

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Flank David Morais Bezerra

Universidade Federal da Paraíba
(UFPB), Centro de Ciências Exatas
e da Natureza (CCEN), João Pessoa,
flank@mat.ufpb.br

Leonardo Pires

Universidade Estadual de Ponta
Grossa (UEPG), Ponta Grossa

Oscilações na área do quadrado

Oscillates in the area of the square

Resumo

Neste artigo, discutimos como o conhecimento do cálculo diferencial e integral pode auxiliar os professores na elaboração de atividades para o ensino básico. Para isso, examinamos como inferir aproximadamente a área da região no plano xy delimitada pelo gráfico da função $x \in [0, 1] \mapsto 1 + \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n})$, com $n \in \mathbb{N}$, além dos eixos x e y e da reta $x = 1$. Utilizamos elementos da matemática elementar, conforme abordados no ensino básico, para obter fórmulas aproximadas. A justificativa da eficiência de tais fórmulas, no entanto, é realizada por meio do cálculo diferencial e integral. Também mostramos como essa análise pode ser aplicada ao cálculo aproximado de áreas de figuras planas obtidas pela variação dos lados de polígonos utilizando funções trigonométricas. Para isso, definimos a noção de funções com bom comportamento oscilatório.

As figuras e animações foram produzidas com os pacotes gráficos $\text{\LaTeX}$ `animate`, `tikz`, `tkz-euclide` e `pgfplots`.

Palavras-chave: Animate. Área. Oscilação. Quadrado. Tikz.

Abstract

In this article, we discuss how knowledge of differential and integral calculus can assist teachers in designing activities for basic education. To this end, we examine how to approximately infer the area of the region in the xy plane bounded by the graph of the function $x \in [0, 1] \mapsto 1 + \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n})$, with $n \in \mathbb{N}$, as well as by the axes x and y and the line $x = 1$. We utilize elements of elementary mathematics, as addressed in basic education, to obtain approximate formulas. However, the justification for the efficiency of such formulas is provided through differential and integral calculus. We also show how this analysis can be applied to the approximate calculation of areas of planar figures obtained by varying the sides of polygons using trigonometric functions. To do this, we define the notion of functions with good oscillatory behavior.

The figures and animations were produced using the $\text{\LaTeX}$ graphic packages `animate`, `tikz`, `tkz-euclide`, and `pgfplots`.

Keywords: Animate. Area. Oscillates. Square. Tikz.



1 Introdução

O estudo de funções reais de uma variável real com comportamento oscilatório apresenta importantes aplicações em diversos ramos das ciências exatas e naturais, como Engenharias, Estatística, Finanças, Física, Química, Matemática, entre outros. Segundo Lima [1], o desenvolvimento das funções periódicas teve avanços significativos com a descoberta de Joseph Fourier em 1822 [2], que demonstrou que toda função periódica pode ser escrita como uma soma de funções do tipo $f(x) = b \cos(ax) + b \sin(ax)$, onde a e b são constantes. O estudo da Trigonometria, em particular o estudo de funções dessa forma, compõe atualmente parte do currículo do Ensino Básico em Matemática. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira [3], no que se refere à Trigonometria, destaca: “[...] resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.”

Na Geometria Euclidiana, um tópico fundamental é o estudo de áreas de figuras planas, e um ponto de partida pode ser o cálculo da área de um quadrado, método usado para obter as fórmulas para o cálculo de áreas de alguns quadriláteros, como o retângulo, paralelogramo, trapézio e losango. Além disso, com o cálculo da área de quadrados, podemos obter algumas das fórmulas mais conhecidas para o cálculo de áreas de figuras planas. Formalmente, é necessário o seguinte postulado, conhecido como postulado de Euclides para áreas, veja [4] e [5].

Axioma da área. Existe uma única função área α com a propriedade que $\alpha(Q) = 1$ sempre que Q é um quadrado com lados de comprimento 1.

As conexões entre conteúdos matemáticos auxiliam no processo de ensino/aprendizagem e contribuem para a formação do pensamento abstrato dos alunos. Relacionar o cálculo de área de figuras planas com a trigonometria proporciona ao aluno a ideia de que a geometria não é somente um conjunto de fórmulas estáticas previamente estabelecidas. Calcular, mesmo que de forma aproximada, a área de uma figura plana que difere das usuais apresentadas nos livros-texto permite ao aluno compreender que a Matemática se encontra no centro do processo de criação. Além disso, esse processo pode proporcionar ao aluno, através de investigação matemática, a obtenção de um método para o cálculo de área de uma figura plana diferente das usuais. Dito isto, nosso primeiro objetivo neste artigo é estudar, do ponto de vista do Ensino Básico, áreas de figuras planas através da variação dos lados de polígonos usando funções trigonométricas.

É importante esclarecer que as atividades envolvendo o cálculo aproximado de áreas utilizam conceitos de Matemática elementar, voltados ao nível básico, para facilitar a compreensão dos alunos. No entanto, algumas justificativas, especialmente aquelas relacionadas ao comportamento das funções oscilatórias, requerem o uso de conceitos de cálculo diferencial e integral. Esses tópicos, mais avançados, são destinados ao professor, para que ele compreenda e possa embasar adequadamente as atividades aplicadas em sala de aula.

Nosso segundo objetivo é fornecer ao leitor recursos pedagógicos para a elaboração de atividades voltadas ao Ensino Básico. Para isto, utilizaremos uma linguagem computacional apropriada para a diagramação de textos de Matemática, a saber, o $\text{\LaTeX}$. Mais precisamente, utilizaremos o pacote gráfico TikZ, que permite a produção, edição e compartilhamento de desenhos gráficos com alta qualidade. Dessa forma, alertamos que nosso segundo objetivo é utilizar funcionalidades dos pacotes gráficos $\text{\LaTeX}$ Animate e TikZ com a finalidade de produzir figuras e animações.

Abaixo, tabelamos, veja Tabela 1, a combinação adequada entre leitores de texto PDF e sistemas operacionais, a fim de termos um funcionamento adequado das animações presentes neste texto,

veja também a Tabela 1 em [6].

Leitor/Sistemas	Linux	MacOS	Windows
Adobe A. Reader		ok	ok
KDE Okular	ok		ok
PDF-XChange			ok
Foxit PDF Reader		ok	ok

Tabela 1: ok: reproduz a animação

A estrutura deste artigo é organizada da seguinte forma. Na Seção 2, definimos o conceito de oscilação e discutimos a área de um quadrado como base para nossos estudos. Na Seção 3, analisamos os zeros da função $f_n - 1$. Na Seção 4, apresentamos as principais conclusões de nosso estudo. Finalmente, no Apêndice, incluímos os códigos em $\text{\LaTeX}$ utilizados para a geração dos gráficos, figuras e animações presentes neste texto.

Em todo o presente texto, ‘ $u.m$ ’ denota ‘unidade de medida’ e ‘ $u.a$ ’ denota ‘unidade de área’.

2 Oscilação da área do quadrado

Consideramos um quadrado Q no plano xy cujos lados medem 1 unidade de medida (u.m.) e denotamos sua área por $\alpha(Q)$. De acordo com o Axioma da área mencionado anteriormente, temos que $\alpha(Q) = 1$ unidade de área (u.a.). Além disso, consideramos a região Q_n no plano xy , definida da seguinte forma:

$$Q_n = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n})\},$$

onde n é um número natural.

Abaixo, na Figura 1, ilustramos o quadrado Q ; na Figura 2, apresentamos a região Q_n para o valor $n = 30$.

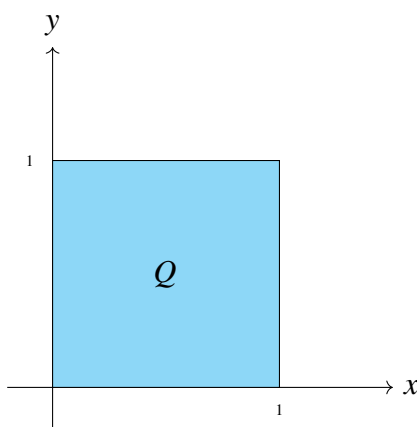


Figura 1: Quadrado de lado igual a 1 u.m

As figuras 3 e 4 abaixo são animações que ilustram o comportamento oscilatório da região Q_n . Com a ajuda dessas animações, o leitor pode visualizar de maneira mais clara como pretendemos comparar as quantidades $\alpha(Q)$ e $\alpha(Q_n)$ para valores de n suficientemente grandes.

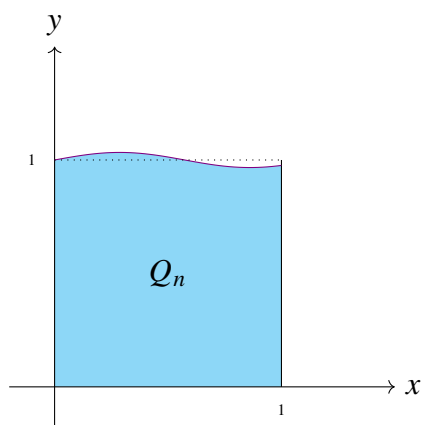


Figura 2: Oscilação da área do quadrado

Figura 3: Oscilando a área do quadrado

Figura 4: Gráfico da função $f_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n})$ com $x \in [-\frac{7\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}]$

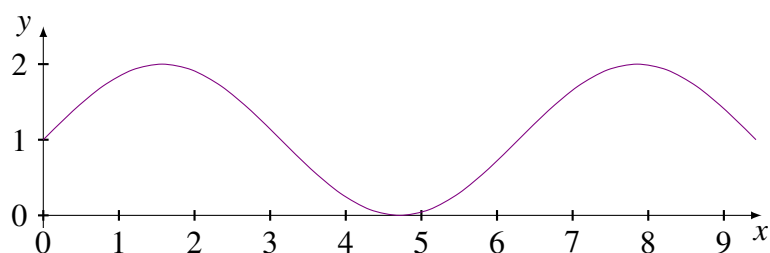


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = 1 + \sin(x)$ com $x \in [0, 3\pi]$

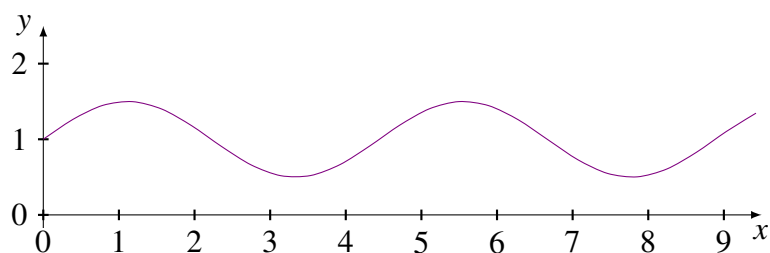


Figura 6: Gráfico da função $f_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(x\sqrt{2})$ com $x \in [0, 3\pi]$

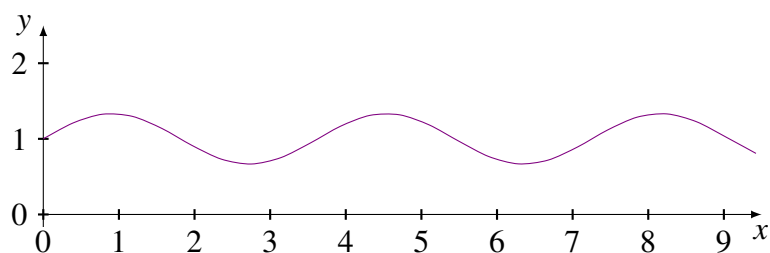


Figura 7: Gráfico da função $f_3(x) = 1 + \frac{1}{3} \sin(x\sqrt{3})$ com $x \in [0, 3\pi]$

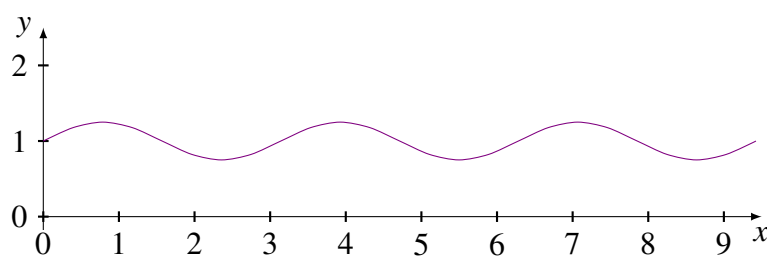


Figura 8: Gráfico da função $f_4(x) = 1 + \frac{1}{4} \text{sen}(2x)$ com $x \in [0, 3\pi]$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \text{sen}(x\sqrt{n}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Intuitivamente, o gráfico da função f_n , restrito ao intervalo $[0, 1]$, se aproxima do lado superior do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. A função f_n converge uniformemente para a função $f_\infty \equiv 1$ no intervalo $[0, 1]$ à medida que n tende ao infinito. Para mais detalhes sobre os modos de convergência de sequências de funções reais de uma variável real, consulte [7].

Dessa forma, o principal objetivo deste artigo é compreender que, quanto maior o valor de n , menor é a quantidade $|\alpha(Q_n) - \alpha(Q)|$. Em outras palavras, à medida que n aumenta, a área de Q_n se torna cada vez mais próxima da área de Q . Neste contexto, dizemos que a área de Q_n é uma oscilação da área do quadrado Q para todo inteiro positivo n .

Com o auxílio do cálculo integral de funções reais de uma variável real, podemos calcular a área de Q_n ; no entanto, o bom comportamento oscilatório de f_n nos permite aproximar a área de Q_n sem a necessidade de utilizar o conceito de integral, mantendo-nos confortáveis no contexto da Matemática elementar, tal como abordada no Ensino Básico.

Veremos na próxima seção que o bom comportamento de f_n é fundamental para nossa discussão. Observamos que $f_n(1) \neq 1$, e assim $|\alpha(Q_n) - \alpha(Q)| \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esse fato pode ser visualizado na Figura 4, assim como nas figuras 5, 6, 7 e 8. Note que, embora o gráfico de f_n oscile, ele nunca toca o ponto do plano cartesiano $(1, 1)$ antes que o processo de “passagem ao limite” seja concluído. Dessa forma, o problema a ser considerado neste artigo é encontrar uma fórmula aproximada para $\alpha(Q_n)$.

Definição 1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se chama *periódica* quando existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor positivo T satisfazendo a igualdade acima é chamado o *período fundamental* de f .

Por exemplo, sejam $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e considere a função $f_{abc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_{abc}(x) = a + b \text{sen}(cx)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O período fundamental de f_{abc} é dado por $T = \frac{2\pi}{|c|}$.

Na expressão de f_{abc} , o parâmetro b fornece a amplitude do gráfico de f em relação ao eixo x , e isso está associado com o tamanho da onda que representa geometricamente o gráfico de f_{abc} . Além disso, quanto menor é o período T maior é o número de oscilações apresentadas pelo gráfico de f e, quanto menor é a amplitude b mais próximo da reta $y = a$ o gráfico de f está.

Agora, para $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, defina

$$f_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \text{sen}(x\sqrt{n}).$$

Fixado n , temos $a_n = 1$, $b_n = 1/n$ e $c_n = \sqrt{n}$ e o período de f_n é dado por

$$T_{f_n} = \frac{2\pi}{|\sqrt{n}|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Quanto à amplitude de f_n , o parâmetro $b_n = \frac{1}{n}$ nos fornece a amplitude do gráfico, onde

$$b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isso, quando $n \rightarrow \infty$ o gráfico de $f_n \rightarrow 1$ uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Desta forma, o gráfico de f_n oscila muito para valores grandes de n mas, por contra partida, a amplitude fica muito pequena, veja novamente Figura 3.

Em contraste com f_n , para cada $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, definamos a função

$$g_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \sin(xn^2).$$

Fixado n , temos $a_n = 1$, $b_n = 1/n$ e $c_n = n^2$ e o período de g_n é dado por

$$T_{g_n} = \frac{2\pi}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Quanto à amplitude de g_n , o parâmetro $b_n = \frac{1}{n}$ nos fornece a amplitude do gráfico, onde

$$b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isso, quando $n \rightarrow \infty$ o gráfico de $g_n \rightarrow 1$ uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Desta forma, o gráfico de g_n oscila muito para valores grandes de n mas, por contra partida, a amplitude fica muito pequena.

Num primeiro momento poderíamos erroneamente pensar que f_n e g_n têm o mesmo comportamento. No entanto, na Figura 9 abaixo, apresentamos os gráficos de f_n e g_n .

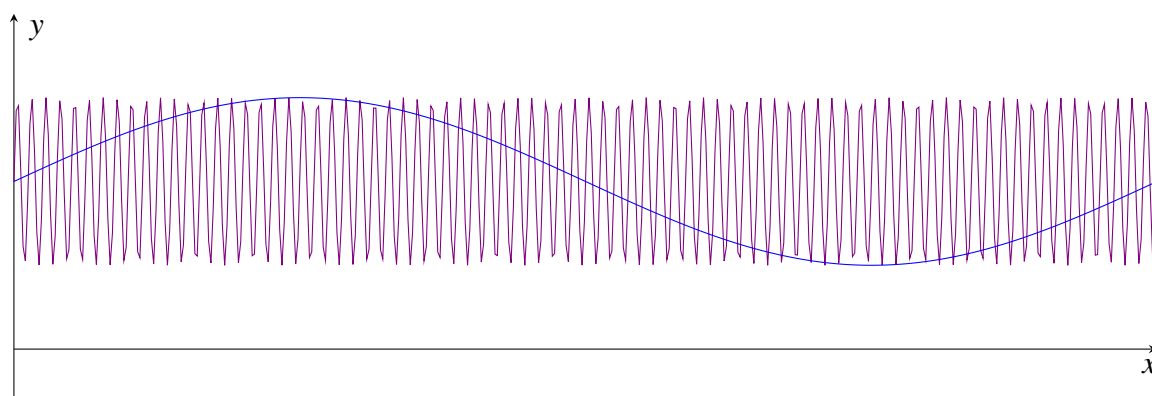


Figura 9: Gráficos de f_n (azul) e g_n (violeta)

Observando a Figura 9, vemos que o gráfico de g_n em violeta oscila bem mais rápido que o gráfico de f_n em azul. Isto poderia ser analiticamente observado comparando as convergências (1) e (2). Mas, a discrepância na velocidade com que o período de g_n converge a zero em relação ao período de f_n não parecia evidente até analisarmos seus gráficos. A diferença de comportamento

de f_n e g_n pode ser analiticamente observada quando calculamos o comprimento dos gráficos no intervalo $[0, 1]$.

Relembre que para uma função continuamente diferenciável $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, seu comprimento de gráfico é dado pela expressão

$$\ell(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3)$$

Aplicando (3) para f_n e g_n , obtemos

$$\ell(f_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{n} \cos^2(x\sqrt{n})} dx \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$\ell(g_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 \cos^2(xn^2)} dx \rightarrow \infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Definição 2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica com período fundamental $T_n > 0$. Diremos que a sequência de funções periódicas $(f_n)_n$ possui bom comportamento oscilatório quando f_n converge uniformemente para uma constante f_∞ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(f_n) < \infty$.

Concordando com a definição acima, temos que f_n possui bom comportamento oscilatório ao passo que, g_n não possui bom comportamento oscilatório. Por esse motivo utilizamos f_n na definição do conjunto Q_n .

3 Número de mudança de sinal de uma função

No que segue, daremos enfoque no comportamento da função f_n . Outra propriedade que nos dá informações no comportamento de uma função é o número de raízes que ela possui.

Definição 3 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diremos que $x \in X$ é uma raiz de uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando $f(x) = 0$.

Definição 4 Dada uma função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, definamos o número de mudança de sinal de f , e denotamos por $v(f)$, como o número de componentes conexas do conjunto $\{x \in (0, 1) : f(x) \neq 0\}$ menos um. Alternativamente,

$$v(f) = \sup\{m \geq 0 : \text{existe } 0 < x_0 < x_1 < \dots < x_m < 1 \text{ tais que } f(x_i)f(x_{i-1}) < 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Consideremos a função $f_n - 1$. Note que

$$\frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n}) = 0 \iff \sin(x\sqrt{n}) = 0 \iff x\sqrt{n} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, as raízes de $f_n - 1$ são dadas pela seguinte expressão

$$x_k = \frac{k\pi}{\sqrt{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, para quaisquer valores de $n \neq 0$ e $k \neq 0$, as raízes x_k de $f_n - 1$ são sempre irracionais. Assim, a única raiz inteira de $f_n - 1$ é $x_0 = 0$ e, conseqüentemente, $x = 1$ não é raiz de $f_n - 1$, justificando assim a afirmação feita na seção anterior de que $|\alpha(Q_n) - \alpha(Q)| \neq 0$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. No entanto, $|\alpha(Q_n) - \alpha(Q)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Sobre a quantidade de raízes que existem no intervalo $[0, 1]$, temos que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, devemos ter

$$\frac{k\pi}{\sqrt{n}} < 1 \iff k\pi < \sqrt{n} \iff k < \frac{\sqrt{n}}{\pi}.$$

Portanto, $\nu(f_n - 1) < \frac{\pi}{\sqrt{n}}$, isto é, $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ é um limitante superior para o número de mudança de sinais de $f_n - 1$.

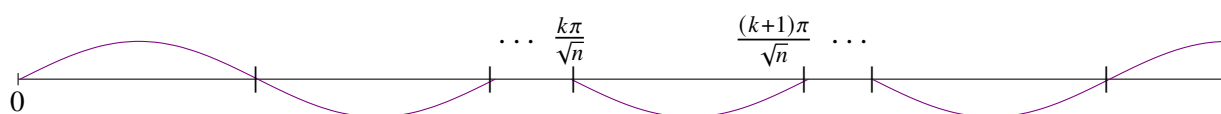


Figura 10: Raízes de $f_n - 1$

Na Tabela 2 abaixo, apresentamos alguns valores segundo a variação do parâmetro n .

n	$\approx \frac{\sqrt{n}}{\pi}$	$\nu(f_n - 1)$	Componentes	Número de Raízes
10	0,31	0	1	1
100	1	1	2	2
1000	3,18	3	4	4
10000	10,06	10	11	11
100000	31,83	31	32	32
1000000	100,65	100	101	101
10000000	318,30	3000	301	301

Tabela 2: Quantidade de raízes de $f_n - 1$ em $[0, 1]$

Quanto à distância entre duas raízes de índices consecutivos de $f_n - 1$, perceba que

$$|x_{k+1} - x_k| = (k+1) \frac{\pi}{\sqrt{n}} - \frac{k\pi}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Note que a distância entre as raízes independe de k . Assim, vemos que as raízes estão igualmente espaçadas no intervalo $[0, 1]$. Esta propriedade será fundamental para obtermos aproximações para a área de Q_n .

4 Aproximações geométricas

Nesta seção, encontraremos algumas fórmulas para aproximar $\alpha(Q_n)$. Observamos que

$$|\alpha(Q_n) - \alpha(Q)| \neq 0, \quad \text{mas} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha(Q_n) - \alpha(Q)| \rightarrow 0.$$

Assim, temos um controle sobre a área de Q_n e, uma vez que ela se aproxima de Q , teremos a estimativa superior de 1 u.a. para nossas fórmulas. De fato, sabemos do Cálculo Diferencial e Integral que

$$\alpha(Q_n) = \int_0^1 1 + \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n}) dx = \frac{1 - \cos(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} + 1 \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

O gráfico da função $[0, \pi] \ni x \mapsto \sin(x)$ não é a parte superior de uma circunferência e também, não é a parte superior de uma elipse. Então, qual figura plana melhor aproxima esta área. Aqui, utilizaremos o retângulo e o triângulo. Obviamente outras figuras podem ser utilizadas.

Vimos na seção anterior que a amplitude de $f_n - 1$ é dada por $b_n = \frac{1}{n}$. Além disso, seu período é dado por $T_{f_n} = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$. De posse destas informações, consideramos no plano xy os pontos $A = (0, 0)$, $D = (\frac{\pi}{\sqrt{n}}, 0)$ e o gráfico de $f_n - 1$ para $x \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}]$ conforme Figura 11 abaixo.

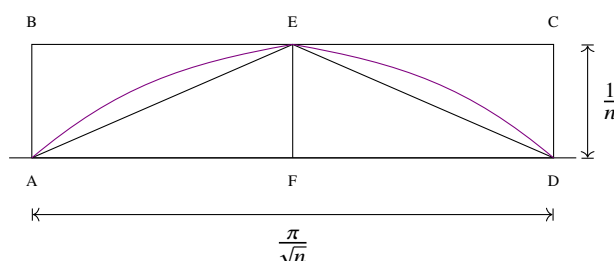


Figura 11: Aproximações geométricas

Além disso, consideramos o triângulo ADE e os quadriláteros $AFEB$ e $FDCE$ de forma que E é o ponto cuja ordenada é dada por $\max_{x \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}]} \{f_n(x) - 1\}$ e F é o pé da perpendicular baixada pelo ponto E em relação ao segmento $\overline{AD}$. Como para $x \in [0, \pi]$ temos que $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ temos que o gráfico de $f_n - 1$ é simétrico em relação ao segmento EF e assim, podemos supor que o triângulo ADE é isósceles de altura EF e base $\overline{AD}$. Também, os quadriláteros $AFEB$ e $FDCE$ são de fato retângulos. Portanto,

$$\alpha(ADE) = \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad \alpha(ADCB) = \frac{\pi}{n\sqrt{n}}. \quad (4)$$

Denotando por $Q_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}$ a figura plana delimitada pelo gráfico de $f_n - 1$ e o eixo das abscissas, temos

$$\alpha(Q_{\frac{\pi}{\sqrt{n}}}) = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{n}}} \frac{1}{n} \sin(x\sqrt{n}) dx = \frac{2}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Para estimarmos $\alpha(Q_n)$ inicialmente, observamos que existem dois casos a considerar. O primeiro é quando $f_n - 1$ possui um número par de raízes em $(0, 1)$ e, o segundo quando possui um número ímpar. É válido a seguinte relação $v(f_n - 1) - 1 = k$, veja, por exemplo as figuras 12 e 13.

Devido a simetria do gráfico de f_n e como vimos na seção anterior que a distância entre as raízes de $f_n - 1$ é constante independente de k , quando n é fixo, temos que a área hachurada acima representa o erro cometido, isto é, $E_n = |\alpha(Q_n) - \alpha(Q)|$.

Teorema 5

$$\alpha_{\Delta}(Q_n) \approx 1 + \cos(k\pi) \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \sum_{l=1}^k (-1)^l \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} = \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 1 - \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (5)$$

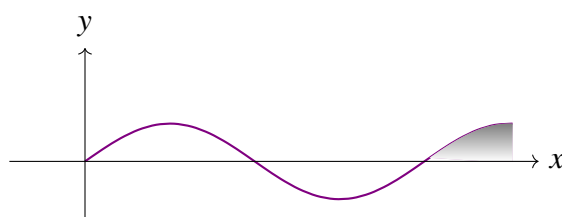


Figura 12: $v(f_n - 1) = 3$ e $k = 2$

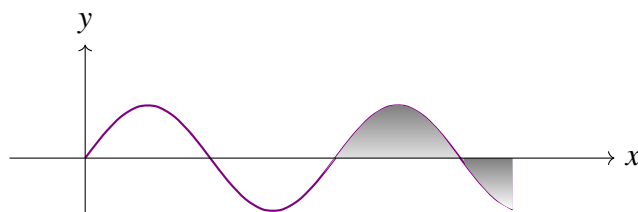


Figura 13: $v(f_n - 1) = 4$ e $k = 3$,

$$\alpha_{\Delta}(Q_n) \approx 1 + \cos(k\pi) \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \sum_{l=1}^k (-1)^l \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} = \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 1 - \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad (6)$$

and $\alpha_{\Delta\Box}(Q_n)$

$$\begin{aligned} &\approx 1 + \left(\frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \cos(k\pi) \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \left[1 - \left(\frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \right] \cos(k\pi) \frac{2\pi}{n\sqrt{n}} + \sum_{l=1}^k (-1)^l \frac{\pi}{4n\sqrt{n}} + \sum_{l=1}^k (-1)^l \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 1 - \frac{\pi}{n\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} + \frac{\pi}{4n\sqrt{n}}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Considerando o triângulo ADE , obtemos a seguinte fórmula por falta (5). Para o retângulo $ABCD$, obtemos a seguinte fórmula por excesso (6). Além disso, podemos considerar o triângulo AFE juntamente com o retângulo $FDCE$ para obter a seguinte fórmula mista para $\alpha_{\Delta\Box}(Q_n)$ (7).

Na Tabela 3, apresentamos alguns valores para as fórmulas mencionadas acima.

n	$\alpha(Q_n)$	$\alpha_{\Delta}(Q_n)$	$\alpha_{\Box}(Q_n)$	$\alpha_{\Delta\Box}(Q_n)$
10	1,063239	1,099345	1,198691	1,099345
15	1,030024	0,972961	0,945922	0,986480
30	1,001872	1,019119	1,038238	1,019119
100	1,001839	1,003141	1,006283	1,003141

Tabela 3: Área de Q_n e suas aproximações

Analisando os dados, observamos que para os valores de n acima a fórmula por falta apresenta maior precisão em relação a fórmula por excesso. A fórmula mista coincide com a fórmula por falta quando k é par e apresenta maior precisão do que as outras.

Concluimos o texto destacando que, embora o uso de ferramentas do cálculo tenha sido essencial para garantir que Q_n é uma aproximação de Q , a fórmula (4) utiliza como argumento somente o cálculo de áreas de triângulos e retângulos. Mais precisamente, as fórmulas no Teorema 5 foram obtidas com o uso das fórmulas de áreas de figuras planas. Essa fórmula e sua obtenção podem ser discutidas no âmbito do ensino básico, enquanto os argumentos mais sofisticados envolvendo cálculo ficam sob o conhecimento do professor.

A Códigos L^AT_EX

No que segue disponibilizamos os códigos L^AT_EX usados para gerar as animações. Figura 3:

```
\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=first]{7}
\multiframe{200}{n=1+2}{
\def\m{1/\n}
\begin{tikzpicture}[scale=3]
\draw[smooth,variable=\x,domain=0:1] plot ({\x},{1+\m*sin(sqrt(\n)*\x r)});
\draw[->] (-0.2,0) -- (1.5,0) node[right]{$x$};
\draw[->] (0,-0.2) -- (0,1.5) node[above]{$y$};
\draw[fill=cyan!40,opacity=0.5] (0,0)--(1,0)--(1,1)--(0,1) -- cycle;
\node at (0.5,0.5){$Q_n$};
\node at (1,-0.1){\tiny 1};
\node at (-0.1,1){\tiny 1};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\caption{Oscilando a área do quadrado}\label{FigA3}
\end{figure}
```

Figura 4:

```
\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=first]{6}
\multiframe{200}{n=1+2}{
\def\m{1/\n}
\begin{tikzpicture}[scale=3]
\draw[smooth,variable=\x,domain=-0.7*pi:0.7*pi,color=violet]
plot ({\x},{1+\m*sin(sqrt(\n)*\x r)});
\draw[->] (-2.5,0) -- (2.5,0) node[right]{$x$};
\draw[->] (0,-0.2) -- (0,1.5) node[above]{$y$};
\draw[dotted] (1,0)--(1,1)--(0,1);
\filldraw(1,1)circle(0.01);
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
```

\caption{Gráfico da função $f_n(x)=1+\frac{1}{n}\sin(x\sqrt{n})$
com $x\in[-0,7\pi,0,7\pi]$ }\label{FFgbGtigA3}
\end{figure}

Referências

- [1] LIMA, E. L. **Números e funções reais**, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023 (Coleção PROFMAT).
- [2] FOURIER J. -B. -J. **Théorie analytique de la chaleur**: Paris: F. Didot père et fils, 1822. Disponível em: <https://www.e-rara.ch/>. Acesso em: 01 nov. 2024.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC>. Acesso em: 01 nov. 2024.
- [4] BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do professor de matemática, 11).
- [5] LEE, J. M. **Axiomatic geometry**, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, c2013. (Pure and applied undergraduate texts; 21).
- [6] BEZERRA, F. D. M. Compartilhando práticas com os pacotes gráficos LaTeX ‘Animate’ e ‘TikZ’ na educação matemática elementar. **Professor de Matemática Online**, v. 12, n. 2, p. 263-283, 2024. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/>. Acesso em: 02 nov. 2024.
- [7] GUIDORIZZI, L. H. **Um curso de cálculo**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. v. 4.