



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 24, 2024
Artigos de Pesquisa

Jorge Corrêa de Araújo

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores (FFP), São Gonçalo

Rosa García Márquez

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Faculdade de Formação de Professores (FFP), São Gonçalo, rosagmarquez@yahoo.com.br

Viga prismática delgada e elástica: três aplicações de importância prática na engenharia

Thin and elastic prismatic beam: three practical importance applications in engineering

Resumo

As vigas prismáticas submetidas à esforços, sofrem deformações elásticas. Nesse estudo, três aplicações envolvendo uma viga de aço prismática quase retilínea são analisadas. A primeira delas, consiste em uma carga concentrada Q em seu ponto médio, onde a modelagem é tratada de duas formas distintas. A mais comum utiliza a equação do momento fletor usando a condição de simetria. Essa abordagem ficou em boa concordância com o modelo desenvolvido nesse estudo, onde não é assumida a condição de simetria. Na segunda aplicação, uma mola é colocada sob a barra no ponto médio, de modo a atenuar o movimento vertical causado pela força P que atua verticalmente nesse ponto, onde a curva de deformação elástica foi obtida da equação do momento fletor. A terceira dispõe de três cargas equidistantes sobre a barra de modo a obter uma representação cinemática desse movimento. Uma curva de deformação aproximada foi obtida em toda a estrutura.

Palavras-chave: Curva elástica. Deflexões na viga delgada. Momento fletor. Movimento livre de deflexões na barra.

Abstract

Prismatic beams subjected to loads undergo elastic deformation. In this study, three applications involving an almost straight prismatic steel beam are analysed. The first application consists of a concentrated load Q at its midpoint, where the modelling is treated in two different ways. The most common one uses the bending moment equation using the condition of symmetry. This approach was in good agreement with the model developed in this study, where the condition of symmetry is not assumed. In the second application, a spring is placed under the bar at the midpoint, to attenuate the vertical movement caused by P force which acts vertically at this point, where the curve of elastic deformation was obtained from the bending moment equation. The elasticity curve of these deformations was determined here. The third one places three equidistant loads on the bar to obtain a kinematic representation of this movement. An approximate deformation curve was obtained throughout the structure.

Keywords: Elastic curve. Deflections in the thin beam. Bending moment. Free movement of deflections on the bar.

Artigo recebido em jun. 2024 e aceito em dez. 2024



Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.



1 Introdução

Vigas prismáticas biapoiadas são amplamente utilizadas na engenharia, em particular para suportarem cargas sobre elas. Entretanto, embora tais estruturas sejam projetadas para aguentarem esforços significativos, elas ficam suscetíveis a vibrações ou deflexões transversais ao eixo central da viga. Conforme observado por Rao [1], tais vibrações podem afrouxar os elementos de fixação dos apoios. Além disso, quando a frequência natural de vibração de uma estrutura coincidir com a frequência da força excitadora externa, ocorre a ressonância resultando em deflexões que aumentam indefinidamente podendo causar falhas ou mesmo a ruptura do sistema.

Segundo Hibbeler [2], a linha elástica tem uma relação direta com a forma fletida da barra quando submetida a um carregamento, e por isso, é importante conhecer as restrições dos deslocamentos gerados pelos vários tipos de apoios ou vínculos, em geral localizados nas extremidades.

Vários trabalhos sobre deflexão em vigas prismáticas foram divulgados com ênfase na equação diferencial para representação desse tipo de encurvamento, como por exemplo, Costa [3] e Monteiro, Wolenski e Christoforo [4]. Esses pesquisadores fizeram estudos comparativos dos resultados obtidos pela equação diferencial da linha elástica com aqueles obtidos pelo método dos deslocamentos usando elementos finitos e funções polinomiais interpolatórias.

Werneck *et al* [5] utilizaram a teoria da linha elástica em vigas retilíneas com apoios restritivos com o objetivo de obter o vetor de forma do quociente de Rayleigh [1], o qual é usado para estimar a frequência natural de vibração de um sistema físico conservativo discreto com N graus de liberdade, isto é, com N modos normais de vibração, em oposição aos métodos que utilizam a resolução de problemas de autovalor (frequências naturais) como o que aqui será discutido em um dos casos analisados. Conforme reportado por Rao [1] o quociente de Rayleigh é uma técnica muito utilizada para a resolução em problemas considerados difíceis envolvendo as vibrações estruturais. Segundo Soriano [6] em análise de estruturas em barras, têm-se deslocamentos nodais desconhecidos em pontos da barra sem restrições, bem como, reações desconhecidas nos apoios em pontos nodais restringidos. As estruturas de vigas objeto desse estudo, atendem ao requisito do comportamento elástico linear, ou seja, as deformações sofridas são descritas pela Lei de Hooke [7] e, portanto, consideradas elásticas no sentido de uma vez cessadas às ações externas nessas estruturas, elas retornam a sua geometria original, ou dito de outro modo, estamos interessados nas “pequenas” vibrações transversais dessas estruturas simples.

O objetivo desse estudo é analisar três casos de importância prática em engenharia estrutural, considerando diferentes condições e aplicações de uma viga prismática delgada. Na primeira aplicação é realizada uma análise dessa viga sob carregamento no ponto médio usando a teoria das barras elásticas delgadas. A obtenção da equação da elástica é realizada por duas diferentes metodologias. A primeira e a mais comum, utiliza a equação do momento fletor com condições de contorno aplicadas em uma das extremidades da viga e, em seu ponto central. A segunda, que não consta de nenhuma das referências aqui citadas, utiliza a equação fundamental dessa teoria, onde as condições de contorno são impostas exclusivamente nos extremos da viga, o que não necessita da imposição da hipótese da simetria da primeira forma.

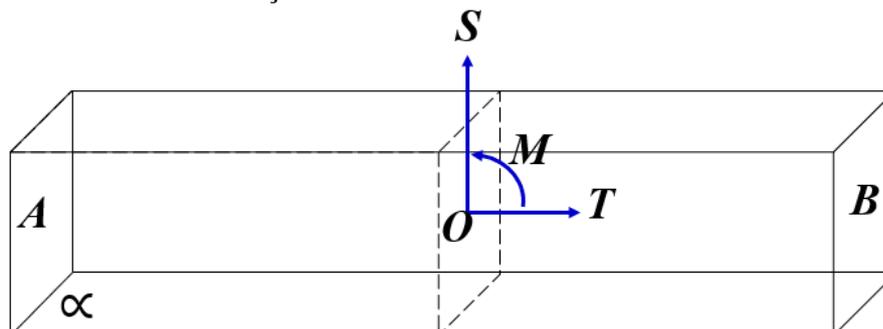
Na segunda aplicação foi utilizada uma mola no ponto central sob a barra de modo a obter uma redução das deflexões originais nesse ponto e, por extensão, em todo o seu comprimento. Uma vez que a elástica da curva foi obtida, este modelo pode ser usado para o desenvolvimento de um protótipo eficiente visando à redução de movimentos verticais indesejáveis.

A terceira aplicação consiste em obter as deflexões sofridas pela barra quando submetida a uma distribuição de cargas equidistantes. Uma representação aproximada dessa deformação foi obtida em toda a estrutura considerando determinados instantes de tempo.

2 Materiais e métodos

A Fig. 1 mostra uma barra retilínea de seção reta uniforme contendo o ponto O , e um plano α paralelo ao comprimento da barra. As forças externas atuando sobre a barra podem ser o próprio peso da barra, forças de reação exercidas pelos apoios ou em cargas colocadas sobre ela. Segundo Synge e Griffith [7], considera-se como sistema a porção da barra que vai da extremidade A até a seção reta.

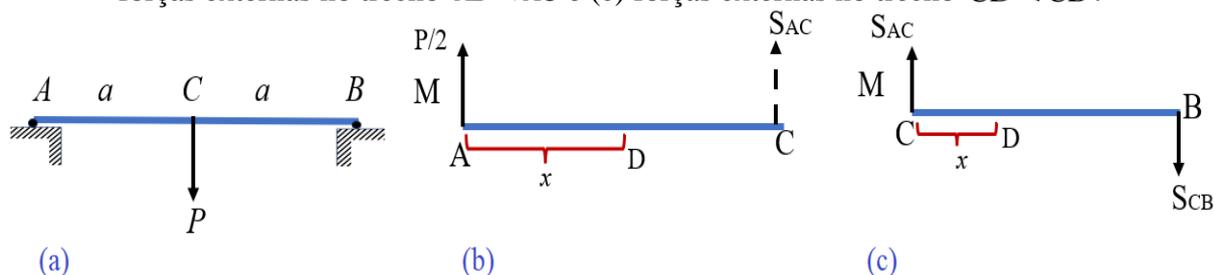
Figura 1. Reações internas na seção reta de uma barra na porção compreendida entre a seção e a extremidade B .



Fonte: Baseada na Figura 36 de Synge e Griffith (1969).

As reações na seção correspondem a uma força axial T atuando no ponto O , um esforço cortante S que pode produzir deslocamentos verticais sendo perpendicular ao plano α , um momento fletor M , que é gerado por uma força que atua a certa distância e, que pode produzir rotação da barra em uma de suas extremidades. De acordo com Synge e Griffith [7], a barra delgada em idealização matemática pode ser reduzida a um segmento de reta, enquanto a seção reta é reduzida a um ponto.

Figura 2. (a) Modelo idealizado de uma barra delgada, sem peso e com carga no centro (b) forças externas no trecho $AD < AC$ e (c) forças externas no trecho $CD < CB$.



Fonte: Os autores.

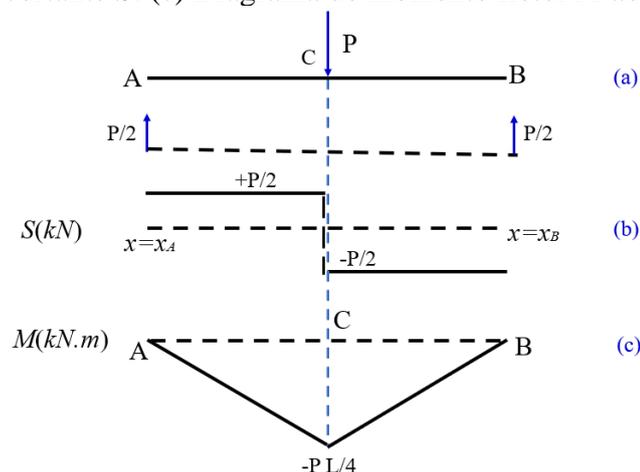
A Fig.2 (a) mostra uma barra sem peso AB , de comprimento L e que pode girar em torno dos apoios A e B onde uma carga P é colocada no ponto médio C . A Fig.2(b) ilustra as forças externas na parte da viga no trecho AD , onde $AD < CD$ com D situado na porção AC . Usando as equações de equilíbrio estático na barra existem duas reações nos apoios de intensidade $\frac{P}{2}$ ambas dirigidas para cima.

Como o sistema está em equilíbrio em AD , $T=0$, $S_{AC} = \frac{P}{2}$ e $M_{AC}(x) = -S_{AC}x = -\frac{1}{2}Px$ para todo $x_A = 0 \leq x < \frac{L}{2}$. Note que $M_{AC} = M_C \left(x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{PL}{4}$. A Fig. 2c mostra o trecho CD , considerando D na porção CB mais as informações do trecho inicial AC . Nesse caso, a cortante $S_{CB} = S_{AC} - P = \frac{P}{2} - P = -\frac{1}{2}P$, enquanto o momento fletor M_{CB} é dado pela soma dos momentos na forma

$$M_{CB} = M_C + Px - S_{AC} = -\frac{PL}{4} + Px - \frac{P}{2}x \Rightarrow M_{CB} = -\frac{PL}{4} + Px, \text{ para todo } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

A Fig.3 mostra com base na discussão das Figs. (2b) e (2c) o diagrama das forças internas e externas nos elementos da barra entre os trechos $x_A = 0 \leq x < \frac{L}{2}$ e $x_C = 0 \leq x < \frac{L}{2}$.

Figura 3. Diagrama dos esforços internos (a) Força de reação nos apoios à carga central. (b) Diagrama do esforço cortante S . (c) Diagrama do momento fletor M ao longo da barra.



Fonte: Os autores.

Nota-se que o momento fletor M é uma função contínua em toda a extensão da barra, enquanto a cortante muda abruptamente no ponto médio. O problema analisado pode ser estáticamente determinado usando as equações elementares de equilíbrio do sistema [8], isto é, sem fazer o uso das equações diferenciais gerais de equilíbrio de barras delgadas que são $\frac{dT}{dx} = -X$, $\frac{dS}{dx} = -Y$ e $\frac{dM}{dx} = -S$, onde X e Y são as componentes de uma força que pode considerar a gravidade ou outras cargas externas contínuas. Portanto, essas equações diferenciais são tomadas como exigências para a condição de equilíbrio para um comprimento infinitesimal de barra dx [7]. Ainda de acordo com os referidos autores [7], quando uma barra é aproximadamente retilínea e, é flexionada ligeiramente, o momento fletor M é dado pela Lei de Bernoulli, conforme mostra a eq. (1)

$$M = \frac{k}{\rho} \cong EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (1)$$

sendo ρ o raio de curvatura da curva de deflexão da barra e $k = EI$ com $\frac{d^2 y}{dx^2} \cong \frac{1}{\rho}$. A constante

$E \left(\frac{N}{m^2} \right)$ é o módulo de elasticidade de Young e $I \left(m^4 \right)$ é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo que passa pelo seu centro médio e é perpendicular ao plano do conjugado do momento fletor M . O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo L é proporcional à energia cinética de rotação do corpo em relação a esse eixo.

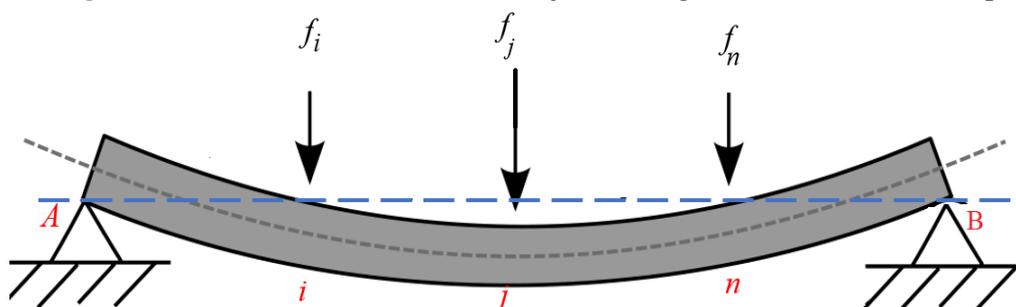
Desse modo, quanto maior o momento de inércia I maior será a energia necessária para parar o movimento de rotação [9]. Conforme reportado por Synge e Griffith [7] deve-se supor que a carga P é devido ao próprio peso da barra ou de uma carga colocada sobre ela. A equação diferencial fundamental da teoria das barras delgadas elásticas [7] é dada pela eq. (2)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -P. \quad (2)$$

Se a eq. (2) é resolvida obtém-se a eq. (1) e a equação da cortante $S = -\frac{dM}{dt}$. A eq. (2) só é válida para cargas concentradas ou apoios. Portanto a solução $y = y(x)$ da eq. (2) é de classe $C^2([0, L], \mathbb{R})$, isto é, que a função $y = y(x)$ tem que ser continuamente derivável até a segunda ordem no intervalo $[0, L]$. Entretanto, a função é descontínua na terceira derivada, já que a cortante é descontínua no ponto central da viga com o esforço cortante mudando abruptamente conforme pode ser visto na Fig. 3(b).

A Fig. 4 mostra uma viga elástica bi apoiada de modo simples, isto é, sem engaste nas extremidades e submetida à ação de cargas concentradas $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_n$ em n pontos ou nós e, dirigidas verticalmente para baixo causando deflexão dela nos pontos indicados e, por extensão, em toda a barra.

Figura 4. Barra elástica submetida à ação de cargas concentradas em n pontos.



Fonte: Baseada no Fig. 4.5 de Bassanezi e Ferreira Junior (1988).

Seja a_{ij} o deslocamento no ponto i da barra devido à ação de uma força unitária \mathbf{f}_j^u no ponto j e nenhuma força aplicada nos demais pontos. Então $\mathbf{f}_j \Rightarrow \mathbf{f}_j a_{ij}$, onde $\mathbf{f}_j a_{ij}$ é o deslocamento ou deflexão no ponto i devido à força \mathbf{f}_j . Portanto, a deflexão total y_i no ponto i é obtida pela superposição das demais forças, isto é,

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j. \quad (3)$$



Pelo teorema da reciprocidade [10], $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. A matriz $[a] = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é denominada matriz de flexibilidade, enquanto $y = (y_1 \dots y_n)^T$ é o vetor de deslocamentos ou deflexões. Tem-se da eq. (3) a relação linear

$$y = [a] \mathbf{f}, \quad (4)$$

onde $\mathbf{f} = (f_1 \dots f_n)^T$ é o vetor de carregamento ou força [1]. A matriz de rigidez do sistema é dada por $[k] = [a]^{-1}$, onde k_{ij} denota o coeficiente de influência de rigidez, e é definido como a força no ponto i devido a um deslocamento unitário no ponto j , quando todos os demais pontos são fixados [1], exceto o ponto j . Da eq. (4) tem-se

$$\mathbf{f} = [k] y. \quad (5)$$

Por exemplo, as forças necessárias para produzir um deslocamento unitário, $y_1 = 1$ no ponto $x = 1$ e, zeros nos demais pontos, $f_1 = k_{11}, f_2 = k_{21}, \dots, f_n = k_{n1}$. Da segunda Lei de Newton, para cada força $f_j, j = 1, \dots, n$, e, usando a eq. (5), tem-se $f_j = [k]_j y$, onde $[k]_j$ é a j -ésima linha da matriz de rigidez e admitindo que não haja dissipação de energia, tem-se

$$M_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = -f_j = [k]_j y, \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

A eq. (6) pode ser colocada na forma compacta vetorial

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + [k] y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + M^{-1} [k]) y = 0, \quad (7)$$

onde $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ é a matriz diagonal das massas concentradas em cada ponto sendo

$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ o operador derivação de segunda ordem. A eq. (7) é analisada para o caso especial em que as matrizes M e $[k]$ são matrizes simétricas de ordem $n \times n$ e positivas definidas, isto é, todos os autovalores são reais e positivos [11]. A solução geral da eq. (7) submetida a condições iniciais permitem uma análise da cinética do movimento das deflexões da viga em cada ponto considerando um movimento livre. Bassanezi e Ferreira Junior [11] trazem maiores detalhes para a resolução da eq. (7).

Essencialmente o processo consiste na diagonalização do sistema de equações diferenciais acopladas dadas pela eq. (7) de modo que a solução geral Y é dada pela eq. (7a)

$$Y = M^{-1/2} Q U \quad (7a)$$

onde $M^{-1/2} = \text{diag}\{m_1^{-1/2}, \dots, m_n^{-1/2}\}$, Q é uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores ortonormais $\beta_k, k = 1, \dots, n$ da matriz positiva definida $S = M^{-1/2} Q M^{-1/2}$ e U é a matriz formada pelas funções $u_j = A_j \text{sen}(\omega_j t + \alpha_j), j = 1, \dots, n$. Tais funções u_j são denominadas coordenadas normais de vibração, as quais representam o movimento vibratório na forma mais simples em cada ponto de discretização. Cada u_j , vibra com a frequência natural $\omega_j = \lambda_j^{1/2}$, onde $\lambda_j > 0$ são os autovalores da matriz S associados aos respectivos autovetores ortonormais

$\beta_k, k = 1, \dots, n$. A equação (7a) pode ser escrita como $y_k = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \sum_{j=1}^n u_j \beta_{kj}$, para cada

$k = 1, \dots, n$. Ou seja, cada y_k vibra na direção do autovetor β_k nas frequências naturais $\omega_1, \dots, \omega_n$.

2.1 Especificações técnicas da viga

Nos casos que serão analisados, a barra (ou viga) retilínea, de aço uniforme e, com módulo de elasticidade de Young $E = 2,06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ [12], sendo a constante de rigidez da barra igual a $k = 48 \frac{EI}{L^3} (\text{N/m})$, onde $I = \frac{1}{12} ab^3 (\text{m}^4)$ é o momento de inércia da seção reta retangular da barra de dimensões $a = 1,2 \text{ m}$ e $b = 0,1 \text{ m}$, com o comprimento da mesma igual a $L = 2 \text{ m}$.

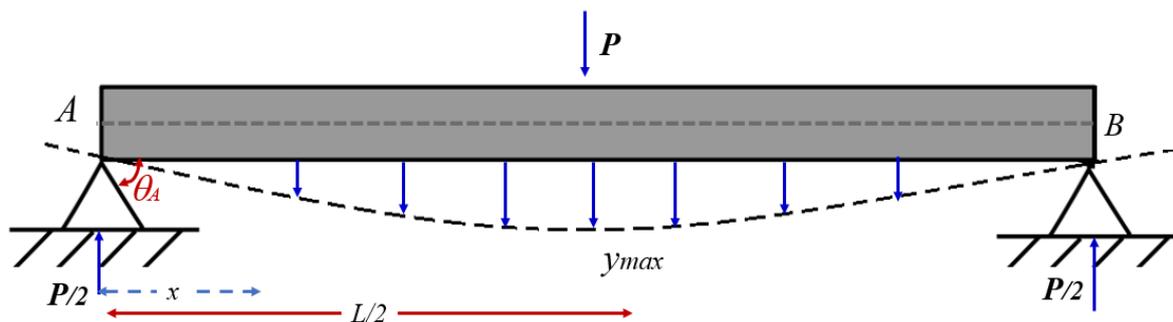
3. Resultados e Discussões

Nesta seção, são analisadas três aplicações envolvendo uma barra ou viga de aço prismática aproximadamente retilínea, delgada e elástica.

Caso 1: Equações da viga elástica delgada

A Fig.5 mostra uma barra aproximadamente retilínea, delgada e elástica onde uma força P , está atuando no seu ponto médio para baixo.

Figura 5. Deflexão da viga de aço submetida a uma força $\mathbf{P} = mg$



Fonte: Os autores.

Usando a Lei de Bernoulli [7] para curvaturas muito pequenas em barras elásticas aproximadamente retilíneas e delgadas, a equação do momento fletor da força $\frac{P}{2}$ em relação à x no apoio A é dada por

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2} x, \quad (8)$$

onde I é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo que passe pelo seu centro, enquanto E é o módulo de elasticidade de Young relacionado ao material que constitui a barra. Como não pode haver deslocamento vertical ou deflexão no apoio A (ou B), e considerando que a barra é constituída de um material homogêneo, pode-se adotar as seguintes condições de contorno

$$y(x_A = 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} \left(x = \frac{L}{2} \right) = 0. \quad (9)$$



Integrando duas vezes a eq. (8) na variável x e usando as condições dadas pela eq. (9) obtém-se a curva de deflexão da barra na forma

$$y = \frac{P}{48EI} x(4x^2 - 3L^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (10)$$

onde a deflexão máxima é dada por

$$y_{\max} = y\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI}. \quad (11)$$

Da eq. (10) resulta

$$\frac{dy}{dx}(x = x_0) = \operatorname{tg}(\theta_0) = \frac{P}{48EI} (12x_0^2 - 3L^2), \quad (12)$$

sendo θ_0 o ângulo que a tangente a curva elástica faz com o eixo horizontal da barra, isto é, $\theta_0 = \operatorname{arctg}\left[\frac{P}{48EI} (12x_0^2 - 3L^2)\right]$. Em particular, no apoio A , $\theta_A = \operatorname{arctg}\left(-\frac{PL^2}{16EI}\right)$. Como o

sistema é simétrico em relação a $x = \frac{L}{2}$, pode-se construir uma bijeção linear entre os intervalos $[0, L/2]$ e $[L/2, L]$ na forma $y_1 = y(L-x)$ na segunda seção da barra, ou seja, $\frac{L}{2} \leq x \leq L$.

Daí, podemos obter por derivação direta da função y_1 a relação entre as rotações nos apoios da viga

$$\frac{dy_1}{dx}(x = L) = -\frac{dy_1}{dx}(x_A = 0) = \theta_B = -\theta_A. \quad (13)$$

A eq. (10) é a forma mais comum da divulgação da curva elástica de deformação da barra analisada sob a ação de uma força externa concentrada \mathbf{P} em seu ponto central. Entretanto, outra metodologia, aqui desenvolvida neste estudo utiliza a equação fundamental da teoria das barras delgadas elásticas reportada por Synge e Griffith [7], na forma

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -P. \quad (14)$$

Vamos impor as seguintes condições cinemáticas nos apoios da viga

$$y(x_A = 0) = 0, \quad y(x_B = L) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(x_A = 0) = \alpha_A, \quad \frac{dy}{dx}(x_B = L) = -\alpha_A, \quad (15)$$

sendo $\alpha_A = \operatorname{tg}(\theta_A)$. A eq. (14) é resolvida por integração repetida quatro vezes em relação a variável x e, fazendo o uso das condições de contorno dadas pela eq. (15), obtém-se

$$y = \frac{1}{24EIL} \left[x(L-x)(-PL^2x + PLx^2 + 24\alpha_A EI) \right]. \quad (16)$$

Usando a equação para a energia de deformação U de um elemento de viga engastada e livre [12] resulta

$$U = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{4\alpha_A^2 EI}{L} + \frac{P^2 L^5}{720EI}. \quad (17)$$

Decorre do primeiro Teorema de Castigliano [2] que

$$k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \alpha_A} = \frac{8EI}{L}, \quad (18)$$

onde k_{11} é o momento no apoio A devido a um deslocamento de um ângulo unitário da viga horizontal em torno desse ponto. Dessa forma usando a equação de deslocamento, tem-se

$$\theta_A = (k_{11})^{-1} P = a_{11} P = \left[\left(-\frac{L}{8EI} \right) P \right] \Rightarrow \alpha_A = \text{tg}(\theta_A) = \text{tg} \left(-\frac{LP}{8EI} \right). \quad (19)$$

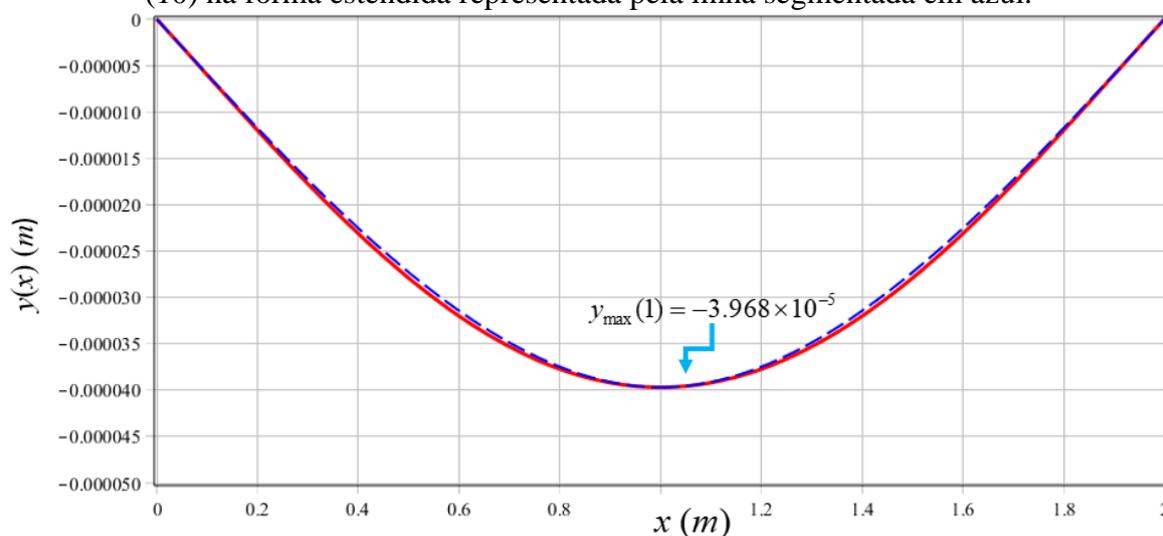
Das eqs. (16) e (19) tem-se a equação elástica da barra dada na forma

$$y = \frac{1}{24EIL} \left[x(L-x) \left(PLx^2 - PL^2x - 24 \text{tg} \left(\frac{PL}{8EI} \right) EI \right) \right]. \quad (20)$$

Portanto, as eqs. (10) e (20) constituem duas representações distintas para a elástica da barra quando submetidas a uma força \mathbf{P} dirigida para baixo aplicada em seu ponto médio. O uso da equação fundamental da teoria das barras delgadas elásticas utilizada nesse estudo, permite obter a curva de deformação da viga biapoiada em toda a sua extensão, enquanto a eq. (10), a mais comum, só pode ser originalmente aplicada no intervalo $[0, L/2]$. Além disso, a metodologia alternativa utiliza a energia de deformação U , a qual permite obter os momentos nos apoios da viga com o uso direto da eq. (17). Desse modo, essa forma o nosso ponto de vista, parece ser a mais adequada para ser aplicada no estudo das deflexões da viga, incluindo a análise de outras propriedades mecânicas da estrutura, como por exemplo, as tensões nos apoios.

A Figura 6 mostra os gráficos da curva de deflexão dada pela eq. (10) ou eq. (20) ao longo da barra com os parâmetros considerados para a viga especificados anteriormente e com a magnitude da força peso $P = 500 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 4905 \text{ N}$.

Figura 6. A elástica da barra dada pela eq. (20) na forma contínua em vermelho e com a eq. (10) na forma estendida representada pela linha segmentada em azul.



Fonte: Os autores.

A rotação angular em A é $\theta_A = -6,068 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ou $0,0035^\circ$, com $\theta_B = -\theta_A$, enquanto a deflexão máxima ocorre no ponto central $y_{\max} = y(L/2) = -3,968 \times 10^{-5} \text{ m}$. Como era de se esperar, esses valores são os mesmos para ambas as equações. Se a barra tivesse um engaste no ponto A, não haveria rotação nesse ponto, o que influencia uma menor rotação no apoio B. De fato, usando a função matriz de rigidez de barra de viga com quatro graus de liberdade [5] tem-se $\theta_B = \frac{PL}{8} \frac{L}{2EI} = 0,0017^\circ$, isto é, a rotação seria reduzida à metade nessa

extremidade livre. Usando por simplicidade à eq. (10), tem-se que $y_{\max} = y(L/2) = -\frac{PL^3}{48EI} = -P \cdot a_{22} \Rightarrow a_{22} = \frac{L^3}{48EI}$, onde a_{22} é o coeficiente de flexibilidade da barra no ponto (ou nó) $x = \frac{L}{2}$. Desse modo, o coeficiente de rigidez da barra nesse ponto é dado por $k_{22} = (a_{22})^{-1} = \frac{48EI}{L^3}$ que é o valor especificado na seção 1.1. A cinemática do movimento da viga nesse ponto central da barra pode ser representada mediante a equação do movimento dada por

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k_{22} y = 0, \quad (21)$$

que é um caso particular da eq. (7). A solução geral da eq. (21) pode ser posta na forma

$$y = C \text{sen}(\omega_0 t + \alpha), \quad (22)$$

onde α é o ângulo de fase. Considerando a carga de massa $m=500$ kg, resulta que a frequência circular do movimento $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{22}}{m}} = 497$ (rad/s). O período de oscilação é dado por

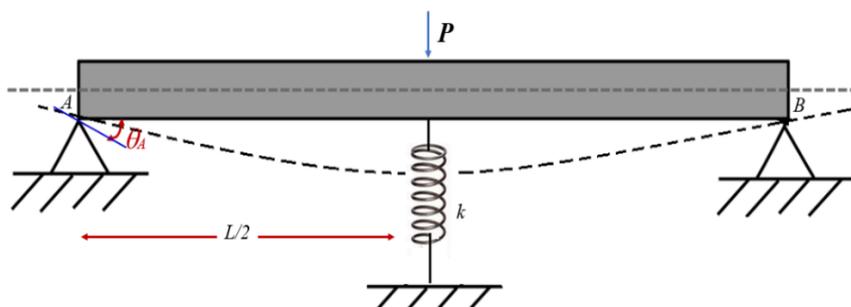
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,0126(s), \text{ enquanto frequência de oscilação é } f = \frac{1}{T} = 79,13(Hz). \text{ Se considerarmos as condições iniciais } y(0) = y_{\max} \text{ e } \frac{dy}{dt}(t=0) = 0, \text{ então a solução da eq. (21) é dada por}$$

$$y = y_{\max} \cos(\omega_0 t). \quad (23)$$

Caso 2: Mola sob a viga biapoiada no ponto médio

A Fig.7 mostra uma mola de rigidez $k \left(\frac{N}{m} \right)$ colocada abaixo da viga na posição vertical no ponto central em $x = \frac{L}{2}$ de modo a atenuar em α (%) aos deslocamentos verticais na viga devido à carga P nesse ponto.

Figura 7: Barra biapoiada com uma mola de rigidez k sob seu ponto central.



Fonte: Os autores.

Para obter a constante k de rigidez da mola é preciso resolver a equação do sistema em paralelo dada por $k^{Nova} = k + k_{22}$, onde $k_{22} = (a_{22})^{-1} = 48 \frac{EI}{L^3}$ é o coeficiente de rigidez da barra sem a mola. Usando a Lei de Hooke para pequenas deformações elásticas, resulta a nova



constante de rigidez do sistema $k^{Nova} = \frac{P}{(1-\alpha)|y_{\max}|}$, no qual o denominador expressa o percentual de redução da deflexão máxima da barra no ponto central.

Considerando os dados dos parâmetros da barra pode-se obter o valor da constante da mola $k = 4,120 \times 10^7 (N/m)$ sendo $k_{22} = 1,236 \times 10^8 (N/m)$ e $k^{Nova} = 1,648 \times 10^8 (N/m)$. Outro modo de obter a constante k^{Nova} é por meio da relação $k^{Nova} = \frac{1}{(1-\alpha)a_{22}}$. A justificativa para o valor da constante de rigidez k da mola a ser utilizada, vai depender do percentual de redução de deflexão máxima no ponto central da viga e, do coeficiente de rigidez da barra utilizada.

A equação da elástica do movimento de deflexão da barra com uma redução de até α (%) da curva de deflexões $y(x)$ no ponto central, pode ser obtida diretamente da eq. (8) com a inclusão do momento da força da mola $f_{mola} = k\delta$, onde $\delta = (1-\alpha)y_{\max}$, com respeito a força distribuída $\frac{P}{2}$ no apoio A , isto é,

$$IE \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{2}x + k\delta \frac{L}{2}. \quad (24)$$

Utilizando as mesmas condições iniciais da eq. (9), a solução da eq. (24) é dada por

$$y_k = \frac{x}{48EI} (3PL^2 - 4Px^2 + 12kL^2\delta - 12kL\delta x), \quad (25)$$

onde y_k vibra no máximo, em até α (%) do movimento original y , no ponto $x = \frac{L}{2}$. Portanto, para obter a deflexão da viga com $(1-\alpha)$ (%) do valor y no ponto central da viga, basta usar as eqs. (20) e (25) para obter

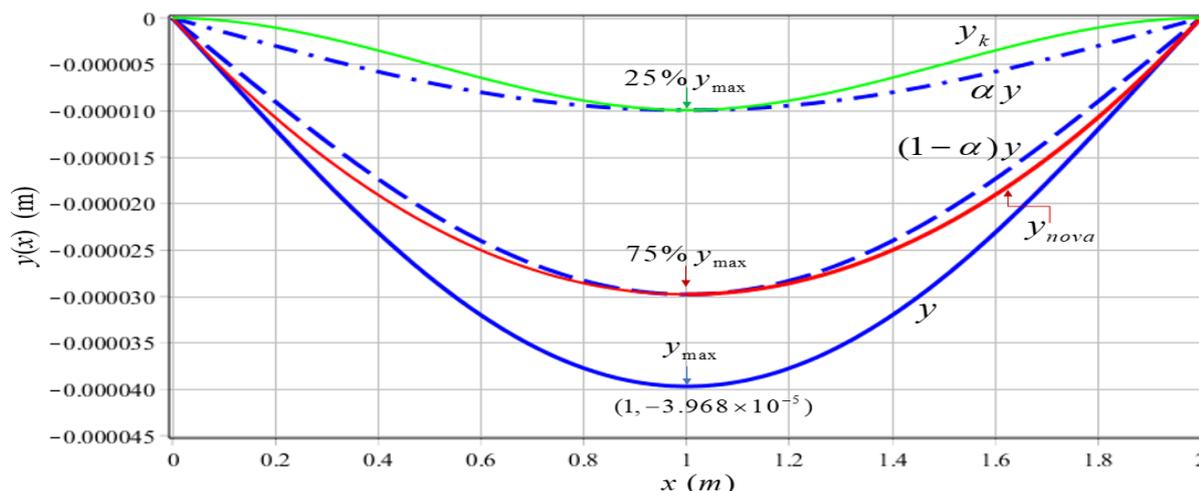
$$y_{nova} = \frac{x(L-x)}{24EI} (-PL^2x + PLx^2 + 24tg(\frac{-PL}{8EI})EI) - \frac{x}{48EI} (3PL^2 - 4Px^2 + 12kL^2\delta - 12kL\delta x), \quad (26)$$

em todo o intervalo $0 \leq x \leq L$.

A Fig. 8 mostra as curvas das diferenças das deflexões entre $(y_k, \alpha y)$ e $(y_{nova}, (1-\alpha)y)$, onde αy e $(1-\alpha)y$ seriam aproximações semiempíricas para as deflexões em toda a barra devido aos efeitos restritivos de deslocamentos verticais impostos pela mola.

É possível notar que αy e $(1-\alpha)y$ não constituem respectivamente boas aproximações para as elásticas y_k e y_{nova} , embora a aproximação $(1-\alpha)y$ seja mais fechada com y_{nova} onde o erro máximo é inferior a 12,5%, ocorrendo em $x_{\max} = -\frac{L(P\alpha - 4\delta k - P)}{P(1-\alpha)}$, isto é, em $x_{\max} = 0,333$ e $x_{\max} = 0,666$.

Figura 8: Perfil das elásticas y, y_k, y_{nova} no intervalo $0 \leq x \leq L$ da barra: A curva em azul representa a função y , em vermelho a curva y_{nova} e em verde a curva elástica y_k . As curvas semiempíricas estão representadas pelas linhas segmentadas em azul.



Fonte: Os autores.

A cinemática do movimento da barra na direção vertical em $x = \frac{L}{2}$ pode ser analisado de forma análogo a dada na eq. (21), isto é,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k^{nova} y = 0, \quad (27)$$

cujas solução geral é dada por

$$y = C \text{sen}(w_{nova} t + \alpha), \quad (28)$$

onde $w_{nova} = \sqrt{\frac{k^{nova}}{m}} = 574$ (rad/s) é a frequência circular do movimento com o período de oscilação

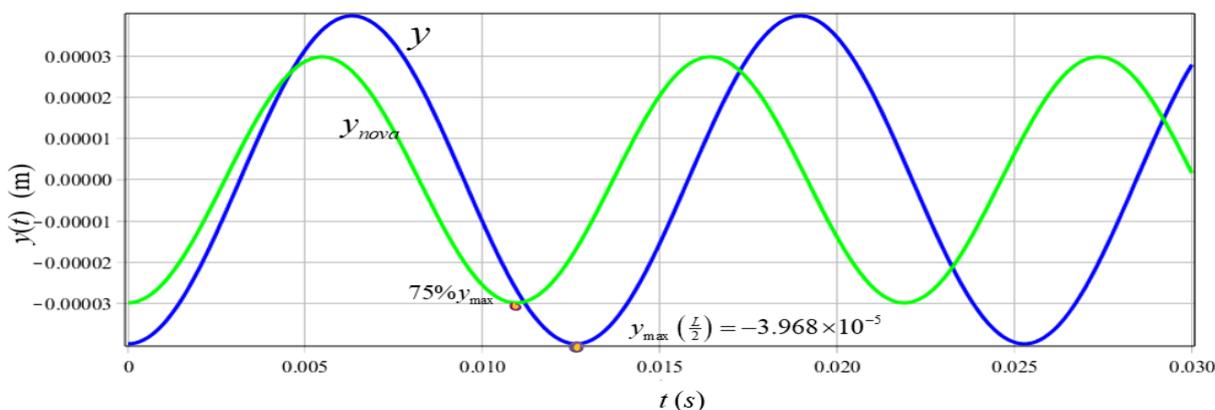
$T_{nova} = \frac{2\pi}{w_{nova}} = 0,0109$ (s) e a frequência de oscilação, $f_{nova} = \frac{1}{T_{nova}} = 91,37$ (s⁻¹). Se considerarmos as condições iniciais como $y(0) = (1-\alpha)y_{max}$ e $\frac{dy}{dt}(t=0) = 0$, então a solução da eq.

(22) é dada por

$$y_{Nova} = (1-\alpha)y_{max} \cos(w_{nova} t). \quad (29)$$

A Fig. 9 mostra o movimento da viga no ponto central com as condições iniciais dadas para o sistema com e, sem o uso da mola.

Figura 9. Representação do movimento da viga no ponto central (a) em azul a eq. (23) e (b) em verde a eq. (29).



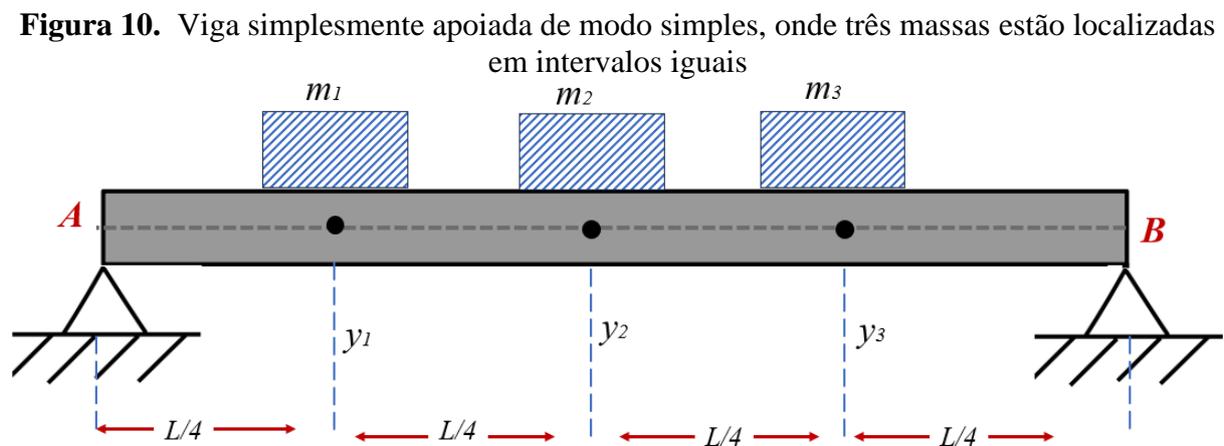
Fonte: Os autores.

Pode ser notado que as vibrações nessa posição com o uso da mola, tem amplitudes menores, períodos mais curtos e maior frequência de vibrações do que as oscilações nesse mesmo ponto sem o uso da mola. De fato, molas com maior coeficiente de rigidez provocam oscilações mais rápidas [13].

Devemos registrar que a elástica y_k dada pela eq. (25) poderia ser obtida para uma posição arbitrária dessa mola sob a viga e não somente para o ponto central. Para isso, bastaria modificar o momento da força da mola na eq. (24).

Caso 3: Barra elástica com cargas concentradas

A Fig. 10 mostra a viga analisada nos casos anteriores apoiada de forma simples nas extremidades, onde três massas estão localizadas sobre ela em intervalos de mesmo comprimento.



Fonte: Os autores.

As deflexões transversais totais na barra decorrentes da ação das massas m_i , $i = 1, 2, 3$ nos pontos indicados serão denotadas por $x_1 = \frac{L}{4}$, $x_2 = \frac{L}{2}$ e $x_3 = \frac{3L}{4}$. A matriz de flexibilidade do sistema é reportada por Rao [1] na forma

$$[a] = \frac{L^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Com base na eq. (10) foi possível obter todos os coeficientes de influência de flexibilidade dessa matriz, exceto o elemento $a_{13}(=a_{31})$. De fato, fazendo $P=1$ tem-se

$$\left| y \left(x = \frac{L}{2} \right) \right| = \frac{L^3}{48EI} = a_{22},$$

enquanto $a_{12} = a_{21} = \left| y \left(x = \frac{L}{4} \right) \right| = \frac{11L^3}{768EI}$. Usando $y_1 = y(L-x)$,

$$a_{32} = a_{23} = \left| y_1 \left(x = \frac{3L}{4} \right) \right| = \left| y \left(L - \frac{3L}{4} \right) \right| = \left| y \left(x = \frac{L}{4} \right) \right| = \frac{11L^3}{768EI}.$$

Para o nó $x = \frac{L}{4}$, consideramos a cúbica $EI y = \frac{1}{12} x^3 + C_1 x + C_2$ no intervalo $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$ com as condições iniciais $y(x=0) = 0$ e $\frac{dy}{dx} \left(x = \frac{L}{4} \right) = 0$ onde se obtém $a_{11} = \frac{9L^3}{768EI} (=a_{33})$.



Para determinar o coeficiente $a_{13}(=a_{31})$, usamos a Lei de Hooke. De fato, considere a reta passando pelos pontos $\left(\frac{L}{2}, a_{23}\right)$ e $\left(\frac{3L}{4}, a_{13}\right)$ com a inclinação $k = -\frac{8}{768}\left(\frac{L^2}{EI}\right)$, simétrica da inclinação que passa pelos pontos $\left(\frac{L}{4}, a_{33}\right)$ e $\left(\frac{L}{2}, a_{23}\right)$. Portanto,

$$\frac{a_{13} - \frac{11}{768}\left(\frac{L^3}{EI}\right)}{\frac{L}{2}} = -\frac{8}{768}\left(\frac{L^2}{EI}\right) \Rightarrow a_{13}(=a_{31}) = \frac{7}{768}\left(\frac{L^3}{EI}\right). \quad (31)$$

Um possível modo de “estimar” o coeficiente a_{13} é por meio de um polinômio cúbico $u = u(x)$ passando pelos pontos $(0,0)$, $\left(\frac{L}{2}, a_{23}\right)$, $\left(\frac{3L}{4}, a_{33}\right)$ e $(L,0)$. Tal polinômio constitui uma aproximação para $u = u\left(x = \frac{L}{4}\right) \cong a_{13}(=a_{31})$, pois ele “traz” informações sobre a influência da força unitária aplicada nos nós $\frac{L}{2}$ e $\frac{3L}{4}$. Resolvendo o polinômio interpolatório por meio de um sistema linear de ordem três, resulta

$$u = \frac{3}{64} \frac{L^2}{EI} x - \frac{5}{192} \frac{L^2}{EI} x^2 - \frac{1}{48EI} x^3,$$

onde $a_{13} \cong u\left(x = \frac{L}{4}\right) = \frac{7.5}{768} \frac{L^3}{EI}$, com erro por excesso de aproximadamente 7% em relação ao valor exato $\frac{7}{768EI} L^3$.

Entretanto, a matriz de flexibilidade pode ter um número de condição elevado, o que acontece nesse caso. Então, mesmo pequenas perturbações nos coeficientes da matriz $[a]$, podem causar grandes variações no cômputo da inversa, o que conduziria a resultados erráticos. Vimos que a equação $\{Def\} = [a]\{q\}$ estabelece uma relação linear entre a carga concentrada na forma de força peso e a deformação ou deflexão local. Considerando a viga da Fig. 10 com as mesmas especificações utilizadas nos casos anteriormente analisados e, com massas $m_1 = 100$, $m_2 = 500$ e $m_3 = 200$ (Kg) sendo o vetor de forças externas $\{q\}$ com orientação negativa, sendo que cada massa é multiplicada pela gravidade $g = 9,81(m.s^{-2})$. O vetor de deflexão $\{Def\}$ nos três pontos equidistantes é dado por

$$\{Def\} = \begin{pmatrix} y_1 = -3,8692 \\ y_2 = -5,6054 \\ y_3 = -3,9684 \end{pmatrix} \times 10^{-5} (m), \quad (32)$$

sendo que y_i ; $i = 1, 2, 3$ denota a deflexão total em cada nó da discretização da barra. Da matriz de flexibilidade obtém-se a matriz de rigidez do sistema na forma

$$[k] = [a]^{-1} = \frac{768EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0,8214 & -0,7857 & 0,3214 \\ -0,7857 & 1,1429 & -0,7857 \\ 0,3214 & -0,7857 & 0,8214 \end{bmatrix}. \quad (33)$$



Caso usássemos o coeficiente $a_{13} \cong u\left(x = \frac{L}{4}\right) = \frac{7,5}{768} \frac{L^3}{EI}$ obtido por interpolação cúbica, a matriz de rigidez seria

$$[k] = [a]^{-1} = \frac{768EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0,6970 & -0,500 & 0,0303 \\ -0,5000 & 0,7500 & -0,5000 \\ 0,0303 & -0,5000 & 0,6970 \end{bmatrix} \quad (34)$$

muito diferente da matriz dada pela eq. (33).

Usando a eq. (7): $(MD^2 + [k])Y = 0$, é possível obter informações sobre a cinemática do movimento livre da viga nos pontos onde são colocadas as massas. Por exemplo, vamos adotar as condições iniciais naturais $Y(t=0) = (y_1, y_2, y_3)^T$ e $\frac{dY}{dt}(t=0) = (0, 0, 0)^T$ onde

$\{Def\} = (y_1, y_2, y_3)^T$ é o vetor de deflexão total nos pontos considerados devido à ação das cargas colocadas sobre a viga dado pela eq. (32). A equação do movimento é dado pela eq. (7a) por $Y = M^{1/2}QU$, onde a partir das condições iniciais pode se obter $A_1 = -1,859 \times 10^{-6} \approx 0$,

$A_2 = 2,770 \times 10^{-6} \approx 0$ e $A_3 = -1,427 \times 10^{-3}$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ onde

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0,8062 \\ -0,4296 \\ 0,4069 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0,5258 \\ 0,2051 \\ -0,8255 \end{pmatrix} \text{ e } \beta_3 = \begin{pmatrix} 0,2712 \\ 0,8794 \\ 0,3912 \end{pmatrix},$$

são os autovetores ortonormais da matriz S com $\lambda_1 = 2,2211 \times 10^7$, $\lambda_2 = 6,4795 \times 10^6$ e $\lambda_3 = 1,9189 \times 10^5$ os seus respectivos autovalores. As amplitudes A_i , $i = 1, 2, 3$ foram calcula-

das por meio da equação $u = Q^T M^{\frac{1}{2}} Y$, aplicada no tempo $t = 0$ e usando as condições iniciais. A representação do movimento da barra nesses pontos é dada pela eq (7a), ou seja,

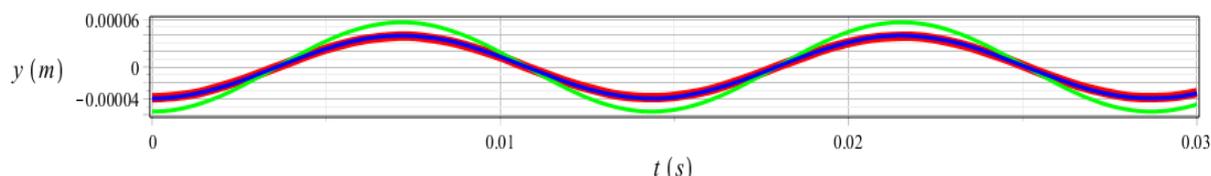
$$Y = \begin{bmatrix} 9,055 \times 10^{-5} \cos(\omega_1 t) - 2,510 \times 10^{-5} \cos(\omega_2 t) - 2,676 \times 10^{-5} \cos(\omega_3 t) \\ 2,641 \times 10^{-5} \cos(\omega_1 t) + 0,536 \times 10^{-5} \cos(\omega_2 t) + 2,423 \times 10^{-5} \cos(\omega_3 t) \\ 2,154 \times 10^{-5} \cos(\omega_1 t) + 3,634 \times 10^{-5} \cos(\omega_2 t) - 1,812 \times 10^{-5} \cos(\omega_3 t) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

onde $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$; $i = 1, 2, 3$ são as frequências naturais de vibrações, onde cada coordenada de Y representa respectivamente, o movimento vibratório, y_i ; $i = 1, 2, 3$ nos respectivos pontos de discretização.

A Fig. 11 mostra o comportamento das deflexões nos pontos da discretização da barra. Todas as curvas estão aproximadamente em fase, ou seja, o movimento é simétrico nesses pontos com a maior vibração, como era de se esperar, ocorrendo no ponto médio da barra, enquanto as vibrações no ponto $x_1 = \frac{L}{4}$ são ligeiramente inferiores às vibrações no ponto $x_3 = \frac{3L}{4}$.

Figura 11- Movimento vibratório da barra elástica considerando as condições iniciais

$$Y(t=0) = (y_1, y_2, y_3)^T \text{ e } \frac{dY}{dt}(t=0) = (0,0,0)^T .$$



Fonte: Os autores.

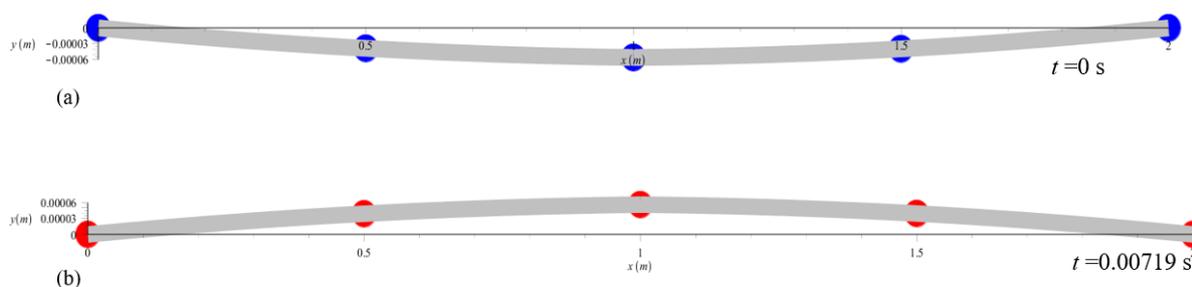
A Fig. 11 mostra o movimento vibratório da viga nos pontos considerados da discretização com a variação do tempo. A curva em vermelho representa o movimento da viga no ponto $x_1 = \frac{L}{4}$, já a curva em verde, o movimento vibratório no ponto central, enquanto a curva em azul o movimento de vibração no ponto $x_3 = \frac{3L}{4}$.

Os limites máximos e mínimos dessas vibrações são dados respectivamente $\pm y_i, i = 1, 2, 3$ como na eq. (32). Como as amplitudes A_1 e A_2 são muito pequenas, as vibrações encontram-se fechadas com a frequência natural, ω_3 cujo período de vibração é $T = 0,0144$ s.

A Fig. 12 mostra de modo pictórico uma imagem de como seria o comportamento da deflexão da viga em toda a sua extensão em determinados instantes de tempo.

Figura 12- Deformação da viga em 2 tempos $t_1 = 0, t_2 = 0,007187$ s onde

$$t_i \rightarrow P_i = \{(0,0), (\frac{L}{4}, y_1(t_i)), (\frac{L}{2}, y_2(t_i)), (\frac{3L}{4}, y_3(t_i)), (L,0)\}, \quad i = 1, 2, 3$$



A representação da deformação aproximada em toda a viga foi obtida usando curvas de aproximações parabólicas considerando os pontos P_1 e P_2 . No tempo $t_1 = 0$ usando a eq. (35) obtém-se o conjunto P_1 que é ajustado por uma curva parabólica conforme mostra a Fig. 12(a). No tempo $t_2 = 0,007187$ s, obtém-se o conjunto de pontos P_2 , que também é ajustado por uma curva parabólica conforme mostra a Fig. 12(b). Essas curvas quadráticas de aproximação foram obtidas usando o método dos mínimos quadrados [14]. Desse modo, as deformações não forçadas sobre a viga, resultam em oscilações quase imperceptíveis para a observação humana, onde a viga oscila para cima e para baixo em intervalos de tempo $nT; n=1,2,\dots$. Em particular, a aplicação 3 permite estudar, dadas as condições iniciais, o movimento vibratório da viga em toda a extensão da estrutura, mediante curvas de aproximações como as usadas na Fig. 12.



Conclusões

A equação da curva elástica da primeira aplicação foi obtida com as condições de contorno adotadas exclusivamente nos extremos da viga. Essa equação ficou em boa concordância com a elástica das deformações na sua forma mais comum, onde as condições iniciais são impostas somente em uma de suas extremidades e, em seu ponto médio. A equação da curva elástica da segunda aplicação foi obtida, combinando a equação do momento fletor da força $P/2$ em relação à x no apoio A , com o momento da força da mola em relação a esse mesmo ponto. O uso de uma equação semiempírica para modelar as deformações sofridas pela barra com o uso da mola, mostrou variações de até 12,5% em relação à elástica obtida para essa mesma aplicação.

No terceiro caso, três cargas foram dispostas sobre a barra, de modo equidistantes, onde as deflexões locais puderam ser estimadas a partir da matriz de flexibilidade do sistema. Essa matriz foi aqui deduzida a partir da elástica da primeira aplicação combinada com a hipótese da linearidade geométrica da deformação de acordo com a Lei de Hooke. Devido ao mal condicionamento da matriz de flexibilidade do sistema analisado nesse estudo, a estimação de apenas dois de seus parâmetros por meio de polinômios interpolatórios deu origem a uma matriz de rigidez com erros significativos em seus elementos. A partir das deflexões locais o movimento cinemático não forçado em cada um dos pontos da discretização da viga, pode ser obtido. Os movimentos vibratórios nos pontos da discretização adotada ocorrem no mesmo modo de vibração do corpo de massa intermediária. O uso de curvas de ajustes pelo método dos mínimos quadrados para as deformações locais em certos instantes de tempo permitiu obter uma representação pictórica para a deformação da viga em toda a sua extensão nos mesmos instantes de tempo considerados.

Referências

- [1] RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. 5 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.
- [2] HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. Tradução Arlete Simille Marques. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [3] COSTA, R. de S. **Um estudo de equações diferenciais aplicado à flexão de vigas**. Orientador: Mario Conrado Cavichia. 2010. 93 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- [4] MONTEIRO, A. B.; WOLENSKI, A.R. V.; CHRISTOFORO, A. L. Determinação aproximada da elástica de vigas segundo o método dos elementos finitos com o uso de funções polinomiais interpolativas. *In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA, 2., 2009, Sinop. Anais [...]. Sinop: UNEMAT, 2009. p.1-12.*
- [5] WERNECK, L. de P. *et al.* Estimativa da frequência fundamental de vibração em vigas a partir da teoria da linha elástica associada ao quociente de Rayleigh. **Brazilian Journal of Development**. v. 6, n. 7, p. 50450-50470, 2020.
- [6] SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.



-
- [7] SYNGE, J. L.; GRIFFITH, B. A. **Mecânica racional**. Tradução de Nelson França Furtado. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1968.
- [8] SEARS, F. W.; ZEMANSKY, M. W. **Física**. Tradução José de Lima Accioli e equipe do Departamento de Física da Universidade de Brasília. Rio de Janeiro: LTC, 1977. v. 1.
- [9] ÁVILA, G. **Cálculo das funções de múltiplas variáveis**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 3.
- [10] THOMPSON, W. T. **Teoria das vibrações com aplicações**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [11] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JUNIOR, W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.
- [12] CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. Tradução Sergio Murilo Stamile Soares, 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [13] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [14] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson/Makron Brooks, 2006.