B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : n \in A \cap B, n \leq x\}}{\#\{n : n \in A, n \leq x\}} \quad (11)$$

quando o limite existe.



Exemplo 15 Seja $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{P}$. A densidade natural dos números primos é

$$\rho(\mathbb{P}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad (12)$$

pois, pelo TNP, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/(x/\ln x) = 1$.

Definição 16 (A parte inteira da divisão de a por b) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Definimos,

$$\left[\frac{a}{b} \right] : \text{O maior inteiro não maior que } \frac{a}{b}. \quad (13)$$

Definição 17 (Símbolo de Legendre) Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{P}$.

$$\left(\frac{a}{p} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ é resíduo quadrático módulo } p \\ -1 & \text{se } a \text{ não é resíduo quadrático módulo } p \\ 0 & \text{se } a \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

Para encontrar uma fórmula mais eficiente para calcular o símbolo de Legendre, procedemos da seguinte forma. Conforme descrito por Hefez ([8], p. 248-249), temos que $\left(\frac{ab}{p} \right) = \left(\frac{a}{p} \right) \left(\frac{b}{p} \right)$ e também que $\left(\frac{-1}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Com base nisso, podemos deduzir que:

$$\left(\frac{-a}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{a}{p} \right) \quad (14)$$

A proposição a seguir foi extraída de Hefez ([8], p. 258).

Proposição 18 Sejam a e p números naturais ímpares e $p \in \mathbb{P}$ tal que $\text{mdc}(a, p) = 1$. Colocando $p' = \frac{p-1}{2}$ e $\kappa = \left[\frac{a}{p} \right] + \left[\frac{2a}{p} \right] + \dots + \left[\frac{p'a}{p} \right]$, temos que

$$\left(\frac{a}{p} \right) = (-1)^\kappa \quad (15)$$

De (14) e (15), chegamos à fórmula desejada:

$$\left(\frac{-a}{p} \right) = (-1)^{p'} (-1)^\kappa = (-1)^{p'+\kappa} \quad (16)$$

Exemplo 19 Sejam $a = -163$ e $p = 3$. Logo, $p' = \frac{3-1}{2} = 1$, e o valor de $\kappa = \left[\frac{163}{3} \right] = 54$. O valor de

$$\left(\frac{-163}{3} \right) = (-1)^{p'+\kappa} = -1$$

Exemplo 20 Sejam $a = -163$ e $p = 5$. Logo, $p' = \frac{5-1}{2} = 2$, e o valor de $\kappa = \left[\frac{163}{5} \right] + \left[\frac{2 \cdot 163}{5} \right] = 32 + 65 = 97$. O valor de

$$\left(\frac{-163}{5} \right) = (-1)^{p'+\kappa} = -1$$

Na Tabela 3 apresentamos alguns valores dos símbolos de Legendre $\left(\frac{-163}{p_i} \right)$, $p_i \in \mathbb{P}$, $i = 2, 3, \dots, 9$. Estes foram obtidos usando o *Software Mathematica*.

Tabela 3: Alguns valores dos símbolos de Legendre $\left(\frac{-163}{p_i}\right)$.

i	p_i	$\left(\frac{-163}{p_i}\right) = (-1)^{p'+\kappa}$
1	2	-
2	3	-1
3	5	-1
4	7	-1
5	11	-1
6	13	-1
7	17	-1
8	19	-1
9	23	-1

Fonte: Os autores (2024).

3 O Polinômio v_{41}

De acordo com [6], no n -quadrado Zeta (composto por n^2 casas, sendo cada casa um quadrado menor), encontramos o caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ (na Figura 3 apresentamos $\mathcal{V}_{41}(100)$). Como o valor de n limitava o comprimento desse caminho, os autores optaram por estudá-lo fora do n -quadrado Zeta. Assim, o caminho vertical \mathcal{V}_{41} , agora independente de n , é definido pelo seguinte conjunto:

$$\mathcal{V}_{41} = \{1763, 1847, 1933, 2021, 2111, \dots\} \quad (17)$$

Todo elemento de \mathcal{V}_{41} é gerado pelo polinômio $v_{41}(k)$, definido por

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Este polinômio de 2º grau é uma função geradora de números primos.

Observação 21

- (a) Note que o caminho vertical \mathcal{V}_{41} é a imagem do polinômio v_{41} , ou seja,

$$\mathcal{V}_{41} = \text{Im}(v_{41}) = \{v_{41}(k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Na Tabela 4, segunda coluna, mostramos os 10 primeiros valores de $v_{41}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

- (b) A quantidade de elementos, de 1 até k , de \mathcal{V}_{41} é k .

- (c) A solução da equação: $x^2 + 81x + 1681 = a$ é: $x = \frac{1}{2} \left(-81 - \sqrt{-163 + 4a} \right)$ e $x = \frac{1}{2} \left(-81 + \sqrt{-163 + 4a} \right)$. Obtém-se soluções reais e positivas $x > 0$ se $a > 41^2 = 1681$.

- (d) $v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681 = k^2 + 82k + 41^2 - k = (k + 41)^2 - k \leq (k + 41)^2$.

Definição 22 (Conjunto de números primos-41) Define-se o conjunto dos números primos-41 como $\mathcal{V}_{41} \cap \mathbb{P}$ e denotamos por,

$$\mathbb{V}_{41} = \{1847, 1933, 2111, 2203, 2297, 2393, 2591, \dots\}$$

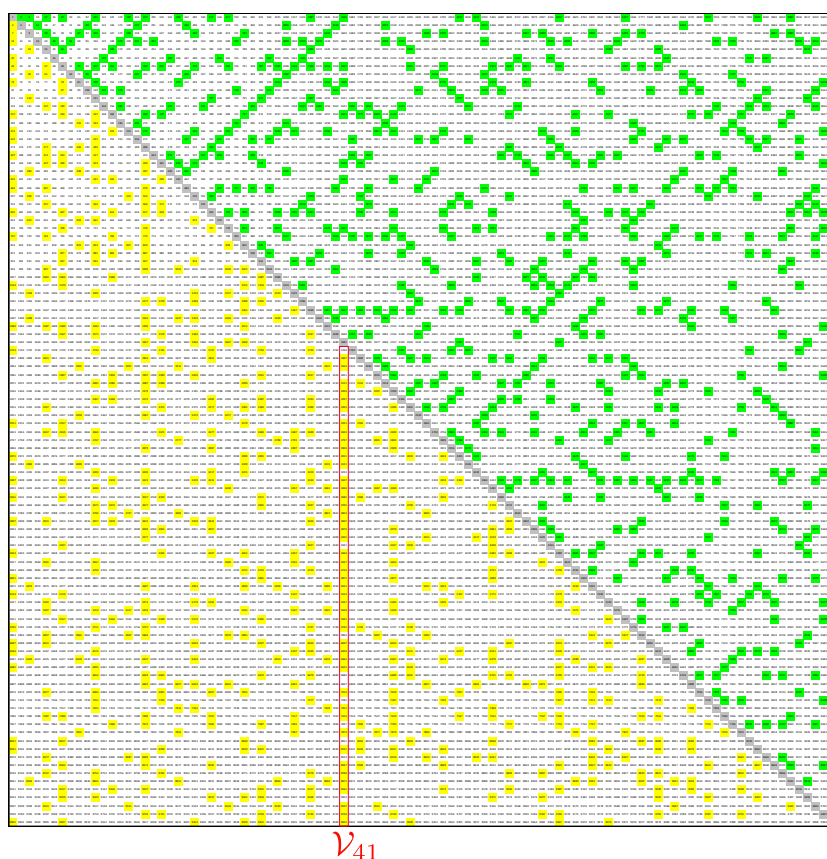


Figura 2: O caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(100)$ (de cor vermelho) dentro do 100–quadrado Zeta. As casas amarelas e verdes contêm números primos.

Fonte: Adaptado de [6].

A seqüência ordenada de números primos–41 é dada por: $\mathbb{V}_{41} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, onde $p_1 = 1847, p_2 = 1933, p_3 = 2111, \dots$ Na Tabela 4, terceira coluna, mostramos os 7 primeiros números primos–41.

Observação 23 $\mathbb{V}_{41} \subset \mathcal{V}$ e $\mathbb{V}_{41} \subset \mathbb{P}$.

Definição 24 (Função contagem de primos–41) Para todo $x \geq 1$, definimos

$$\pi_{41}(x) = \#\{p \in \mathbb{V}_{41} : p \leq v_{41}(x)\} \quad (19)$$

onde # denota o cardinal de um conjunto.

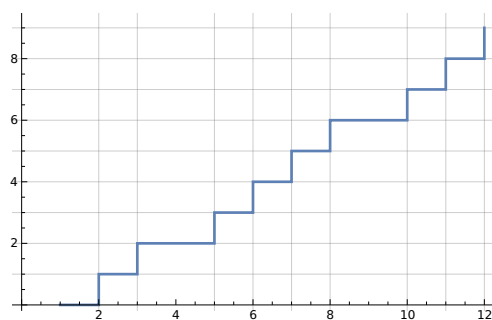
Alguns valores de $\pi_{41}(x)$ são: $\pi_{41}(1) = 0, \pi_{41}(1.5) = 0, \pi_{41}(2) = 1, \pi_{41}(2.2) = 1, \pi_{41}(3) = 2$. Na Figura 3 apresentamos o gráfico de $\pi_{41}(x)$ para $1 \leq x \leq 12$ e $1 \leq x \leq 1000$, respectivamente.

Densidade natural de \mathbb{V}_{41} . Para calcular a densidade natural de \mathbb{V}_{41} usaremos a Definição 14.

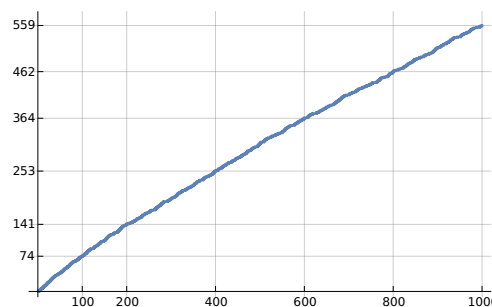
Tabela 4: Os 7 primeiros números primos de \mathbb{V}_{41} .

k	$v_{41}(k)$	$p_i \in \mathbb{V}_{41}$	$\pi_{41}(k)$
1	1763		0
2	1847	p_1	1
3	1933	p_2	2
4	2021		2
5	2111	p_3	3
6	2203	p_4	4
7	2297	p_5	5
8	2393	p_6	6
9	2491		6
10	2591	p_7	7
\vdots			

Fonte: Os autores (2024).



(a) $1 \leq x \leq 12$



(b) $1 \leq x \leq 1000$

Figura 3: Gráfico da Função Contagem de Primos, $\pi_{41}(x)$.

Fonte: Os autores (2024).

De Observação 23 temos que $\mathbb{V}_{41} \subset \mathcal{V}_{41}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : n \in \mathcal{V}_{41} \cap \mathbb{V}_{41}, n \leq x\}}{\#\{n : n \in \mathcal{V}_{41}, n \leq x\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : n \in \mathbb{V}_{41}, n \leq x\}}{\#\{n : n \in \mathbb{N}, n \leq x\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Definição 25 (Densidade discreta dos números primos–41) Seja $k \in \mathbb{N}$. Definimos a densidade discreta dos números primos–41, por

$$\rho_{41}(k) = \frac{\pi_{41}(k)}{k} \tag{21}$$

4 A Conjectura 41

Com o objetivo de estabelecer uma relação para a densidade dos números primos–41, optou-se por trabalhar com densidades calculadas em potências de 10.



Seja a função $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $x = T(y) = 10^y$, sendo que $y = \log x$. Assim, a composição de funções, $\tilde{\rho}_{41}$, é definida por

$$\tilde{\rho}_{41}(y) = (\rho_{41} \circ T)(y) = \rho_{41}[T(y)] = \rho_{41}(10^y) = \rho_{41}(x) \quad (22)$$

Por exemplo, $\tilde{\rho}_{41}(3) = \rho_{41}(10^3) = 0.559$.

4.1 Cálculos computacionais e a formulação da Conjectura 41

Considerando os cálculos computacionais da Tabela 5 (obtidos pela implementação de um pequeno código em Python), podemos observar que, na última coluna, especialmente nas três últimas linhas, as diferenças dos inversos das densidades $\tilde{\rho}_{41}$ podem ser aproximadas por $\ln 2$, ou seja,

Tabela 5: Padrão da diferença dos inversos das densidades $\tilde{\rho}_{41}$.

y	10^y	$\pi_{41}(10^y)$	$\tilde{\rho}_{41}(y)$	$\frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y)}$	$\frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y)} - \frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y-1)}$
1	10	7	0,7	1,428571429	
2	10^2	74	0,74	1,351351351	-0,077220077
3	10^3	559	0,559	1,788908766	0,437557414
4	10^4	4.123	0,4123	2,425418385	0,636509619
5	10^5	31.957	0,31957	3,129204869	0,703786484
6	10^6	261.051	0,261051	3,830669103	0,701464234
7	10^7	2.208.165	0,2208165	4,528647089	0,697977986
8	10^8	19.132.617	0,19132617	5,226676518	0,698029429
9	10^9	168.806.706	0,168806706	5,923935273	0,697258755
					$\ln 2 = 0,693147181$

Fonte: Os autores (2024).

$$1/\tilde{\rho}_{41}(y) - 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) \approx \ln 2 \quad (23)$$

Note que podemos escolher $y = 4$ como sendo uma “boa” aproximação inicial (outros valores para y também são possíveis) para a diferença dos inversos em (23). Assim,

$$\begin{aligned} 1/\tilde{\rho}_{41}(y) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) + \ln 2 \\ 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(y-2) + \ln 2 \\ &\vdots \\ 1/\tilde{\rho}_{41}(4) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(3) + \ln 2 \end{aligned}$$

Efetuando,

$$1/\tilde{\rho}_{41}(y) \approx 1/\tilde{\rho}_{41}(3) + (y-3) \ln 2 \quad (24)$$

Logo,

$$\tilde{\rho}_{41}(y) \approx \frac{1}{y \ln 2 + 1/\tilde{\rho}_{41}(3) - \ln 8} \quad (25)$$

Usando (22), temos

$$\rho_{41}(x) \approx \frac{1}{\log x \ln 2 + 1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{(\ln 2/\ln 10) \ln x + (1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8)}$$

$$= \frac{1}{A \ln x + B} \quad (27)$$

onde $A = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0,301030$ e $B = 1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8 = 1/0,559 - \ln 8 \approx -0,290533$. De (21), temos que

$$\pi_{41}(x) \approx \frac{x}{A \ln x + B} \quad (28)$$

A seguir, apresentamos a formulação da Conjectura 41.

Conjectura 26 (A Conjectura 41) Para todo $x \geq e^{(A-B)/A}$, temos

$$\pi_{41}(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B} \quad (29)$$

onde, $A = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ e $B = \frac{1}{0,559} - \ln 8$.

Observação 27

- (a) $x = e^{(A-B)/A} \approx 7,13583$ é um ponto de mínimo da função $x/(A \ln x + B)$. Sendo o valor mínimo, aproximadamente, 23,7046.
- (b) $x = e^{-B/A} \approx 2,62513$ é uma assíntota vertical da função $x/(A \ln x + B)$.
- (c) A igualdade assintótica (29) é equivalentemente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} = 1 \quad (30)$$

Se a Conjectura 41 fosse verdadeira, teríamos os seguintes três resultados:

Proposição 28 A densidade natural de \mathbb{V}_{41} é nula, isto é,

$$\rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x} = 0 \quad (31)$$

Prova.

$$\rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \right) \left(\frac{1}{A \ln x + B} \right) = 0$$

pois, o limite do primeiro fator é 1, devido a (30), e do segundo fator é 0. ■

Proposição 29 A função contagem de primos-41 é assintoticamente igual a $1/A$ vezes a função contagem de primos, isto é,

$$\pi_{41}(x) \sim \frac{1}{A} \pi(x) \quad (32)$$

onde $1/A = 3,32193 \dots$

Prova.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A}\pi(x)} &= A \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \frac{x}{\pi(x) (A \ln x + B)} \\ &= A \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \right] \frac{1}{A \left[\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \right] + B \left[\frac{\pi(x)}{x} \right]} \end{aligned}$$

De (30), (3) e (12), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A}\pi(x)} = 1 \quad (33)$$

Assim, $\pi_{41}(x) \sim \frac{1}{A}\pi(x)$. ■

Teorema 30 (Infinitude de \mathbb{V}_{41}) *O polinômio $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos.*

Prova. Suponha, por contradição, que $v_{41}(x)$ gera um número finito de números primos, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi_{41}(x) = k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A}\pi(x)} = A \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\pi(x)}$$

De (4), temos que $\pi(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Logo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi_{41}(x)/\frac{1}{A}\pi(x) = 0$, mas isto contradiz (33). Portanto, $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos. ■

5 O Polinômio v_{41} e a Conjectura F

A seguir descreveremos a Conjectura F de Hardy-Littlewood.

Conjectura 31 (Conjectura F de Hardy-Littlewood, 1922) *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $\text{mdc}(a, b, c) = 1$, $\Delta = b^2 - 4ac$ não é um quadrado e, $a + b$ e c não são ambos números pares. Então, existem infinitos números primos da forma $f(n) = an^2 + bn + c$. Além disso,*

$$\pi_f(n) \sim C\varepsilon\sqrt{n}/(\sqrt{a} \ln n) \quad (34)$$

onde

$$C = \prod_{\substack{p>2 \\ p|a \wedge p|b}} \left(\frac{p}{p-1} \right) \prod_{\substack{p>2 \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{1}{p-1} \left(\frac{\Delta}{p} \right) \right) \quad (35)$$

$\left(\frac{\Delta}{p} \right)$: denota o símbolo de Legendre

$$\varepsilon = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 2 \nmid a + b \\ 1 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

Observação 32

- (i) Se a Conjectura F fosse verdadeira, teríamos que o conjunto de números primos gerados pela função quadrática $f(n)$ é infinito. Provaremos por Contradição. Suponha que $\exists k_0 > 0$ tal que $k_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_f(n)$. Por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_f(n) \sqrt{a} \ln n}{C \varepsilon \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{a}}{C \varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_f(n) \ln n}{\sqrt{n}} = 0$, mas isto é uma contradição com (34).
- (ii) A Conjectura F, originalmente publicada por Hardy e Littlewood ([5], p. 48) tem sido objeto de diversas reformulações. Por exemplo, Jacobson e Williams [9] propuseram uma versão ligeiramente modificada da conjectura: eles descartam o termo \sqrt{a} e substituem o quociente $\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, mencionado na equação (34), pela função integral logarítmica $\text{Li}(n)$. Dessa forma, a Conjectura F pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$\pi_f(n) \sim \varepsilon C \text{Li}(n) \quad (36)$$

Com essa nova igualdade assintótica, a Conjectura F pode ser estudada como um caso particular da *Conjectura de Bateman-Horn*, maiores informações em [10].

- (iii) Este trabalho considera a Conjectura F com base na igualdade assintótica (36).

O polinômio $v_{41}(n)$ **satisfaz a hipótese** da Conjectura F. De fato,

$$v_{41}(n) = n^2 + 81n + 1681$$

sendo $a = 1$, $b = 81$ e $c = 1681$.

- (i) $a > 0$
- (ii) $\text{mdc}(1, 81, 1681) = 1$
- (iii) $\Delta = b^2 - 4ac = 81^2 - 4(1)(1681) = -163$ não é um quadrado.
- (iv) $a + b = 82$ e $c = 1681$ não são ambos números pares.

Portanto, v_{41} satisfaz as hipóteses da Conjectura F.

6 Conjectura F e Conjectura 41

Vamos considerar o polinômio $v_{41}(x)$ sob a perspectiva da Conjectura F. Se a Conjectura F fosse verdadeira, o polinômio v_{41} geraria infinitos números primos, conforme indicado na Observação 32(i). A partir de (36) e considerando que $\varepsilon = 1$, pois $2|82$, temos

$$\pi_{41}(n) \sim \widehat{C} \text{Li}(n) \quad (37)$$

onde $\widehat{C} = \varepsilon C = 1 \cdot C = C$. Assim, \widehat{C} é dado por

$$\widehat{C} = \prod_{i \geq 2} \left[1 - \frac{1}{p_i - 1} \left(\frac{-163}{p_i} \right) \right] \quad (38)$$



e $\left(\frac{-163}{p_i}\right)$ é o símbolo de Legendre, sendo que os valores iniciais estão listados na Tabela 3.

Cálculo de \widehat{C}_4 : Considerando os quatro primeiros números primos ímpares, onde $p_4 = 11$, temos

$$\begin{aligned}\widehat{C}_4 &= \left[1 - \frac{1}{3-1} \left(\frac{-163}{3}\right)\right] \left[1 - \frac{1}{5-1} \left(\frac{-163}{5}\right)\right] \left[1 - \frac{1}{7-1} \left(\frac{-163}{7}\right)\right] \left[1 - \frac{1}{11-1} \left(\frac{-163}{11}\right)\right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{3-1} (-1)\right] \left[1 - \frac{1}{5-1} (-1)\right] \left[1 - \frac{1}{7-1} (-1)\right] \left[1 - \frac{1}{11-1} (-1)\right] \\ &= (1 + 1/2)(1 + 1/4)(1 + 1/6)(1 + 1/10) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{11}{10} \\ &= 77/32 \\ &= 2,40625\end{aligned}$$

Cálculo de \widehat{C} : Para os primeiro 10^5 números primos ímpares (Utilizando o *Software Mathematica*), obtemos:

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{10^5} &= \left[1 - \frac{1}{3-1} (-1)\right] \left[1 - \frac{1}{5-1} (-1)\right] \cdots \left[1 - \frac{1}{p_{10^5}-1} (-1)\right] \\ &= 3,3204\end{aligned}$$

onde $p_{10^5} = 1.299.709$ e $\left(\frac{-163}{p_{10^5}}\right) = -1$.

Segundo o gráfico de \widehat{C}_{10^5} , mostrado na Figura 4, podemos considerar um valor aproximado para \widehat{C} :

$$\widehat{C} \approx \widehat{C}_{10^5} = 3,3204 \quad (39)$$

Segundo Jacobson e Williams [9] um valor para \widehat{C} é

$$\widehat{C} = \widehat{C}(\Delta) = 3,3197732 \quad (40)$$

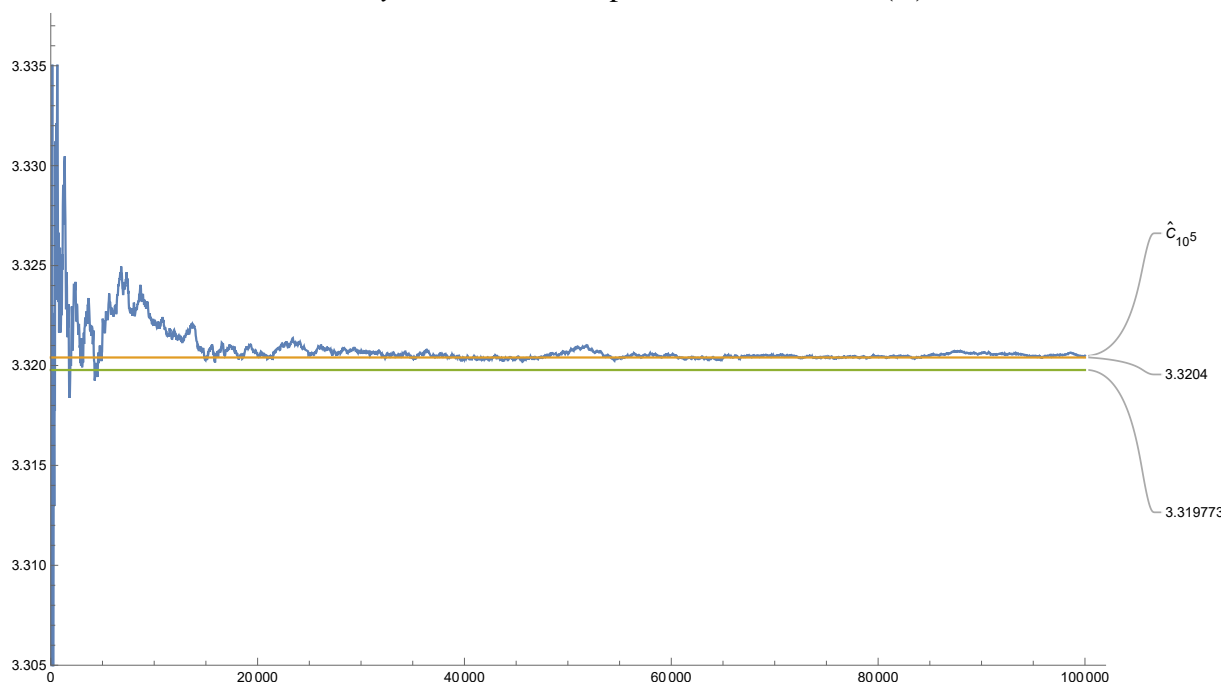
Na Tabela 6 apresentamos alguns valores da função contagem dos primos-41 para $n = 10, 10^2, \dots, 10^9$. A segunda coluna apresenta os valores reais de $\pi_{41}(n)$. A terceira coluna apresenta o cálculo da fórmula assintótica $\widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n)$, onde $\widehat{C}(\Delta) = 3,3197732$, da Conjectura F. A quarta coluna exibe o cálculo de $\widehat{C}_{10^5}\text{Li}(n)$, onde $\widehat{C}_{10^5} = 3,3204$ foi obtido pelos autores deste trabalho. A quinta coluna mostra a aproximação de $\pi_{41}(n)$ pela fórmula assintótica $\frac{n}{A \ln n + B}$, proposta na Conjectura 41. A sexta e última coluna apresentam o erro relativo que se comete ao aproximar $\pi_{41}(n)$ pelas fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, respectivamente. Observamos que o erro na Conjectura F cai mais rapidamente, com relação ao erro da Conjectura 41. Para o cálculo da função $\text{Li}(n)$ foi usado o *Software Mathematica*.

7 Algumas ideias para a demonstração da Conjectura 41

A Conjectura 41 será provada se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)(A \ln x + B)}{x} = 1 \quad (41)$$

Figura 4: Cálculo da constante \widehat{C} . Em cor azul o gráfico de \widehat{C}_{10^5} aproximando-se à reta horizontal $y = 3,3204$. A reta horizontal $y = 3,3197732$ representa o valor de $\widehat{C}(\Delta)$.



Fonte: Os autores (2024).

Conforme mencionado na Observação 10, a demonstração do TNP utilizou as funções de Chebyshev, a função de von Mangoldt e a Fórmula de Selberg, entre outras ferramentas. Uma abordagem similar pode ser adotada para a demonstração de (41), o que envolveria a definição das funções de Chebyshev e de von Mangoldt especificamente para os primos-41. No entanto, o maior desafio é a obter a Fórmula de Selberg na versão para os primos-41.

7.1 As funções Theta-41, Psi-41 e von Mangoldt-41

Notação 2 Para todo $p \in \mathbb{V}_{41}$,

$$\pi_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} 1 \quad (42)$$

Definição 33 (Função Theta-41) Para todo $p \in \mathbb{V}_{41}$,

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p \quad (43)$$

Definição 34 (Função von Mangoldt-41)

$$\Lambda_{41}(n) = \begin{cases} \ln p & \text{se } v_{41}(n) = p^m \text{ para algum } m \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{V}_{41} \\ 0 & \text{em outro lugar} \end{cases} \quad (44)$$



Tabela 6: Valores da função contagem de primos-41 para $n = 10, 10^2, \dots, 10^9$, cálculo das fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, e erros relativos devido à aproximação.

n	$\pi_{41}(n)$	$\widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n)$ Conjectura F	$\widehat{C}_{10^5}\text{Li}(n)$	$\frac{n}{A \ln n + B}$ Conjectura 41	$\frac{ \pi_{41}(n) - \widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n) }{ \pi_{41}(n) }$	$\frac{ \pi_{41}(n) - \frac{n}{A \ln n + B} }{ \pi_{41}(n) }$
10	7	20,5	20,5	24,8	1,92405600	2,54823725
10^2	74	100,0	100,0	91,3	0,35151294	0,23325308
10^3	559	589,6	589,7	559,0	0,05478315	0,00000000
10^4	4.123	4.136,9	4.137,7	4.028,9	0,00336962	0,02281881
10^5	31.957	31.968,8	31.974,8	31.494,0	0,00036868	0,01448671
10^6	261.051	261.025,6	261.074,9	258.508,1	0,00009718	0,00974090
10^7	2.208.165	2.207.378,3	2.207.795,1	2.192.262,5	0,00035627	0,00720167
10^8	19.132.617	19.129.228,3	19.132.840,0	19.030.782,5	0,00017712	0,00532256
10^9	168.806.706	168.807.927,5	168.839.799,8	168.129.622,8	0,00000724	0,00401100

Fonte: Os autores (2024).

Tabela 7: Alguns valores da função de von Mangoldt-41.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_{41}(n) =$	1763	1847	1933	2021	2111	2203	2297	2393	2491	2591
$\Lambda_{41}(n) =$	0	$\ln(1847)$	$\ln(1933)$	0	$\ln(2111)$	$\ln(2203)$	$\ln(2297)$	$\ln(2393)$	0	$\ln(2591)$

Fonte: Os autores (2024).

Definição 35 (Função Psi-41) Para todo $p \in \mathbb{V}_{41}$,

$$\psi_{41}(x) = \sum_{p^m \leq v_{41}(x)} \ln p = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n) \quad (45)$$

Exemplo 36

$$\begin{aligned} \psi_{41}(10) &= \sum_{p^m \leq 2591} \ln p \\ &= \ln 1847 + \ln 1933 + \ln 2111 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591 \quad (m = 1) \\ &+ 0 \quad (m = 2) \\ &= 53.82010 \dots \end{aligned}$$

Observação 37 Alguns resultados imediatos.

$$1 \leq y < x \rightarrow \pi_{41}(y) \leq \pi_{41}(x) \quad (46)$$

$$1 \leq y < x \rightarrow \vartheta_{41}(y) \leq \vartheta_{41}(x) \quad (47)$$

$$\forall y \geq 1, \quad \pi_{41}(y) < y \quad (48)$$

$$\forall x \geq 1, \quad v_{41}(x) = x^2 + 81x + 1681 > x \leftrightarrow \frac{1}{v_{41}(x)} < \frac{1}{x} \quad (49)$$

$$\forall x \geq 1, \quad v'_{41}(x) = 2x + 81 > 0 \quad (50)$$

$$\vartheta_{41}(x) \leq \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x) \quad (51)$$

Prova de (51). De fato,

$$\begin{aligned} \vartheta_{41}(x) &= \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p \\ &= \ln p_1 + \ln p_2 + \cdots + \ln p_{\pi_{41}(x)} \leq \ln v_{41}(x) + \ln v_{41}(x) + \cdots + \ln v_{41}(x) \\ &= \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x) \end{aligned}$$

$$\vartheta_{41}(x) \leq \psi_{41}(x) \quad (52)$$

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{\substack{p \leq v_{41}(x) \\ p \in \mathbb{V}_{41}}} \ln p \leq \sum_{\substack{p \leq v_{41}(x) \\ p \in \mathbb{P}}} \ln p = \vartheta[v_{41}(x)] = (\vartheta \circ v_{41})(x) \quad (53)$$

Observação 38 Na Tabela 8, apresentamos os valores das funções $\vartheta(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$ para determinados valores de x . Esses resultados são úteis para esclarecer a relação (53). Os valores foram calculados utilizando um pequeno código desenvolvido em Python.

Tabela 8: Alguns valores das funções $\vartheta(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$.

x	$\vartheta(x)$	$\vartheta_{41}(x)$
10	5,3	53,8
10^2	83,7	656,0
10^3	956,2	6.680,4
10^4	9.896,0	66.843,8
10^5	99.685,4	664.686,6
10^6	998.484,2	6.641.187,8
10^7	9.995.179,3	66.421.533,1
10^8	99.987.730,0	664.071.595,6

Fonte: Os autores (2024).

8 Conclusões

Com o n -quadrado Zeta, é possível construir polinômios de 2º grau, sendo a maioria deles geradores de números primos. Um desses polinômios é o $v_{41}(x)$. Para mais informações sobre outros polinômios, recomenda-se a leitura do artigo [6].

Em seguida, investigamos se o polinômio $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos. Para isso, foi criada a Tabela 5 utilizando um código desenvolvido em Python. A última coluna da tabela contém as diferenças dos inversos das densidades. Ao analisar essa coluna, identificamos um padrão: à medida que o valor de y (onde y o expoente de uma potência de 10) aumenta, essas diferenças se aproximam de $\ln 2$. A partir de manipulações matemáticas, formulamos a Conjectura 41, que propõe uma fórmula assintótica para a função de contagem de primos-41.

O desafio seguinte era encontrar uma abordagem que conduzisse à demonstração da conjectura, pois, se verdadeira, o polinômio $v_{41}(x)$ geraria infinitos números primos. Ao explorar a literatura



sobre números primos, identificamos a Conjetura F de Hardy-Littlewood, cuja versão original foi ligeiramente modificada, conforme explicado na Observação 32. Essa conjectura é mais geral, abrangendo a maioria dos polinômios de 2º grau, e oferece uma fórmula assintótica para a função de contagem de números primos. Verificamos que o polinômio $v_{41}(x)$ é um caso particular dessa conjectura. Posteriormente, comparamos ambas as conjecturas, analisando suas fórmulas assintóticas, cujos erros estão detalhados na Tabela 6. Na última seção, definimos as funções Theta-41, Psi-41 e von Mangoldt-41 para os primos-41, tal como foi feito na demonstração do Teorema dos Números Primos (TNP). Discutimos também algumas desigualdades preliminares que envolvem as funções de Chebyshev. Assim, a abordagem proposta para a prova da Conjetura 41 pode servir como um caminho alternativo na busca pela demonstração da Conjetura F, quando aplicada ao polinômio $v_{41}(x)$.

Neste trabalho, apresentamos a Conjetura 41 e sugerimos abordagens para sua prova. Concluímos que, por meio de cálculos computacionais utilizando a linguagem de programação Python e o software Mathematica, aliados a ferramentas matemáticas básicas e resultados da Teoria dos Números, é possível identificar padrões sobre a infinitude dos números primos gerados por polinômios de 2º grau.

Agradecimento

Os autores agradecem à CAPES pela bolsa concedida e à FAPEMIG - Chamada nº 07/2021 (processo: RED-00133-21).

Referências

- [1] AVILA, J. A. J.; ANDRADE, G. S. About the theorem that partially solves the Navarrete-Orellana Conjecture. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 28, n. 2, p. 302-317, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.7546/nntdm.2022.28.2.302-317>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [2] ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES (FRANCE). **Histoire de l'Académie royale des sciences**. Avec les mémoires de mathématique & de physique, pour la même année. v. 1785. Paris: [S. n.], 1788. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/page/28012156>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [3] BOUNIAKOVSKY, V. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. In: MÉMOIRES de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. 6me série. Saint-Pétersbourg: [S. n.], 1857. p. 305-329. (Sciences mathématiques, physiques et naturelles, Tome VIII, Première partie).
- [4] MURTY, M. R.; SRINIVAS, K.; SUBRAMANI, M. Admissible primes and Euclidean quadratic fields. **Journal Ramanujan Mathematical Society**, v. 33, n. 2, p. 135-147, 2018. Disponível em: <http://www.mathjournals.org/jrms/2018-033-002/2018-033-002-003.html>. Acesso em: 22 out. 2024.



- [5] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. Some problems of “Partitio Numerorum”; III: on the expression of a number as a sum of primes. **Acta Mathematica**, v. 44, p. 1-70, 1923. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02403921>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [6] AVILA, J. A. J.; MOREIRA, E. D.; GUIMARÃES, B. F. Padrões especiais de distribuição dos números primos: o n -quadrado zeta. **RMU**, v. 1, p. 55-78, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/26755254/rmu20224>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [7] APOSTOL, T. M. **Introduction to analytic number theory**. New York: Springer-Verlag, 1976. *E-book*. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5579-4>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [8] HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. p. 298.
- [9] JACOBSON JR, M. J.; WILLIAMS, H. C. New quadratic polynomials with high densities of prime values **Mathematics of Computation**, v. 72, n. 241, p. 499-519, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01418-7>. Acesso em: 22 out. 2024.
- [10] ALETHEIA-ZOMLEFER, S. L.; FUKSHANSKY, L.; GARCIA, S. R. The Bateman–Horn conjecture: heuristic, history, and applications. **Expositiones Mathematicae**, v. 38, n. 4, p. 430-479, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2019.04.005>. Acesso em: 22 out. 2024.