



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024

Artigo de Pesquisa

**Cristiane Aparecida Pendeza
Martínez**

Universidade Tecnológica Federal
do Paraná (UTFPR), Câmpus
Cornélio Procópio, Cornélio
Procópio

Gustavo Freitas Magalhães

Universidade Tecnológica Federal
do Paraná (UTFPR), Câmpus
Cornélio Procópio, Cornélio
Procópio

André Luís Machado Martínez

Universidade Tecnológica Federal
do Paraná (UTFPR), Câmpus
Cornélio Procópio, Cornélio
Procópio, martinez@utfpr.edu.br

Transformando frequências em melodias: análise de ondas sonoras e da curva de Railsback

Transforming frequencies into melodies: analyzing sound
waves and the Railsback curve

Resumo

Este artigo explora os princípios da acústica e da linguagem musical, com ênfase na transformação de frequências em melodias no contexto do piano. O estudo destaca a análise da curva de ajuste Railsback, uma metodologia utilizada por técnicos para otimizar a qualidade sonora ao ajustar desvios de afinação característicos em pianos. Investigamos também os principais tipos de ondas aplicadas na síntese sonora, incluindo senoidais, quadradas e triangulares, avaliando suas propriedades de frequência e amplitude e o impacto que exercem sobre a percepção auditiva. No ambiente MATLAB, implementamos esses tipos de ondas e apresentamos uma análise detalhada de como os parâmetros influenciam o timbre e a qualidade do som. Por fim, implementamos um algoritmo que ilustra o uso da curva de Railsback para ajuste fino das frequências das teclas, proporcionando uma afinação que se alinha com a percepção auditiva ideal e a harmonia acústica.

Palavras-chave: Railsback, Ondas senoidais, Ondas quadradas, Ondas triangulares, linguagem musical.

Abstract

This paper explores the principles of acoustics and musical language, emphasizing the transformation of frequencies into melodies in the context of the piano. The study highlights the Railsback tuning curve analysis, a methodology technicians use to optimize sound quality by adjusting characteristic pitch deviations in pianos. We also investigate the main types of waves applied in sound synthesis, including sinusoidal, square and triangular waves, evaluating their frequency and amplitude properties and their impact on auditory perception. In the MATLAB environment, we implement these types of waves and present a detailed analysis of how the parameters influence timbre and sound quality. Finally, we implement an algorithm that illustrates using the Railsback curve for fine-tuning key frequencies, providing a tuning that aligns with ideal auditory perception and acoustic harmony.

Keywords: Railsback, Sine waves, Square waves, Triangle waves, musical language.





1 Introdução

A música permeia a história das civilizações desde seus primórdios, com notas e sons variando significativamente entre diferentes instrumentos, uma vez que não existiam regras e padrões estabelecidos para sua produção. Um marco fundamental nessa jornada é atribuído à lenda que narra a observação de Pitágoras, quando este passava por uma oficina de ferreiro e notou que as distintas batidas dos martelos, resultantes de suas diferentes massas, criavam harmonias agradáveis ao ouvido, revelando uma intrincada combinação sonora.

Pitágoras percebeu que os sons das notas estavam interligados com o peso do martelo e seu comprimento. A batida que produzia o som da oitava tinha exatamente a metade do peso do martelo cujo som era o mais grave, produzindo a nota tônica. O som da quinta acima era produzido por um martelo que pesava dois terços do peso do mais pesado, sendo considerado o som intermediário. O som do intervalo de quarta vinha do martelo que pesava três quartos do peso do mais pesado. Dessa forma, Pitágoras deduziu que os sons harmônicos surgem a partir das razões envolvendo o tamanho do objeto que produz o som (Silva, 2016).

A ordem das notas musicais é estabelecida como: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. A partir destas sete notas fundamentais, e mais cinco auxiliares (os bemóis e sustenidos), são compostas as melodias da música ocidental. Um dos importantes contribuidores para a evolução da notação musical foi o monge Guido d'Arezzo (995 – 1050). Ele desenvolveu a pauta musical tetragrama, composta por três ou quatro linhas, e introduziu as claves de fá e dó. Essas claves foram criadas com o intuito de registrar de forma mais precisa a altura dos sons, facilitando a criação de novas composições e melodias da época (Souza, 2012).

A necessidade de representar os sons musicais de maneira organizada e lógica, como evidenciado pelo surgimento do primeiro método algorítmico baseado no alfabeto musical, encontra paralelo na Curva de Railsback. Assim como Guido d'Arezzo trouxe uma abordagem mais eficaz para a notação musical, a Curva de Railsback traz rigor quantitativo à análise da acústica do piano, permitindo ajustes precisos nas frequências das teclas (Railsback, 1938a).

Com a finalidade de experimentar a geração de áudio de maneira interativa, este trabalho tem por objetivo apresentar um algoritmo implementado no software MATLAB, baseado no alfabeto musical e na Curva de Railsback. O trabalho é dividido em seis capítulos, incluindo esta introdução que apresenta uma visão geral sobre o tema. No capítulo 2, são apresentadas frequências e notas musicais para contextualização da aplicação. O capítulo 3 apresenta a Curva de Railsback. No capítulo 4, são apresentadas diferentes funções no formato de onda. Finalmente, no capítulo 5, são apresentados os resultados finais da implementação de códigos no MATLAB relacionados à música, conclusões do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 Frequências e notas musicais

O som é qualquer alteração na pressão do ar que pode ser detectada e processada por nossos ouvidos (Costa, 2003). Para que o som seja percebido, é necessário que o ar se mova com energia suficiente para vibrar nossos tímpanos internos. Quanto maior a pressão do ar, mais intensa é a sonoridade resultante. Para que nossos ouvidos captem o som, ele deve estar contido em um intervalo específico de frequência; a maioria das pessoas consegue discernir sons no intervalo de 20 Hz (oscilações por segundo) até 15 mil Hz. A faixa audível não inclui sons abaixo de 20 Hz ou acima de 15 mil Hz. Um tom, por sua vez, é um som que se repete com uma frequência determinada (Meirelles, 2021).

Um tom é originado por uma única frequência ou um conjunto restrito de frequências correlacionadas. Em contrapartida, uma mescla de centenas ou milhares de frequências diversas é denominada ruído. Quando nos deparamos com o som de um rio fluindo, o vento suave agitando as folhas, o ruído produzido ao rasgar papel ou até mesmo a interferência sonora da TV ao sintonizar um canal inexistente, estamos, na realidade, escutando diversos tipos de ruído. A nota musical é, em sua essência, um tom singular. No entanto, esse tom específico é, na verdade, uma combinação de diversos tons que, quando harmoniosamente combinados, proporcionam uma experiência agradável ao cérebro humano.

Em consonância com essas características da percepção sonora, é intrigante contemplar como a música transcende a combinação de notas e frequências. Ela assume o poder de evocar emoções, narrar histórias e até mesmo conectar culturas e épocas distintas.

3 Curva de Railsback

Nesta seção, apresentamos uma compilação das frequências fundamentais em hertz (ciclos por segundo) das teclas de um piano moderno padrão de 88 teclas ou um piano estendido de 108 teclas, afinado segundo o temperamento igual de doze tons. Será considerado também no arranjo a 49ª tecla, correspondente ao A4 (Lá central), sintonizada em uma frequência de 440 Hz. Cada oitava desse sistema é composta por doze semitons, representando um aumento ou diminuição da frequência em relação à oitava anterior. Por exemplo, a frequência do A4 é 440 Hz e o A5, uma oitava acima, é 880 Hz. Essa progressão ascendente ou descendente ocorre via multiplicação (ascendente) ou divisão (descendente) do valor anterior pela décima segunda raiz de dois, aproximadamente igual a 1,059463. Este conjunto de informações forma a base para a compreensão da Curva de Railsback, oferecendo visões essenciais para a análise e otimização das características acústicas do piano (Giordano, 2015; Railsback, 1938a; Railsback, 1938b).

Para obter a frequência de um semitom acima de A4, como o A#4, multiplicamos 440 pela décima segunda raiz de dois. Para ir de A4 a B4 (um tom inteiro, ou dois semitons), multiplicamos 440 duas vezes pela décima segunda raiz de dois, ou simplesmente pela sexta raiz de dois, aproximadamente igual a 1,122462. Esta relação de frequências apresentada nesta lista é idealizada para um piano teoricamente perfeito. No entanto, em um piano real, a proporção entre os semitons é levemente expandida, especialmente nas extremidades agudas e graves, onde a rigidez das cordas pode introduzir desvios harmônicos. Isso resulta em notas que soam ligeiramente mais agudas do que o esperado. Para mitigar essa particularidade, as oitavas são ajustadas de forma sutilmente mais ampla, adaptando-se às características únicas e inarmônicas de cada instrumento. Esse ajuste em relação ao temperamento igual é conhecido como a Curva de Railsback, uma correção que preserva a coesão tonal em pianos reais, compensando os desvios inerentes e mantendo a afinação harmônica adequada ao longo do teclado.

A seguinte função fornece a frequência ‘ideal’ teórica f_i da n -ésima tecla, como mostrado na tabela:

$$f_i(n) = a' \times 2^{\frac{n-49}{12}} \text{ (Hz)}, \quad (1)$$

onde a' é a quadragésima nona tecla do piano, na frequência padrão idealizada da música ocidental a nota Lá acima do Dó central é afinada $a' = A4 = 440 \text{ (Hz)}$. Por outro lado, a partir de uma frequência no piano padrão ideal, ajustado em A4, é possível determinar o número da tecla através

da fórmula:

$$n = 12 \log_2 \left(\frac{f_i}{440} \right) + 49.$$

A Curva de Railsback, por si só, não possui uma definição matemática exata e única, pois é uma curva empírica baseada em medições práticas das frequências das notas de pianos bem afinados. Ora L. Railsback a descreveu após realizar a medida de frequências de várias notas em diferentes afinadores em pianos de cauda e compará-las com as frequências ideais da afinação igualmente temperada. Essas medições foram, então, plotadas em uma curva que mostra as diferenças entre a frequência medida e a frequência teórica ideal para cada nota, esta curva foi denominada como Curva de Railsback, como descrito em Railsback (1938a, 1938b).

A Curva de Railsback relaciona cada nota n do piano à diferença ($\Delta(n)$) entre a medida real da frequência ($f_r(n)$) e a frequência ideal ($f_i(n)$) da afinação em centésimos de semitom (cents). De forma simplificada podemos representar esta relação da seguinte forma:

$$\Delta(n) = 1200 \times \log_2 \left(\frac{f_r(n)}{f_i(n)} \right)$$

Não podemos definir explicitamente a função $\Delta(n)$, entretanto podemos utilizar dados empíricos da curva de Railsback, e interpolar os valores experimentais para gerar aproximações para os desvios ($\Delta(n)$) para todas as teclas do piano. Uma vez estimado $\Delta(n)$ podemos determinar a frequência ajustada (f_a) a partir da frequência ideal da seguinte maneira:

$$f_a(n) = f_i(n) \times 2^{\frac{\Delta(n)}{1200}}. \quad (2)$$

A curva de Railsback exibe maiores desvios nas extremidades do teclado, enquanto esses desvios tendem a se aproximar de zero próximo ao centro, geralmente na tecla 49. Conforme descrito por Giordano (2015) e Railsback (1938a, 1938b), os tons graves em um piano são levemente ajustados para frequências mais baixas, e os tons agudos, para frequências mais altas, em comparação com a afinação temperada exata. Esse ajuste é essencial para alinhar a afinação real do instrumento com as percepções auditivas ideais, proporcionando uma sonoridade mais harmônica e equilibrada. Selecionamos alguns valores de desvio em cents da curva de Railsback apresentada em Giordano (2015), que são apresentados na Tabela 1. Em uma aplicação prática, esses dados de ajuste devem ser obtidos empiricamente durante o processo de afinação do piano.

Tecla	1	24	49	64	88
Desvio (Railsback)	-36,5	-3,5	0	2,1	31,5

Tabela 1: Tabela de desvios da curva de Railsback em cents.

Com base nesses dados, utilizamos interpolação por spline cúbica (interpolação por spline cúbica é uma técnica matemática que cria uma função suave e contínua ao ajustar polinômios cúbicos entre pontos consecutivos de dados, garantindo que a curva interpolada tenha continuidade até a segunda derivada em cada ponto) para estimar o comportamento completo da curva ao longo das teclas do piano. A Figura 1 exibe o gráfico dos desvios previstos pela curva de Railsback ao longo das 88 teclas, demonstrando visualmente como o ajuste varia em função da posição das teclas. A partir dos valores dos desvios da curva de Railsback, podemos calcular a frequência ajustada (2) com base na frequência ideal. Esse ajuste é ilustrado no Algoritmo 4 da Seção 5.

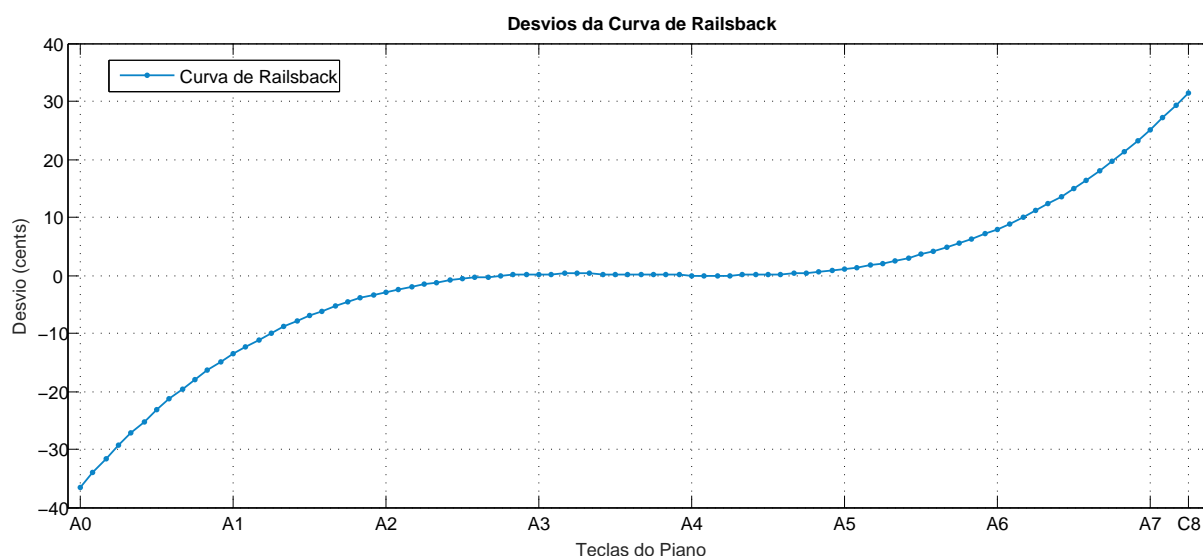


Figura 1: Desvio da curva de Railsback.

O Dr. Ora L. Railsback foi um distinto professor de física e chefe do Departamento de Física da Northern Illinois University no período de 1925 à 1950 (Janata, 2011), que fez contribuições significativas ao estudo da afinação de piano. Seu interesse em acústica o levou a pesquisar as nuances da afinação, empregando ferramentas como o estroboscópio cromático um dispositivo que ele inventou e patenteou em 1940 como StroboConn, que se tornou amplamente usado na física musical (The Keep, 2024).

O trabalho do Dr. Ora L. Railsback, realizado na década de 1930, trouxe uma compreensão mais detalhada das nuances de afinação em pianos ao introduzir a Curva de Railsback, revelando ajustes específicos nas frequências das notas para compensar a afinação temperada e otimizar a qualidade sonora. Sua curva indica que notas graves e agudas se beneficiam de ligeiros desvios, permitindo uma ressonância mais natural e equilibrada ao ouvido humano. Esse modelo de afinação é amplamente aplicado em pianos acústicos. Para uma compreensão mais aprofundada e metodologias específicas, recomendamos consultar Carrion (2010), Giordano (2015), Railsback (1938a, 1938b) e Ramirez (2019).

4 Tipos de ondas e seu contexto na música e na matemática

A análise das frequências e da afinação dos instrumentos musicais, como visto na Curva de Railsback, nos leva a explorar a natureza das ondas sonoras que compõem essas frequências. As ondas sonoras podem ser representadas de diversas formas, sendo as mais comuns as ondas senoidais, quadradas e triangulares. Cada tipo de onda possui características distintas que influenciam diretamente a qualidade do som produzido e percebido.

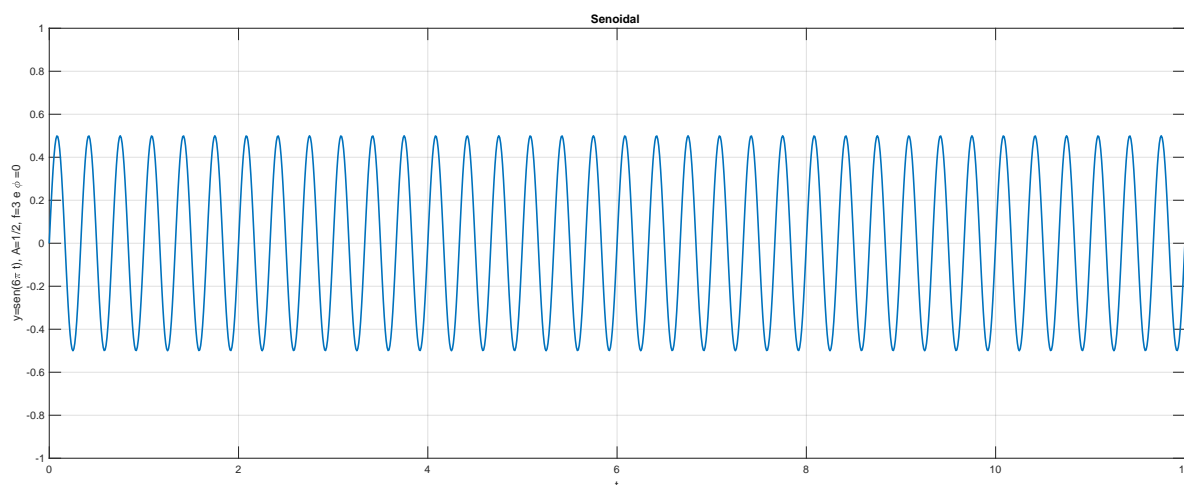


Figura 2: Gráfico da onda senoidal, com $f = 3$, $A = \frac{1}{2}$ e $\phi = 0$.

4.1 Ondas senoidais

As ondas senoidais são a forma mais pura de onda sonora, representando um único tom com uma frequência específica. Matematicamente, uma onda senoidal é descrita pela função seno,

$$y(t) = A \sin(2\pi ft + \phi), \quad (3)$$

onde A é a amplitude, f é a frequência em hertz (Hz), t é o tempo e ϕ é a fase.

As ondas senoidais como a ilustrada na Figura 2 são fundamentais na análise harmônica e na decomposição de sons complexos em suas componentes frequenciais. Embora raramente ouvidas isoladamente na música, elas são essenciais para sintetizar e entender sons mais complexos. Sua forma pura e previsível torna-as ideais para afinação de instrumentos musicais, geração de sons fundamentais em síntese sonora e modelagem de características tonais em gravações de estúdio (Bleicher, 2002).

Além de seu papel na música, as ondas senoidais são cruciais em diversas áreas da ciência e tecnologia, incluindo comunicação de sinais elétricos e análise de fenômenos oscilatórios. Elas são utilizadas em sistemas de transmissão de dados, como modulação de frequência e modulação em amplitude, devido à sua capacidade de representar sinais eficientemente e sem distorções significativas. A suavidade e previsibilidade das ondas senoidais permitem que engenheiros e cientistas modelem com precisão o comportamento de sistemas complexos e desenvolvam soluções eficazes para uma variedade de problemas, desde oscilações em circuitos eletrônicos até vibrações mecânicas. No contexto da Curva de Railsback, a análise das ondas senoidais e suas frequências específicas é essencial para a afinação precisa dos instrumentos musicais.

4.2 Ondas quadradas

Ondas quadradas são compostas por uma série de harmônicos ímpares, produzindo um som característico e mais “áspero” em comparação com a pureza das ondas senoidais. Elas são amplamente utilizadas na síntese de sons eletrônicos e em instrumentos digitais devido à sua estrutura harmônica rica. Matematicamente, uma onda quadrada alterna entre valores máximos e mínimos, ideal para aplicações musicais e tecnológicas.

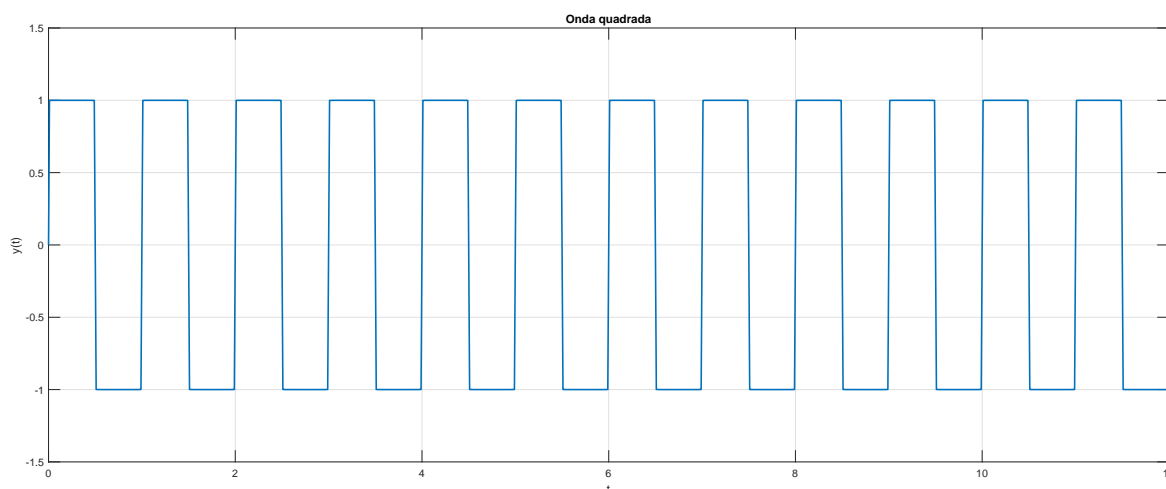


Figura 3: Gráfico da onda quadrada, com $f = 1$ e $A = 1$.

Matematicamente, uma onda quadrada pode ser descrita por uma série de Fourier (Boyce, 2010):

$$y(t) = A \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi n f t), \quad (4)$$

onde A é a amplitude, f é a frequência em hertz (Hz), t é o tempo e ϕ é a fase.

Na música, as ondas quadradas como ilustrada na Figura 3 são essenciais em sintetizadores analógicos e digitais, criando timbres variados, desde baixos profundos até efeitos sonoros etéreos. Na música eletrônica, elas são frequentemente usadas para gerar sons pulsantes e texturas complexas que caracterizam muitas faixas contemporâneas.

Além da música, as ondas quadradas são aplicadas em tecnologias como modulação por largura de pulso em circuitos de controle de motores e iluminação LED, demonstrando sua versatilidade. Em controladores MIDI, por exemplo, a onda quadrada pode ser usada para gerar envelopes de amplitude que modelam a dinâmica de instrumentos musicais em tempo real.

Embora as ondas quadradas ofereçam uma variedade de possibilidades sonoras, seus timbres ásperos podem não ser adequados para todos os contextos musicais, especialmente aqueles que buscam uma reprodução mais fiel de sons naturais, como instrumentos tradicionais ou a voz humana.

4.3 Ondas triangulares

Ondas triangulares possuem um som mais suave que as ondas quadradas, mas ainda contêm múltiplos harmônicos, embora em menor quantidade. Elas são representadas por uma série de harmônicos ímpares, com uma decaída mais rápida na amplitude dos harmônicos superiores. Esta característica torna as ondas triangulares úteis na criação de sons ricos em harmônicos, mas sem a aspereza das ondas quadradas.

Matematicamente, uma onda triangular pode ser descrita por uma série de Fourier (Boyce, 2010):

$$y(t) = A \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin(2\pi n f t), \quad (5)$$

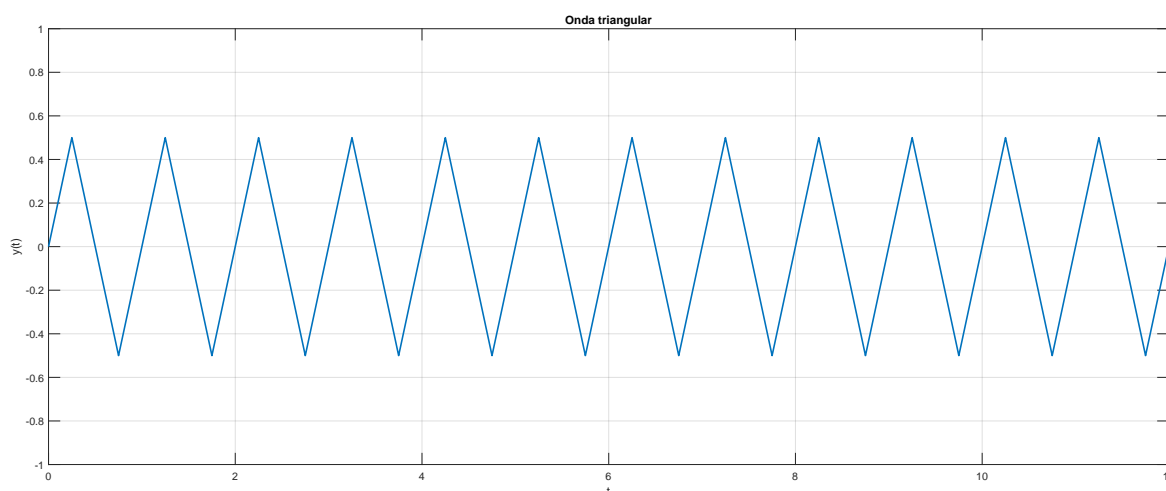


Figura 4: Gráfico da onda triangular, com $f = 1$ e $A = \frac{1}{2}$.

onde A é a amplitude, f é a frequência e t é o tempo. A onda triangular se assemelha a uma forma triangular como podemos observar na Figura 4, caracterizada por um aumento linear da amplitude até um certo ponto, seguido por uma diminuição linear da amplitude de volta ao zero.

Na síntese sonora, as ondas triangulares são geradas através da adição de várias harmônicas de frequências ímpares. Elas produzem timbres mais suaves e arredondados em comparação com outras formas de onda, como a quadrada ou a dente de serra. São frequentemente usadas para criar sons de instrumentos de sopro, como flautas e trompas, bem como para gerar efeitos de modulação suaves.

A modulação em frequência de uma onda triangular pode produzir tons complexos e harmônicos. Além disso, a onda triangular é utilizada em diversas aplicações tecnológicas, incluindo modulação em amplitude e sistemas de controle de sinais.

5 Análise de formas de onda e ajustes de afinação com a curva de Railsback

Nesta seção, exploramos os principais tipos de onda aplicados na síntese sonora: senoidal, quadrada e triangular. Para cada tipo de onda, examinamos suas propriedades de frequência e amplitude, destacando o efeito de suas características sobre o som resultante. Além disso, implementamos cada uma dessas formas de onda no MATLAB, apresentando uma análise detalhada de como os diferentes parâmetros influenciam o timbre e a qualidade sonora. Também desenvolvemos uma composição musical completa no MATLAB, baseada em um conjunto de notas musicais pré-definidas representadas por frequências específicas. Por fim, nesta composição ilustramos o uso da curva de Railsback para ajustar as frequências das notas, buscando uma afinação que reflete a percepção auditiva ideal. Os algoritmos apresentados nesta seção estão disponíveis em Martinez (2024).



5.1 Algoritmo 1: geração de onda senoidal

No primeiro algoritmo, utilizamos a onda senoidal (3), caracterizada por sua simplicidade e pureza. Esta forma de onda representa uma única frequência fundamental sem a presença de harmônicas adicionais. Devido a essas características, a onda senoidal é conhecida por produzir um som suave e rico, ideal para a análise de tons puros e harmônicos. Além disso, ela é amplamente utilizada como referência em sistemas de áudio de alta qualidade.

Utilização da função seno do MATLAB para criar as ondas senoidais correspondentes às notas musicais Aplicação das correções de frequência conforme a Curva de Rainsback Função ‘Chave’. A melodia gerada é reproduzida usando a função ‘som’, que utiliza uma taxa de amostragem de 44100 amostras por segundo para transformar as representações das notas musicais em som audível.

A utilização da onda senoidal pura como base para a síntese sonora permite a geração de sons claros e precisos, essenciais para a afinação e análise acústica de instrumentos musicais. A combinação com outras formas de onda, como a onda triangular, permite a criação de sons mais complexos e ricos, adicionando harmônicos ao som.

Segue a implementação do código em MATLAB:

Algoritmo 1: onda senoidal

```
function Algoritmo_Onda_Senoidal()
% Parâmetros:
fs = 44100; % É a taxa de amostragem, configurada para 44100 Hz.
t = 0:1/fs:1; % Vetor de tempo definido para um segundo.
frequencias = [440, 493.88, 523.25];
% Frequências das notas escolhidas [A4, B4, C5], onde
% A4 - Lá na Quarta Oitava
% B4 - Sí na Quarta Oitava.
% C5 - Dó na Quinta Oitava
% Função Chave para gerar a onda senoidal pura
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = Chave(frequencia, duracao, fs)
    t = 0:1/fs:duracao;
    y = sin(2*pi*frequencia*t);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Geração das notas musicais
nota1 = Chave(frequencias(1), 2/3, fs);
nota2 = Chave(frequencias(2), 2/3, fs);
nota3 = Chave(frequencias(3), 2/3, fs);
% Combinação das notas para formar uma melodia
melodia = [nota1, nota2, nota3];
% Reprodução do som
sound(melodia, fs);
end
```

A Figura 5 apresenta o sinal da melodia obtida pelo Algoritmo 1, com taxa de amostragem ajustada para $fs = 1000Hz$, essa frequência foi escolhida para facilitar a visualização das variações do sinal ao longo do tempo. Observa-se que a variação de frequência ocorre de acordo com as mudanças de notas na melodia, evidenciando como o sinal senoidal ajusta sua frequência fundamental para cada

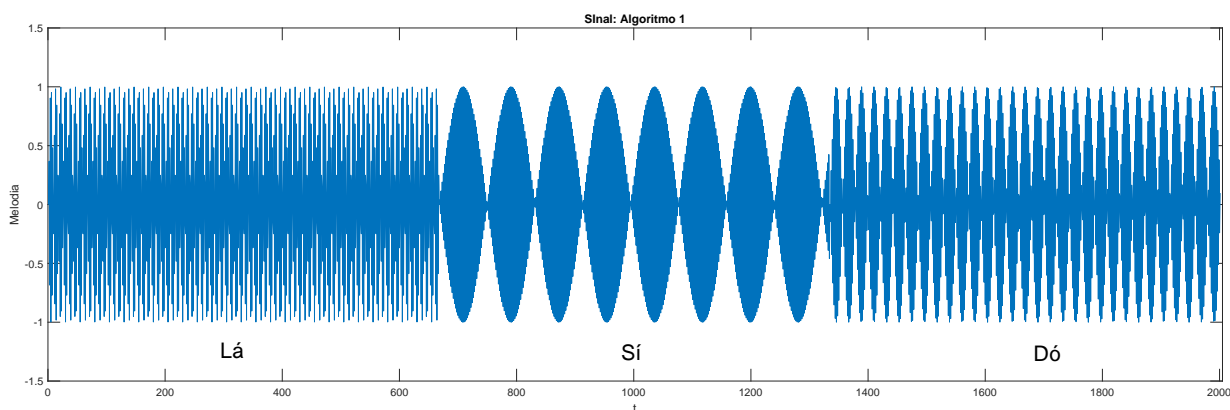


Figura 5: Sinal obtido para o Algoritmo 1.

nota sem introduzir harmônicos adicionais. Note também que a amplitude é limitada entre $[-1, 1]$, conforme esperado para uma onda senoidal.

5.2 Algoritmo 2: geração de onda quadrada

Para gerar uma onda quadrada, utilizamos a série de Fourier, onde somamos harmônicos ímpares da onda senoidal (4). A onda quadrada é conhecida por sua estrutura rica em harmônicos ímpares, resultando em um som mais “áspero” quando comparado à onda senoidal.

Algoritmo 2: onda quadrada

```
function Algoritmo_Onda_Quadrada()
```

```
% Parâmetros:
```

```
fs = 44100; % É a taxa de amostragem, configurada para 44100 Hz.
```

```
t = 0:1/fs:1; % Vetor de tempo definido para um segundo.
```

```
frequencias = [440, 493.88, 523.25];
```

```
% Frequências das notas escolhidas [A4, B4, C5], onde
```

```
% A4 - Lá na Quarta Oitava
```

```
% B4 - Sí na Quarta Oitava.
```

```
% C5 - Dó na Quinta Oitava
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Função Chave para gerar a onda quadrada
```

```
function y = Chave(frequencia, duracao, fs)
```

```
    t = 0:1/fs:duracao;
```

```
    y = 0;
```

```
    num_harmonicos = 10; % Número de harmônicos escolhidos para a aproximação
```

```
    for k = 1:2:num_harmonicos
```

```
        y = y + (1/k)*sin(2*pi*k*frequencia*t);
```

```
    end
```

```
    y = (4/pi) * y; % Normalização (4/pi) garante que a amplitude da onda  
    quadrada esteja correta de acordo com (4).
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

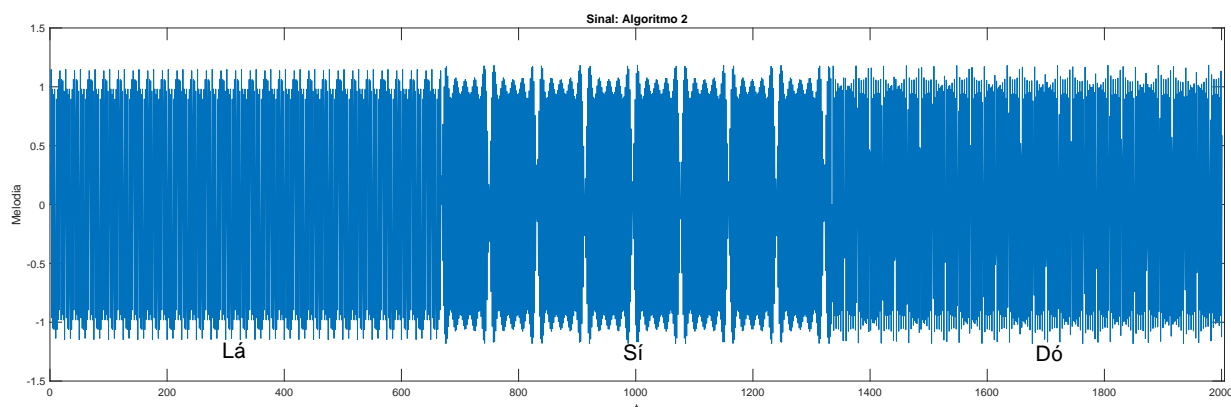


Figura 6: Sinal obtido para o Algoritmo 2.

```
% Geração das notas musicais
nota1 = Chave(frequencias(1), 2/3, fs);
nota2 = Chave(frequencias(2), 2/3, fs);
nota3 = Chave(frequencias(3), 2/3, fs);

% Combinação das notas para formar uma melodia
melodia = [nota1, nota2, nota3];

% Reprodução do som
sound(melodia, fs);
end
```

A Figura 6 apresenta o sinal da melodia obtida pelo Algoritmo 2, com taxa de amostragem ajustada para $fs = 1000Hz$, essa frequência foi escolhida para facilitar a visualização das variações do sinal ao longo do tempo. Além da variação de frequência, que ocorre conforme as notas mudam, observa-se uma variação distinta na forma do sinal, caracterizada pela transição abrupta entre altos e baixos valores, típica das ondas quadradas. Nota-se também que a amplitude do sinal ultrapassa o intervalo $[-1, 1]$, isto ocorre devido ao fenômeno conhecido como fenômeno de Gibbs uma vez que utilizamos um número finito de harmônicos para representar a onda quadrada (4), para compreender melhor o fenômeno de Gibbs recomendamos Figueiredo (2018). Para diminuir a interferência deste fenômeno, pode-se aumentar o número de harmônicos. Ao ouvir a melodia do ALgoritmo 2, percebemos um som mais amplo e “áspero” em comparação ao som gerado pelo Algoritmo 1.

5.3 Algoritmo 3: Geração de Onda Triangular

A onda triangular (5) é caracterizada por uma forma de onda que se assemelha a um triângulo. Ela é composta por harmônicos ímpares com uma amplitude que decresce mais rapidamente em relação aos harmônicos superiores, produzindo um som mais suave em comparação com a onda quadrada.

Algoritmo 3: onda triangular

```
function Algoritmo_Onda_Triangular()
% Parâmetros:
```



```
fs = 44100; % É a taxa de amostragem, configurada para 44100 Hz.
t = 0:1/fs:1; % Vetor de tempo definido para um segundo.
fs = 44100; % Taxa de amostragem
t = 0:1/fs:1; % Vetor de tempo
frequencias = [440, 493.88, 523.25];
% Frequências das notas escolhidas [A4, B4, C5], onde
% A4 - Lá na Quarta Oitava
% B4 - Sí na Quarta Oitava.
% C5 - Dó na Quinta Oitava
% Função Chave para gerar a onda triangular
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = Chave(frequencia, duracao, fs)
    t = 0:1/fs:duracao;
    y = zeros(size(t));
    num_harmonicos = 10; % Número de harmônicos para a aproximação
    for k = 1:2:num_harmonicos
        % Soma dos harmônicos ímpares
        y = y + ((-1)^((k-1)/2)/k^2) * sin(2*pi*k*frequencia*t);
    end
    y = (8/pi^2) * y; % Normalização (8/pi^2) garante que a amplitude da onda
    triangular esteja de acordo com (5).
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Geração das notas musicais
nota1 = Chave(frequencias(1), 2/3, fs);
nota2 = Chave(frequencias(2), 2/3, fs);
nota3 = Chave(frequencias(3), 2/3, fs);

% Combinação das notas para formar uma melodia
melodia = [nota1, nota2, nota3];

% Reprodução do som
sound(melodia, fs);
end
```

A Figura 7 apresenta o sinal da melodia obtida pelo Algoritmo 3, com taxa de amostragem ajustada para $fs = 1000Hz$, essa frequência foi escolhida para facilitar a visualização das variações do sinal ao longo do tempo. Assim como nas figuras anteriores, observa-se a variação de frequência à medida que as notas mudam, porém, a onda triangular apresenta um comportamento distinto. Ela possui transições mais suaves em comparação com a onda quadrada, já que seu formato é composto por linhas inclinadas e não transições abruptas. Esse tipo de onda inclui uma menor quantidade de harmônicos, concentrados principalmente nos harmônicos ímpares, o que proporciona um som mais suave e menos ‘áspero’ do que o som da onda quadrada, embora ainda mais rico em timbre do que o sinal senoidal. Nota-se também que a onda triangular apresenta um sinal semelhante ao da onda senoidal, porém com uma amplitude ligeiramente menor, o que se deve ao pequeno número de harmônicos utilizados na sua composição.

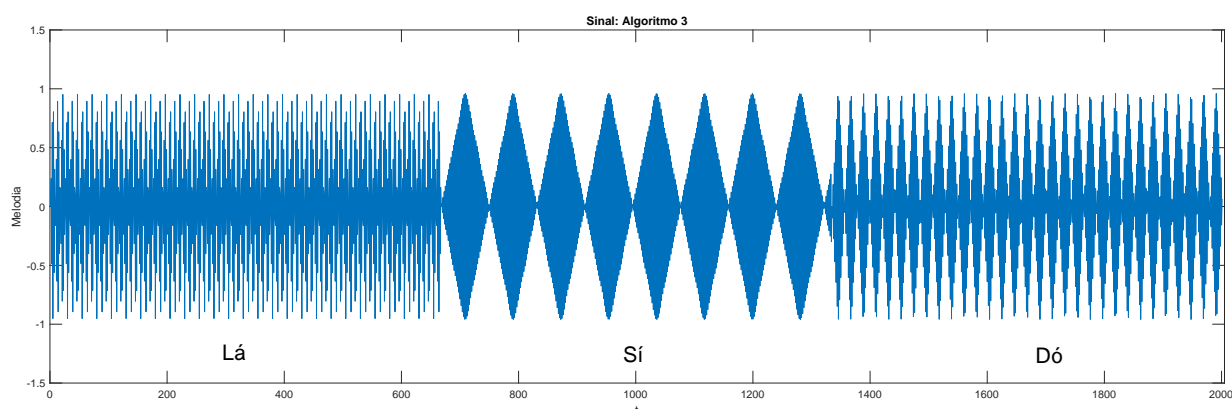


Figura 7: Sinal obtido para o Algoritmo 3.

5.4 Música completa no MATLAB

Nesta subseção, apresentamos o Algoritmo 4, que utiliza a curva de Railsback para implementar um código capaz de reproduzir músicas com características acústicas de um piano afinado, levando em conta os ajustes necessários conforme os desvios indicados pela curva. Para isso, empregamos os valores da Tabela 1 com dados empíricos de desvios específicos da curva de Railsback (utilizamos a *toolbox* ‘spline’ do MATLAB para interpolar os valores do desvio $\Delta(n)$, detalhes na *function* ‘delta’ do Algoritmo 4), possibilitando uma afinação mais precisa e realista.

Este algoritmo, baseia-se em um conjunto de notas musicais pré-definidas, representadas por frequências específicas. Essas frequências são utilizadas para criar sequências melódicas, permitindo uma composição personalizada e interativa.

O Algoritmo 4 permite que diferentes notas, oitavas, durações e modelos de onda sejam combinados para formar uma melodia sob medida. A melodia musical é construída combinando essas notas em sequências através de linhas, onde cada linha apresenta uma série de notas e intervalos de silêncio. Embora o código padrão utilize ondas senoidais pela sua simplicidade e pureza, outras formas de onda, como ondas quadradas e triangulares, podem ser exploradas para criar diferentes texturas sonoras e enriquecer a composição musical. Para alterar a forma da onda é necessário substituir a escolha da onda na *function* ‘Chave’ do Algoritmo 4. Através deste algoritmo, os usuários podem aprofundar seus conhecimentos em síntese sonora e acústica musical, enquanto experimentam com diferentes combinações de notas e formas de onda. O Algoritmo 4 apresenta previamente implementadas as músicas ‘Old McDonald’s’ (Kenney, 2006) e ‘Twinkle, twinkle little Star’ (Alvim, 2018).

Algoritmo 4

```
function Algoritmo_4_musica()
    fs = 44100; % É a taxa de amostragem, configurada para 44100 Hz.
    %
    % Caso deseje alterar alguma oitava deve escolher aqui
    escolha1=input('Deseja alterar alguma oitava? \n Digite 1 para sim
                    e 0 para nao=>\n');
    if escolha1==1
        d0_escolha = input("alterar nota do, digite um valor de 0 a 4=>\n");
        re_escolha = input("alterar nota re, digite um valor de 0 a 4=>\n");
```



```
mi_escolha = input("alterar nota mi, digite um valor de 0 a 4=>\n");
fa_escolha = input("alterar nota fa, digite um valor de 0 a 4=>\n");
so_escolha = input("alterar nota sol, digite um valor de 0 a 4=>\n");
la_escolha = input("alterar nota la, digite um valor de 0 a 4=>\n");
si_escolha = input("alterar nota si, digite um valor de 0 a 4=>\n");
else
    d0_escolha = 0;
    re_escolha = 0;
    mi_escolha = 0;
    fa_escolha = 0;
    so_escolha = 0;
    la_escolha = 0;
    si_escolha = 0;
end
% colcheia como 0,5 seg
d0 = Chave(52 + d0_escolha*12, 8, fs); % do 1
re = Chave(54 + re_escolha*12, 8, fs); % re 2
mi = Chave(56 + mi_escolha*12, 8, fs); % mi 3
fa = Chave(57 + fa_escolha*12, 8, fs); % fa 4
so = Chave(59 + so_escolha*12, 8, fs); % so 5
la = Chave(61 + la_escolha*12, 8, fs); % la 6
si = Chave(63 + si_escolha*12, 8, fs); % si 7
% semínima como 1 segundo
do_4 = Chave(52 + d0_escolha*12, 4, fs); % do 1
re_4 = Chave(54 + re_escolha*12, 4, fs); % re 2
mi_4 = Chave(56 + mi_escolha*12, 4, fs); % mi 3
fa_4 = Chave(57 + fa_escolha*12, 4, fs); % fa 4
so_4 = Chave(59 + so_escolha*12, 4, fs); % so 5
la_4 = Chave(61 + la_escolha*12, 4, fs); % la 6
si_4 = Chave(63 + si_escolha*12, 4, fs); % si 7
musica=input('escolha, 1 para Old McDonald e 2 para Twinkle,
              Twinkle Little Star=>\n');
if musica==1
    linha0 = [so so so re mi mi re_4];
    linha1 = [si si la la so_4];
    linha2 = [so so so re mi mi re_4];
    linha3 = [si si la la so_4];
    linha4 = [so so re so so so];
    linha5 = [si si la la so_4];
    linha6 = [so so so re mi mi re_4];
    linha7 = [si si la la so_4];
elseif musica==2
    linha0 = [d0 d0 so so la la so_4];
    linha1 = [fa fa mi mi re re do_4];
    linha2 = [so so fa fa mi mi re_4];
    linha3 = [so so fa fa mi mi re_4];
```



```
linha4 = [d0 d0 so so la la so_4];
linha5 = [fa fa mi mi re re do_4];
linha6 = [];
linha7 = [];
end
melodia_linha0 = [linha0];
melodia=[linha0 linha1 linha2 linha3 linha4 linha5 linha6 linha7];
escolha=input('Para ouvir a musica toda, digite 1, senão digite 0=>');
if escolha==0
    sound(melodia_linha0,fs,24);%toca somente a primeira linha0
elseif escolha==1
    sound(melodia,fs,24);%toca toda melodia
end
% audiowrite('Som1.wav',som,fs,'BitsPerSample',32);
% permite gravar o som ouvido
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function onda = Chave(p, n, fs)
    t = 0:1/fs:4/n;
    f_i= 440*2^((p-49)/12); % Frequência padrão idealizada eq. (1)
    f_a = f_i*(2^(delta(n)/1200)); % Frequência ajustada eq. (2)
    onda = (sin(2*pi*f_a*t)); % Senoidal
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Delta_n=delta(n)
    % Tabela de desvios da curva de Railsback (em cents)
    teclas = [1 24 49 64 88]; % Teclas de referência
    Delta_n_empirico = [-36.5 -3.5 0 2.1 31.5];
    Delta_n = spline(teclas, Delta_n_empirico, n); % Interpolando
    % obtem-se Delta(n) para todas as teclas.
end
end
```

Nas Figuras 8 e 9, apresentamos o sinal gerado para as músicas Old McDonald's e Twinkle, Twinkle, Little Star, respectivamente, sem alterações nas oitavas e com a taxa de amostragem ajustada para $fs = 300Hz$. Embora essa frequência de amostragem esteja bem abaixo do necessário para reprodução audível que, segundo o teorema de Nyquist (Nyquist, 1928), deve ser no mínimo o dobro da frequência máxima do sinal audível ela foi escolhida aqui para facilitar a visualização das variações do sinal ao longo do tempo. O valor recomendado para reprodução de áudio é $fs = 44100Hz$, ideal para captar a gama completa de frequências que o ouvido humano pode perceber.

Observa-se nas Figuras 8 e 9, que a amplitude máxima é mantida dentro do intervalo $[-1, 1]$, devido ao uso da onda senoidal como base. Em ambas as figuras, as mudanças nas frequências são claramente visíveis à medida que as notas musicais se alteram ao longo de cada melodia, refletindo as variações características de cada música.

Após a apresentação do Algoritmo 4, é importante esclarecer que o uso da curva de Railsback para ajustar a frequência foi feito de maneira ilustrativa, com o intuito de exemplificar sua aplicabilidade na afinação de pianos. Na prática, um afinador de piano poderia coletar valores de desvio para algumas teclas específicas de um piano real de forma empírica e, em seguida, utilizar técnicas de

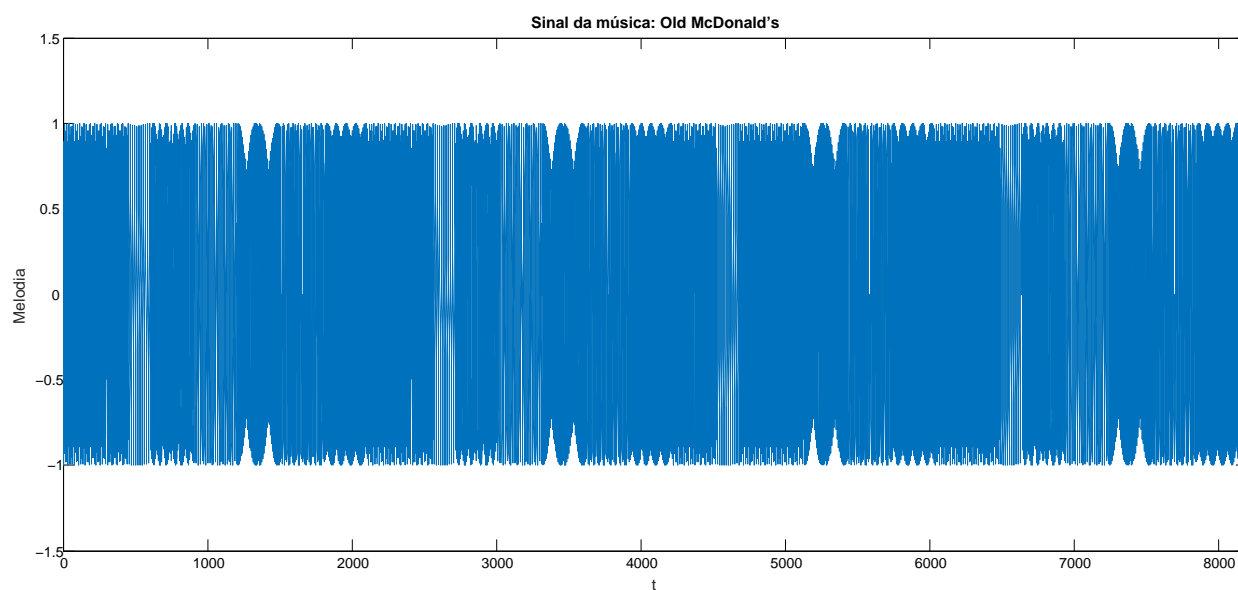


Figura 8: Sinal obtido para o Algoritmo 4 sem alteração de oitava para a música Old McDoanld's.

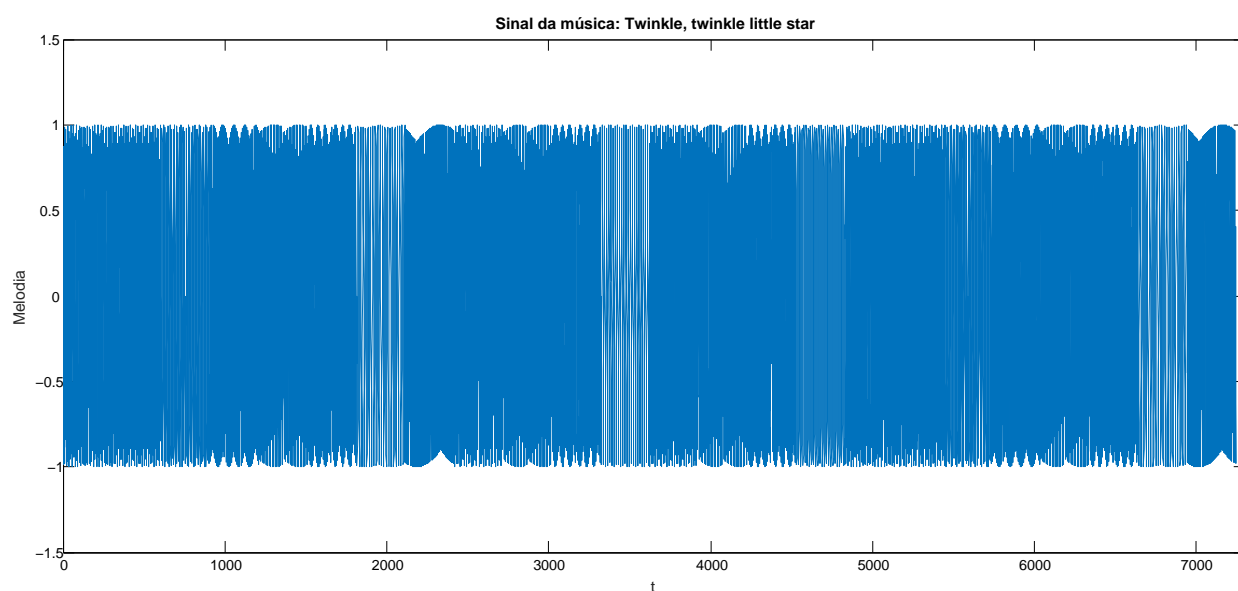


Figura 9: Sinal obtido para o Algoritmo 4 sem alteração de oitava para a música Twinkle, twinkle little Star.



interpolação para estimar os desvios das demais teclas. Com esses valores interpolados, a frequência ajustada para cada tecla pode ser calculada por meio da fórmula da frequência ajustada (2), auxiliando o afinador a alinhar as frequências reais com as percepções auditivas ideais. Esse método permite que a afinação seja ajustada de acordo com as características acústicas do instrumento, possibilitando uma afinação precisa e harmoniosa, respeitando os princípios da curva de Railsback.

6 Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos aplicações da função seno e da expansão em série de Fourier na combinação de notas e ritmos musicais. Os códigos desenvolvidos oferecem uma introdução prática e interativa à criação musical e à síntese sonora, tornando-se ferramentas valiosas tanto para alunos iniciantes em matemática quanto para entusiastas da música interessados em explorar a geração de áudio. A flexibilidade e a simplicidade do MATLAB proporcionam uma compreensão prática dos conceitos fundamentais de frequência, oitava e duração das notas musicais.

A curva de Railsback desempenha um importante papel ao destacar as nuances de afinação em pianos, evidenciando as variações reais das frequências das notas em comparação com a afinação temperada ideal. Ao incorporarmos essa curva no desenvolvimento dos algoritmos obtemos uma reprodução mais precisa e realista do som do piano. Além disso, a representação dos sinais pela série de Fourier é fundamental para a análise e síntese de áudio, permitindo a decomposição de formas de onda complexas em somas de funções senoidais.

7 Bibliografia

- SILVA, P. C. Pitágoras, os números e a música cósmica. **Piauí**, 2016. Disponível em: <https://piaui.folha.uol.com.br/pitagoras-os-numeros-e-a-musica-cosmica/>. Acesso em: 10 jul. 2024.
- SOUSA, M. N. V. **A evolução da notação musical do ocidente na história do livro até à invenção da imprensa**. 2012. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Documentais) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2012.
- RAILSBACK, O. L. Scale temperament as applied to piano tuning. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 9, n. 3, p. 271–274, 1938b.
- COSTA, E. C. **Acústica técnica**. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
- MEIRELLES, M. G. A compreensão pública do som. **Revista de Ciência Elementar**, v. 9, n. 2, 2021.
- RAILSBACK, O. L. A study of the tuning of pianos. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 10, n. 1, p. 86, 1938a.
- GIORDANO, N. Explaining the railsback stretch in terms of the inharmonicity of piano tones and sensory dissonance. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 138, n. 4, p. 2359–2366, 2015.



JANATA, A. J. **Transactions of the board of trustees**. Chicago: University of Illinois, 1962.
Disponível em:
<https://uihistories.library.illinois.edu/cgi-bin/rview?REPOSID=8&ID=8125&pagenum=1297>.
Acesso em: 11 nov. 2024.

THE KEEP. The institutional repository of Eastern Illinois University. [Charleston: Eastern Illinois University, 2024] Disponível em: https://thekeep.eiu.edu/archives_faculty_mr/253/. Acesso em: 11 nov. 2024.

CARRION, V. L. Matemáticas para afinar instrumentos musicales. **Suma**, v. 65, p. 99–104, 2010.

GUTIÉRREZ RAMIREZ, L. G.; POSADA GAVIRIA, D. **Construcción de un afinador digital como alternativa de ajuste de las frecuencias de un piano utilizando la FFT en Arduino**. 2019. 43 f. Bachelor Thesis (Ingeniería Física) - Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, 2019.
Disponível em: <https://hdl.handle.net/11059/10808> de acesso. Acesso em: 10 jul. 2024.

BLEICHER, L.; SILVA, M. M.; RIBEIRO, J. W.; MESQUITA, M. G. Análise e simulação de ondas sonoras assistidas por computador. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 129–133, 2002.

BOYCE, W. E. DIPRIMA, R. C. **Ecuaciones diferenciales elementares e problemas de valores de contorno**, 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010

MARTINEZ, A. L. M. **Piano melody illustrating Railsback curve and sound waves**. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 2024. Disponível em:
www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/175278-piano-melody-illustrating-railsback-curve-and-sound-waves. Acesso em: 11 nov. 2024.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

KENNEY, S. SongMats for preschoolers: exploratory play with notation. **General Music Today**, v. 20, n. 1, p. 38–40, 2006.

ALVIM, I. C. P.; SANTIAGO, P. F. “Quero ver você brilhar”: as twinkle variations e a abordagem técnicomusical para iniciantes no Suzuki Piano School. In: NAS NUUVENS... CONGRESSO DE MÚSICA, 4., 2018, [Belo Horizonte]. **Anais [...]**. [Belo Horizonte: UFMG], 2018.

NYQUIST, H. Certain topics in telegraph transmission theory. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 47, n. 2, p. 617-644, 1928.