Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

Francisco José dos Santos Nascimento
Universidade Federal do Vale do São Francisco (Univasf), Colegiado de Geologia, Senhor do Bonfim,
francisco.jsn@univasf.edu.br

Conjugação analítica entre sistemas diferenciais planares e sistemas potenciais

Analytic conjugation between planar differential systems and potential systems

Resumo

O clássico Teorema da Forma Normal de Poincaré afirma que um ponto crítico de um campo vetorial planar analítico é um centro não degenerado se e somente se houver uma mudança de coordenada analítica tal que nas novas coordenadas o campo vetorial inicial seja da forma $f(x^2+y^2)\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)$, onde f é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que $f(0)>0$. Neste artigo é provado que um campo vetorial planar analítico com um centro não degenerado em $(0,0)$ é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0,0)$, a um campo vetorial hamiltoniano da forma $y\frac{\partial}{\partial x}-V'(x)\frac{\partial}{\partial y}$, onde V é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que $V(0)=V'(0)=0$ e $V''(0)>0$. Este resultado é uma resposta parcial a um problema proposto por Chicone em 1987.
Palavras-chave: Campos vetoriais planares analíticos. Centro não degenerado. Conjugação analítica. Sistemas potenciais.

Abstract

The classic Poincaré Normal Form Theorem states that a critical point of an analytic planar vector field is a non-degenerate center if and only if there is an analytic coordinate change such that in the new coordinates the vector field initial is of the form $f(x^2+y^2)\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)$, where f is an analytic function defined in a neighborhood of the origin such that $f(0)>0$. In this article it is proved that an analytical planar vector field with a non-degenerate center at $(0,0)$ is analytically conjugate, in a neighborhood of $(0,0)$, to a Hamiltonian vector field of the form $y\frac{\partial}{\partial x}-V'(x)\frac{\partial}{\partial y}$, where V is an analytic function defined in a neighborhood of the origin such that $V(0)=V'(0)=0$ and $V''(0)>0$. This result is a partial answer to a problem proposed by Chicone in 1987.
Keywords: Analytic planar vector fields. Non-degenerate center. Analytic conjugation. Potential systems.

Artigo recebido em ago. 2024 e aceito em dez. 2024

1 Introdução

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções analíticas reais definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2\}$. Seja $P, Q \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R})$ e considere o sistema diferencial analítico

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \tag{1}$$

O sistema (1) define em Ω o campo vetorial planar $X = (P, Q) \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Neste artigo, o campo vetorial $X = (P, Q)$ será frequentemente representado pelo operador diferencial

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Um ponto $p \in \Omega$ tal que $X(p) = (0, 0)$ é chamado de um ponto singular de X. Um ponto singular p é não degenerado se o determinante da matriz Jacobiana $DX(p)$ de X em p for diferente de zero, isto é, se $P_x(p)Q_y(p) - P_y(p)Q_x(p) \neq 0$. Um ponto singular p é chamado de centro de X se existe uma vizinhança aberta U de p tal que cada solução de (1) com condição inicial em $U - \{p\}$ define uma órbita periódica ao redor de p. A maior vizinhança $\mathcal{A}$ com essa propriedade é chamada de anel de período de p. Seja p um centro de X e seja $T(q)$ o período da órbita que passa por $q \in \mathcal{A}$. A função $q \to T(q)$ é chamada de função de período associada ao centro p.

Sejam Ω_1 e Ω_2 conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$. Os campos vetoriais $X \in C^\omega(\Omega_1, \mathbb{R}^2)$ e $Y \in C^\omega(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ são analiticamente equivalentes (ou analiticamente conjugados) se existe um difeomorfismo analítico $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que

$$D_q hX(q) = Y(h(p)) \quad \text{para todo} \quad q \in \Omega_1. \tag{3}$$

O difeomorfismo h mapeia pontos singulares em pontos singulares, e órbitas periódicas em órbitas periódicas, preservando o período das órbitas periódicas. Seja p um ponto singular p de X, dizemos que X é localmente analiticamente conjugado a um campo vetorial Y se a igualdade (3) for válida em uma vizinhança de p.

2 Resultado principal

O resultado principal deste artigo é o seguinte teorema.

Teorema 1 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que $(0, 0) \in \Omega$ e suponha que o campo vetorial $X \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tenha um centro não degenerado em $(0, 0)$. Então X é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0, 0)$, ao campo vetorial*

$$Y = y\frac{\partial}{\partial x} - V'(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4}$$

onde V é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) > 0$.

O Teorema 1 é uma resultado original deste artigo e não foi publicado em nenhum outro trabalho. Ele responde, parcialmente, um problema proposto por Chicone em 1987 (ver [1]).

O campo vetorial (4) define o sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -V'(x). \tag{5}$$

Este sistema é chamado de sistema potencial e tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores. Dentre as questões abordadas, duas se destacam e ambas estão relacionadas à função período associada ao centro do sistema (5). A primeira questão é dedicada ao estudo da monotonicidade da função período. Essa questão é abordada em vários artigos, por exemplo, [1], [2], [3],[4], [5]. A segunda questão diz respeito à possibilidade de construir uma função potencial V a partir de uma função positiva T. Essa questão é chamada de problema inverso e foi abordada em vários artigos, por exemplo, [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Em [1] Chicone questiona sob quais condições um campo vetorial X com um centro em $(0,0)$ é conjugado a um campo vetorial hamiltoniano do tipo (4). O teorema (1) é uma resposta à questão proposta por Chicone para o caso particular em que X é analítico e o centro em $(0,0)$ é não degenerado.

3 Demonstração do Teorema 1

A ideia central da prova consiste em construir um campo vetorial do tipo (4), a partir da função de período do campo vetorial X, de tal forma que a função de período de Y seja igual à função de período de X. A prova será dividida em alguns lemas.

Lema 2 *Seja* $X = P\frac{\partial}{\partial u} + Q\frac{\partial}{\partial v}$ *um campo vetorial analítico com centro não degenerado em* $(0,0)$*. Então* X *é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de* $(0,0)$*, ao campo vetorial*

$$X(\xi,\eta) = f(\xi^2+\eta^2)\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \tag{6}$$

onde f *é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que* $f(0) > 0$*.*

Demonstração: É uma consequência imediata do Teorema da Forma Normal de Poincaré (veja [13]).

Note que (6) é um campo vetorial hamiltoniano com função hamiltoniana $H(\xi,\eta) = F(\xi^2+\eta^2)$, onde F é a função analítica definida por

$$F(z) = \frac{1}{2}\int_0^z f(s)ds. \tag{7}$$

Portanto, as órbitas periódicas de (6) estão contidas nas curvas de nível $H(\xi,\eta) = E$.

Lema 3 *Seja* $E \geq 0$*, a função de período* $T(E)$ *de (6) parametrizada por* $H(\xi,\eta) = E$ *é a função analítica dada por*

$$T(E) = \frac{\pi}{F'(F^{-1}(E))} = \pi\frac{d}{dE}F^{-1}(E). \tag{8}$$

Demonstração: Em coordenadas polares (6) se torna

$$X(r,\theta) = f(r^2)\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{9}$$

onde $r^2 = \xi^2+\eta^2$ e $\theta = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$. Assim, a origem é um centro com as órbitas periódicas dentro dos círculos $\xi^2+\eta^2 = r^2$. Portanto, o período da órbita periódica de (6) dentro do círculo de raio r é dado por

$$\hat{T}(r) = \frac{2\pi}{f(r^2)}. \tag{10}$$

Seja $E > 0$ tal que $H(\xi, \eta) = F(\xi^2 + \eta^2) = E$. Como $F'(0) = f(0) > 0$ temos que F tem uma inversa analítica em uma vizinhança de zero. Portanto, $r^2 = \xi^2 + \eta^2 = F^{-1}(E)$ em uma vizinhança de zero. Substituindo $r = \sqrt{F^{-1}(E)}$ em (10) obtemos

$$T(E) = \hat{T}(\sqrt{F^{-1}(E)}) = \frac{2\pi}{f(F^{-1}(E))} \overset{(7)}{=} \frac{\pi}{F'(F^{-1}(E))}. \tag{11}$$

Note que, por definição, $T(E)$ é analítico em uma vizinhança de zero com $T(0) = \pi/F'(0) > 0$.

Lema 4 *Seja $T(E)$ a função analítica definida em (11). Então existe uma função analítica V, definida em uma vizinhança de zero, tal que $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) > 0$. Além disso, a função de período do campo vetorial hamiltoniano, definida em uma vizinhança de $(0,0)$, por*

$$Y(x, y) = y\frac{\partial}{\partial x} - V'(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{12}$$

é igual a $T(E)$.

Demonstração: Como $F^{-1}(E)$ é analítico na vizinhança de zero, com $F^{-1}(0) = 0$, existe uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$F^{-1}(E) = \sum_{n\geq 1} a_n E^n. \tag{13}$$

Portanto,

$$\left(F^{-1}\right)'(E) = \sum_{n\geq 1} n a_n E^{n-1}. \tag{14}$$

Como $\left(F^{-1}\right)'(0) = 1/F'(0)$, temos que $a_1 = 1/F'(0) > 0$. Seja $(b_n)_{n\geq 1})$ a sequência de números reais definida por

$$b_n = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n+1/2)} a_n, \tag{15}$$

onde Γ é a função gama de Euler. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} = 0$, existe uma constante $M > 0$ tal que $|b_n| \leq nM|a_n|$. Portanto, a função $\varphi(E)$ definida por

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^{2n-1} \tag{16}$$

é analítica em uma vizinhança de zero, com $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = b_1 = \sqrt{2}a_1/2 > 0$. Seja $\zeta(E)$ definida em uma vizinhança de zero por

$$\zeta(E) = \varphi(\sqrt{E}) = \sum_{n\geq 1} b_n E^{(2n-1)/2}. \tag{17}$$

Como

$$\zeta'(E) = \frac{\varphi'(E)}{2\sqrt{E}},$$

segue-se que $\lim_{E\to 0^+} \zeta'(E) = +\infty$ e, consequentemente, $\zeta(E)$ é invertível em uma vizinhança de zero. Seja V a função definida em uma vizinhança de zero por $V(\tilde{x}) = \zeta^{-1}(\tilde{x})$. Por definição, V é analítico em uma vizinhança de zero com $V(0) = V'(0) = 0$ e $V''(0) > 0$. De fato, como $\varphi'(0) > 0$, $\varphi(z)$ é invertível em uma vizinhança de zero. Portanto, $x = \zeta(E) = \varphi(\sqrt{E})$ implica que $\zeta^{-1}(x) = [\varphi^{-1}(x)]^2$. Então $V(x) = \zeta^{-1}(x) = [\varphi^{-1}(x)]^2$ é analítico em uma vizinhança de zero. Além disso, segue da definição de V que $V(0) = V'(0) = 0$ e

$$V''(0) = 2(\varphi^{-1})'(0) = 2/\varphi'(0) = 2/b_1 > 0.$$

Note que, por definição, V é uma função par. Seja Y o campo vetorial hamiltoniano definido por

$$Y(x, y) = y\frac{\partial}{\partial x} - V'(x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{18}$$

Note que, por definição, Y é analítico em uma vizinhança de $(0, 0)$ e tem um centro não degenerado em $(0, 0)$. Portanto, as órbitas periódicas de (18) estão contidas nas curvas de nível $H(x, y) = E$, onde H é a função hamiltoniana definida em uma vizinhança de $(0, 0)$ por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x). \tag{19}$$

Seja $\hat{T}(E)$ o período da órbita periódica com $H(x, y) = E$ do campo vetorial (18). Por (19) temos que

$$y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}. \tag{20}$$

Então

$$\begin{aligned}\hat{T} &= 2\int_{V_-^{-1}(E)}^{V_+^{-1}(E)} \frac{dx}{y} = 2\int_{V_-^{-1}(E)}^{V_+^{-1}(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} \\ &= \sqrt{2}\int_0^{V_+^{-1}(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} - \sqrt{2}\int_0^{V_-^{-1}(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},\end{aligned}$$

onde V_-^{-1} e V_+^{-1} denotam o inverso de V em $x < 0$ e $x > 0$ respectivamente. A mudança de coordenadas $x = V_+^{-1}(E)$ e $x = V_-^{-1}(E)$ na primeira e segunda integral acima respectivamente produzem

$$\hat{T}(E) = \sqrt{2}\int_0^E \frac{\left(V_+^{-1}(s) - V_-^{-1}(s)\right)' ds}{\sqrt{E - s}}. \tag{21}$$

Como V é par, temos que $V_-^{-1}(E) = -V_+^{-1}(E)$ e, consequentemente, $V_+^{-1}(E) - V_-^{-1}(E) = 2V_+^{-1}(E) = 2V^{-1}(E)$. Portanto, a função de período $\hat{T}(E)$ de (18) parametrizada pelos níveis de energia $H = E$ é a função analítica definida por

$$\hat{T}(E) = 2\sqrt{2}\int_0^E \frac{(V^{-1})'(s)ds}{\sqrt{E - s}}. \tag{22}$$

Por definição,

$$V^{-1}(E) = \varphi(\sqrt{E}) \overset{(17)}{=} \sum_{n\geq 1} b_n E^{(2n-1)/2}$$

e, portanto,

$$(V^{-1})'(E) = \sum_{n\geq 2} \frac{(2n-1)}{2} b_n E^{(2n-3)/2}.$$

Substituindo a série de $(V^{-1})'(E)$ em (22), obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{T}(E) &= 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 2}\frac{(2n-1)}{2}b_n\int_0^E \frac{s^{(2n-3)/2}ds}{\sqrt{(E-s)}} = 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 2}\frac{(2n-1)}{2}b_n\int_0^1 \frac{(Et)^{(2n-3)/2}Edt}{\sqrt{(E-Et)}}\\
&= 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 2}\frac{(2n-1)}{2}b_nE^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{(2n-3)/2}dt}{\sqrt{(1-t)}} = 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)}{2}b_nE^{n-1}2\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}\\
&= 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 1}b_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)}E^{n-1}.
\end{aligned}$$

Por definição, $b_n = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n+1/2)}a_n$. Então

$$b_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)}E^{n-1} = \frac{n\sqrt{2\pi}\Gamma(n)}{4\Gamma(n+1/2)}a_n \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{2}\pi n a_n}{4}.$$

Portanto

$$\hat{T}(E) = 2\sqrt{2}\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{2}\pi n a_n}{4}E^{n-1} = \pi\sum_{n\geq 1} n a_n E^{n-1} \overset{(14)}{=} \pi(F^{-1})'(E) = \frac{\pi}{F'(F^{-1}(E))} \overset{(8)}{=} T(E).$$

3.1 Conclusão da demonstração do Teorema 1

Por construção, o campo vetorial (18) tem um centro não degenerado em $(0,0)$. Então, pelo lema 2 (18) é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0,0)$, ao campo vetorial

$$Y(\xi,\eta) = g(\xi^2+\eta^2)\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \tag{23}$$

onde g é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que $g(0) > 0$. Pelo lema 3, a função de período $\hat{T}(E)$ de (23) parametrizada por $H(\xi,\eta) = E$ é a função analítica dada por

$$\hat{T}(E) = \frac{\pi}{G'(G^{-1}(E))} = \pi\frac{d}{dE}G^{-1}(E), \tag{24}$$

onde G é a função analítica definida por

$$G(z) = \frac{1}{2}\int_0^z g(s)ds. \tag{25}$$

Por construção, $\hat{T}(E) = T(E) = \pi\frac{d}{dE}F^{-1}(E)$ e, portanto, $\pi\frac{d}{dE}G^{-1}(E) = \pi\frac{d}{dE}F^{-1}(E)$. Como $G^{-1}(0) = F^{-1}(0) = 0$, temos que

$$G^{-1}(E) = \int_0^E \frac{d}{dE}G^{-1}(s)ds = \int_0^E \frac{d}{dE}F^{-1}(s)ds = F^{-1}(E).$$

Portanto, G coincide com F em uma vizinhança de zero. Isso implica que os campos vetoriais (6) e (23) coincidem em uma vizinhança de $(0,0)$. Sejam h_1 e h_2 os difeomorfismos analíticos que conjugam os campos X e Y (definidos em (18)) com (6) respectivamente. Então o difeomorfismo analítico h definido, em uma vizinhança de $(0,0)$, por $h = h_2^{-1} \circ h_1$ conjuga os campos X e Y. Portanto, o campo vetorial X da definição do teorema (1) é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de $(0,0)$, ao campo vetorial hamiltoniano definido em (18). Com isso, concluímos a demonstração do Teorema 1.

Uma aplicação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é chamada de involução linear sobre $\mathbb{R}^2$ se $R \neq id$ e $R^2 = id$. Um campo vetorial $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é reversível em relação a R ou R-reversível em Ω se $R \circ X(q) = -X \circ R(q)$ para todo $q \in \Omega$.

Corolário 5 *Seja* $X = P\frac{\partial}{\partial u} + Q\frac{\partial}{\partial v}$ *um campo vetorial analítico em uma vizinhança de* $(0,0)$ *com* $X(0,0) = (0,0)$ *e* $P_x(0,0)Q_y(0,0) - P_y(0,0)Q_x(0,0) > 0$. *Suponha que* X *seja* R*-reversível, com* $R(u,v) = (u,-v)$. *Então* X *é analiticamente conjugado, em uma vizinhança de* $(0,0)$, *ao campo vetorial* $Y = y\frac{\partial}{\partial x} - V'(x)\frac{\partial}{\partial y}$, *onde* V *é uma função analítica definida em uma vizinhança da origem tal que* $V(0) = V'(0) = 0$ *e* $V''(0) > 0$.

Demonstração: Sob essas condições X tem um centro não degenerado em $(0,0)$ (veja [14], Teorema 1). A conclusão segue do Teorema 1.

4 Conclusão

Como já mencionado, este trabalho apresenta uma resposta parcial a uma questão colocada por Chicone em 1987. O resultado apresentado cria expectativas para pesquisas em casos mais gerais. A equivalência global entre campos vetoriais da forma $X(u,v) = v\partial_u + f(u, v^2/2)\partial_v$ e da forma $Y(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} - V'(x)\frac{\partial}{\partial y}$ foi estudada em [15] e [16]. A versão global do Teorema 1 está provada no Teorema 1.2 da referência [17].

Referências

[1] CHICONE, C. The monotonicity of the period function for planar Hamiltonian vector fields. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 69, n. 3, p. 310-321, 1987.

[2] GASULL, A. et al. The period function for Hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 139, n. 2, p. 237-260, 1997.

[3] CHAVARRIGA, J.; SABATINI, M. A survey of isochronous centers. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, Springer, v. 1, p. 1-70, 1999.

[4] SFECCI, A. From isochronous potentials to isochronous systems. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 258, n. 5, p. 1791-1800, 2015.

[5] YANG, L.; ZENG, X. The period function of potential systems of polynomials with real zeros. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, Elsevier, v. 133, n. 6, p. 555-577, 2009.

[6] URABE, M. Potential forces which yield periodic motions of a fixed period. **Journal of Mathematics and Mechanics**, JSTOR, v. 10, n. 4, p. 569-578, 1961.

[7] URABE, M. Relations between periods and amplitudes of periodic solutions of $\ddot{x} + g(x) = 0$. **Funkcialaj Ekvacioj**, v. 6, p. 63-88, 1964.

[8] ALFAWICKA, B. Inverse problem connected with half-period function analytic at the origin. **Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics**, v. 32, n.5-6, p. 267-274, 1984.

[9] ALFAWICKA, B. Inverse problems connected with periods of oscillations described by $\ddot{x}+g(x) = 0$. **Annales Polonici Mathematici**, v. 44, n. 3, p. 297-308, 1984.

[10] MAÑOSAS, F.; TORRES, P. J. Two inverse problems for analytic potential systems. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 245, n. 12, p. 3664-3673, 2008.

[11] KAMIMURA, Y. Global existence of a restoring force realizing a prescribed half-period. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 248, n. 10, p. 2562-2584, 2010.

[12] KAMIMURA, Y.; KANEYA, T. Global determination of a nonlinearity from a periodic motion. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 403, n. 2, p. 506-521, 2013.

[13] MARDESIC, P.; ROUSSEAU, C.; TONI, B. Linearization of isochronous centers. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 121, n. 1, p. 67-108, 1995.

[14] TEIXEIRA, M. A.; YANG, J. The center-focus problem and reversibility. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 174, n. 1, p. 237-251, 2001.

[15] RAGAZZO, C. Scalar autonomous second order ordinary differential equations. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, Springer, v. 11, n. 2, p. 277-415, 2012.

[16] NASCIMENTO, F. J. S. **Sistemas Newtonianos reversíveis bidimensionais**. 2023. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

[17] GROTTA-RAGAZZO, C.; NASCIMENTO, F. J. S. Global normalizations for centers of planar vector fields. **Journal of Differential Equations**, v. 415, p. 701-721, 2025. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039624006387. Acesso em: 10 abr. 2024.