

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 24, 2024
Artigo de Pesquisa

**Raquel Cristina de Andrade
Queiroz**

Instituto Federal de São Paulo
(IFSP), Hortolândia,
raquelcristinaqa@gmail.com

Vinícius Francisco Wasques

Centro Nacional de Pesquisa em
Energia e Materiais (CNPEM), Ilum
Escola de Ciência, Campinas

Uma abordagem numérica para modelos populacionais considerando incerteza do tipo intervalar nas condições iniciais

A numerical approach to populational models considering
interval uncertainty in the initial conditions

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre o princípio de extensão de Zadeh e o princípio de extensão $\text{sup-}J_0$ na propagação de incerteza, focado em modelos populacionais descritos por equações diferenciais. Neste estudo, é considerado que as condições iniciais dos modelos são dados por intervalos, a fim de incorporar a incerteza intrínseca do fenômeno. Para isso, são estudados modelos de dinâmica populacional por meio do método numérico de Euler, que é adaptado à aritmética intervalar. Especificamente, são considerados três modelos, o de Malthus, Verhulst e Gompertz. Para cada modelo, são feitas simulações que permitem visualizar o comportamento e a propagação da incerteza tanto para a soma de Zadeh, quanto para a soma $\text{sup-}J_0$. Os resultados obtidos se alinham aos resultados teóricos, mostrando que a soma de Zadeh propaga a incerteza ao longo do tempo, enquanto o princípio de extensão $\text{sup-}J_0$ diminui a incerteza ao longo do tempo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Intervalares. Interatividade Fuzzy. Biomatemática. Dinâmicas Populacionais.

Abstract

This work presents a comparative study between Zadeh's extension principle and $\text{sup-}J_0$ extension principle, in uncertainty propagation, focusing on populational models described by differential equations. In this study, it is considered that the initial conditions of the models are given by intervals, in order to incorporate the intrinsic uncertainty of the phenomenon. To this end, population dynamics models are studied using Euler numerical method, which is adapted to interval arithmetic. Specifically, three models are considered, Malthus, Verhulst and Gompertz. Simulations are provided for each model in order to analyze the uncertainty propagation for both Zadeh's and $\text{sup-}J_0$ sums. The obtained results corroborate the theoretical results, showing that Zadeh's sum propagates uncertainty over time, whereas the $\text{sup-}J_0$ extension principle reduces the uncertainty.

Keywords: Interval Differential Equations. Fuzzy Interactivity. Biomathematics. Populational Dynamics.





1 Introdução

Equações diferenciais são estudadas por especialistas de diversas áreas devido sua capacidade de modelar problemas aplicados, como fenômenos biológicos, econômicos e físicos, permitindo uma melhor compreensão do seu comportamento. No entanto, as equações diferenciais tradicionais não incorporam as incertezas provenientes destes fenômenos. Segundo Bede [1], por meio da teoria intervalar é possível modelar estes fenômenos via equações diferenciais, levando em consideração as incertezas, que serão dadas por intervalos e incorporadas nos parâmetros e/ou condições iniciais e de fronteira do problema, possibilitando o estudo de como a incerteza evolui ao longo do tempo [2].

Na literatura existem várias abordagens para o estudo de equações diferenciais incorporando incerteza. Por exemplo, Santo Pedro e Barros [3] propuseram uma nova forma de resolver equações diferenciais fuzzy, utilizando o conceito de derivada fuzzy. Mizukoshi et al. [4] forneceram uma forma de resolver equações diferenciais, considerando incerteza na condição inicial do problema. Para isso, fizeram o uso do princípio de extensão de Zadeh. Abbasbandy e Viranloo [5] forneceram um método numérico para resolução de equações diferenciais fuzzy por meio de uma modificação do método de Taylor. Neste caso, as operações utilizadas foram as usuais dentro do espaço fuzzy. Todos esses trabalhos são generalizações da teoria intervalar, uma vez que um intervalo é em particular um número fuzzy.

Resolver equações diferenciais no contexto intervalar, pode ser uma tarefa custosa analiticamente, portanto, faz-se necessário o uso de métodos numéricos. Wasques et al. [6] propuseram um método numérico baseado no método de Euler em que as operações aritméticas envolvidas nas iterações foram adaptadas para intervalos, com o objetivo de estudar o modelo populacional de Malthus considerando uma imprecisão no número de indivíduos de uma população. No trabalho de Wasques et al. [7], os métodos numéricos de Euler e o método Runge-Kutta também mostraram-se eficientes para a solução numérica do modelo populacional de Malthus com condição inicial intervalar.

Neste trabalho, estudaremos a propagação da incerteza a partir da aritmética intervalar padrão e a aritmética do princípio de extensão $\text{sup-}J_0$. De acordo com [6], ao somar dois intervalos, tem-se como resultado um novo intervalo, este novo intervalo é maior que seus intervalos de origem. Para medir o tamanho do intervalo, calcula-se o diâmetro, quanto maior o diâmetro maior a incerteza [8]. No caso da soma padrão, o diâmetro tende a aumentar a cada iteração; enquanto na soma $\text{sup-}J_0$, o diâmetro tende a diminuir ou estabilizar, como mostrado em [6]. Sabendo disso, estudaremos a incerteza das soluções numéricas dos modelos populacionais de Malthus, Verhulst e Gompertz, via soma padrão e via soma $\text{sup-}J_0$.

Este artigo tem como objetivo mostrar que a aritmética via princípio de extensão $\text{sup-}J_0$ auxilia na produção de uma solução numérica com menos propagação de incerteza, em relação a abordagem usual na literatura que é feita por meio do princípio de extensão de Zadeh.

2 Preliminares

Nesta seção, evidenciaremos algumas noções de Teoria dos Conjuntos, Equações Diferenciais e Métodos Numéricos, que servem de base para a aplicação da Teoria Intervalar que apresentaremos e utilizaremos neste estudo. Também mostraremos as definições dos modelos matemáticos que serão adaptados ao contexto intervalar.

2.1 Função indicadora

Seja A um subconjunto do conjunto universo U . O processo pelo qual se determina o pertencimento ou não de um elemento x em A , é chamado de Função Indicadora, portanto, o subconjunto A pode ser caracterizado em termos de sua Função Indicadora [9]. O mesmo ocorre com todos os outros subconjuntos de U . Podemos denotar a função indicadora de A como $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$, tal que $\{0, 1\}$ é o conjunto contendo os valores possíveis que a função χ_A pode assumir, sendo

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}. \quad (1)$$

2.2 Equações diferenciais

Uma equação diferencial é uma equação cuja variável dependente é uma função incógnita, envolvendo uma ou mais variáveis independentes, a equação inclui a derivada da função incógnita em relação a uma ou mais variáveis independentes. Se a função incógnita depende de uma única variável independente, é classificada como equação diferencial ordinária, se depender de duas ou mais variáveis independentes, é classificada como equação diferencial parcial.

A ordem de uma equação diferencial será definida pela ordem da derivada de maior ordem presente na equação. A equação diferencial de ordem n , com a variável dependente y e a variável independente x , pode ser expressa como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2)$$

em que F é uma função que depende de x , y e as derivadas de y até a ordem n [10].

A solução de uma equação diferencial é uma função que, juntamente com suas derivadas de ordem n , satisfazem a equação diferencial no intervalo $I = (a, b)$, tal que $a < x < b$ [11].

Em um Problema de Valor Inicial (PVI), busca-se encontrar uma solução para a equação diferencial de ordem n no intervalo I , que satisfaça em x_0 as n condições iniciais

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dx}(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Os modelos de dinâmica populacional são tradicionalmente formulados como PVI, começando com uma condição inicial que define a população no instante inicial do modelo. Assim, resolver um modelo deste tipo, envolve encontrar uma função que satisfaça tanto a equação diferencial do modelo quanto a condição inicial dada. Nas próximas subseções, serão apresentados os modelos populacionais clássicos utilizados neste estudo.

2.3 Modelo de Malthus

O modelo Malthusiano, supõe que sendo $x = \phi(t)$ a população no tempo t , a taxa de variação de x é proporcional ao valor atual de x , obtendo então, o problema de valor inicial abaixo.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

Considerando $\lambda > 0$, $t = 0$ e a condição inicial $x_0 > 0$, ao resolver a equação diferencial (4), obtemos a equação $x = x_0 e^{\lambda t}$, que tem como característica o crescimento exponencial. Este modelo apresenta precisão para algumas populações por tempo limitado, pois considerando a realidade, populações podem passar por condições que reduzem a taxa de crescimento, mudando este comportamento de crescimento exponencial ilimitado [12].

2.4 Modelo de Verhulst

O Modelo de Verhulst, a princípio tem semelhança com o modelo populacional de Malthus, propondo que a taxa de variação da população em relação ao tempo seja proporcional à população no instante t , $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, com isso, uma população y , com $\lambda \neq 0$, apresentará um comportamento exponencial ilimitado em relação ao tempo, no entanto, no modelo de Verhulst é acrescentado um termo limitador de crescimento, que chamaremos de capacidade de suporte (K)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \lambda y \left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Com essa alteração, a população não crescerá indefinidamente, como no modelo Malthusiano, considerando que, à medida que o tempo t avança, a população se aproximará de sua capacidade de suporte K , e ficará estável em torno de K ; de modo que, quando a condição inicial está abaixo da capacidade de suporte o comportamento da população é de crescimento, quando está acima, de decréscimo. Outra característica relevante do modelo é seu ponto de inflexão em $\frac{K}{2}$, significando que o ponto de maior crescimento da população ocorre na metade de sua capacidade de suporte, portanto, neste ponto a taxa $\frac{dy}{dt}$ passará de crescente para decrescente. A solução analítica deste modelo pode ser obtida pelo método das equações separáveis, resultando em $y(t) = \frac{K}{C e^{-\lambda t} + 1}$, onde a constante C é obtida a partir da condição inicial dada em (5) [12].

2.5 Modelo de Gompertz

O modelo populacional de Gompertz pode ser usado para modelar problemas que envolvem o crescimento celular, como exemplo, o crescimento de células tumorais. O comportamento inicial do modelo é semelhante ao crescimento exponencial de Malthus, apresentando uma alta taxa de crescimento no começo, entretanto, posteriormente apresenta um crescimento lento. Dentre as variações do modelo de Gompertz, escolhemos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -az \ln\left(\frac{z}{K}\right) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (6)$$

Explorando as características do modelo, observa-se que $a > 0$ representa a constante associada à taxa de crescimento, K é a capacidade de suporte de células, e o termo logarítmico natural cujo

domínio é o conjunto dos números reais positivos e diferente de zero, preserva o comportamento de crescimento da população, para qualquer valor de a . Ao buscar a solução analítica da Equação (6), obtemos $z(t) = Ke^{e^{\ln\left(\frac{z_0}{K}\right)} - at}$, e o ponto de inflexão $\frac{K}{e}$ [12].

2.6 Métodos numéricos

O propósito do método de Euler é obter uma aproximação para a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem com problema de valor inicial, como a equação diferencial no ponto $t = t_n$ mostrada a seguir

$$\frac{dy}{dt}(t_n) = f(t_n, y(t_n)), a \leq t \leq b, \quad y(t_0) = y_0. \quad (7)$$

É conhecido como um método de passo simples, pois utiliza apenas informações do passo anterior para definir a aproximação do passo seguinte. Esta aproximação é obtida apenas para valores discretos do intervalo $[a, b]$, estes pontos são chamados de pontos da malha ou malha numérica, e a distância entre esses pontos é dada por $h = t_{n+1} - t_n$, nominado como tamanho do passo.

A partir do Teorema de Taylor deduziremos o método de Euler, assim como feito em [13]. Suponha que $y(t)$ é solução única da equação (7), e é derivável até a ordem 2 no intervalo (a, b) , para cada $n = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, existe $a < \xi_n < b$ tal que

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + y''(\xi_n) \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2}. \quad (8)$$

Na equação (8) temos como resultado o Polinômio de Taylor de ordem 2 de $y(t)$ em torno de t_n , que se aproxima localmente do valor da função original que estivermos trabalhando. O último termo com a segunda derivada da função no ponto ξ , representa o erro.

Sabendo que $h = t_{n+1} - t_n$, e que de acordo com a equação (7), $y'(t_n)$ pode ser descrito como $f(t_n, y(t_n))$, reescrevemos a equação (8) como

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + y''(\xi_n) \frac{h^2}{2}. \quad (9)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos da equação (9), e substituindo $y(t_n)$ e $y(t_{n+1})$ por seus valores aproximados y_n e y_{n+1} , temos como resultado o Polinômio de Taylor de ordem 1, também conhecido como método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (10)$$

Neste caso, o erro do método de Euler aumenta, no pior caso, de forma linear em h . Em outras palavras, dizemos que a ordem do erro é h e denotamos por $O(h)$.

2.7 Teoria intervalar

Considerando os intervalos fechados $A = [\underline{A}, \bar{A}]$ e $B = [\underline{B}, \bar{B}]$ que são subconjuntos dos números reais, temos que A é definido por todos os elementos a tais que $\underline{A} \leq a \leq \bar{A}$, do mesmo modo, B é definido por todos os elementos b tais que $\underline{B} \leq b \leq \bar{B}$. As operações aritméticas com

intervalos, pela definição, podem ser escritas como o conjunto $A \odot B = \{a \odot b : a \in A, b \in B\}$, em que o símbolo \odot representa qualquer uma das operações de adição, subtração, multiplicação ou divisão. Para qualquer destas operações o resultado também será um intervalo. Neste trabalho, temos como enfoque a operação de adição, então, a adição dos intervalos A e B resultam no conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ [14].

Para realizar esta operação, utilizamos o princípio de extensão de Zadeh e o princípio de extensão sup- J_0 , nessa ordem

$$\text{Zadeh (ou soma padrão): } [\underline{A}, \bar{A}] + [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \bar{A} + \bar{B}],$$

$$\text{sup-}J_0 \text{ (ou soma interativa } J_0\text{): } [\underline{A}, \bar{A}] + J_0 [\underline{B}, \bar{B}] = [\min(\underline{A} + \bar{B}, \bar{A} + \underline{B}), \max(\underline{A} + \bar{B}, \bar{A} + \underline{B})].$$

Como exemplo, para compreender a diferença entre as somas, considere os intervalos $A = [4, 7]$ e $B = [2, 3]$. A adição desses intervalos via Zadeh, é da forma $A + B = [4 + 2, 7 + 3] = [6, 10]$, e por sup- J_0 temos $A +_{J_0} B = [\min(4 + 3, 7 + 2), \max(4 + 3, 7 + 2)] = [7, 9]$. A princípio, podemos observar que as operações retornam resultados distintos, e para além disto, podemos analisar a incerteza que esses intervalos incorporam. Essa incerteza é medida por meio do diâmetro do intervalo, que é calculado por $\dim(X) = \bar{X} - \underline{X}$. Portanto, do exemplo, o diâmetro da soma de Zadeh é $\dim(A + B) = 4$ e a soma sup- J_0 é $\dim(A +_{J_0} B) = 2$, isto é, o intervalo $A + B$ possui mais incerteza que o intervalo $A +_{J_0} B$.

Observe que nas soluções numéricas [15, 16, 17, 18] presentes na Seção 3, é preciso realizar subtrações de intervalos. Esta operação é definida para o princípio de extensão de Zadeh e pelo princípio de extensão sup- J_0 conforme mostrado a seguir

$$\text{Subtração de intervalos via Zadeh: } [\underline{A}, \bar{A}] - [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} - \bar{B}, \bar{A} - \underline{B}],$$

$$\text{Subtração de intervalos via sup-}J_0: [\underline{A}, \bar{A}] - J_0 [\underline{B}, \bar{B}] = [\min(\underline{A} - \bar{B}, \bar{A} - \underline{B}), \max(\underline{A} - \bar{B}, \bar{A} - \underline{B})].$$

Exemplificando com os mesmos intervalos $A = [4, 7]$ e $B = [2, 3]$, a subtração por Zadeh resulta no intervalo $[1, 5]$, com o diâmetro $\dim(A - B) = 4$, e por sup- J_0 o resultado é o intervalo $[2, 4]$ e o diâmetro $\dim(A -_{J_0} B) = 2$.

A aritmética sup- J_0 contribui para o controle do crescimento do diâmetro da soma [8], diminuindo a incerteza associada ao fenômeno em estudo, já a soma de Zadeh aumenta o diâmetro, propagando a incerteza ao longo do tempo, podendo gerar uma incerteza maior que a do estado anterior, perdendo o significado da modelagem. Sabendo disso, faremos o estudo de comparação entre as somas, nos modelos populacionais de Malthus, Verhulst e Gompertz, por meio da extensão de métodos numéricos clássicos de Equações Diferenciais no contexto da teoria intervalar.

3 Solução numérica intervalar

Métodos numéricos fazem parte das etapas para resolução de problemas, pois cada problema carrega uma imprecisão inerente, seja pelos dados de entrada, equipamentos usados para medição, modo como o dado foi representado no computador, entre outros fatores. Em modelos com equações diferenciais a imprecisão inerente também ocorre, e nestes casos, métodos numéricos podem ser apropriados para encontrar soluções aproximadas [11].

Neste estudo, aplicamos o método numérico proposto por Euler, que se adequa a equações diferenciais ordinárias com problema de valor inicial, bem como à teoria intervalar

$$X_{n+1} = X_n + hf(t_n, X_n), \quad (11)$$

em que X_n é o valor atual da solução; X_{n+1} é o próximo valor de solução estimado; t é o tempo; h é o tamanho do passo; n é o número de passos ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$); $f(t_n, X_n)$ é o valor do campo no atual X_n .

3.1 Modelo de Malthus intervalar

Para o modelo de Malthus intervalar, a condição inicial será o intervalo $X(0) = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ e a solução do modelo, o intervalo $X(t) = [\underline{x}_0 e^{\lambda t}, \overline{x}_0 e^{\lambda t}]$. Tal solução pode ser obtida aplicando o princípio de extensão de Zadeh à curva $ae^{\lambda t}$ onde a pertence ao intervalo $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. Com o método de Euler, temos h o tamanho do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, $X_n = [\underline{X}_n, \overline{X}_n]$ e para X_{n+1} deve-se adaptar o método nas formas a seguir.

Método de Euler adaptado ao princípio de extensão de Zadeh para o modelo de Malthus [7]

$$\begin{aligned} [\underline{X}_{n+1}, \overline{X}_{n+1}] &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] + h\lambda[\underline{X}_n, \overline{X}_n] \\ &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] + [h\lambda\underline{X}_n, h\lambda\overline{X}_n] \\ &= [\underline{X}_n + h\lambda\underline{X}_n, \overline{X}_n + h\lambda\overline{X}_n]. \end{aligned} \quad (12)$$

Método de Euler adaptado à soma interativa J_0 para o modelo de Malthus

$$\begin{aligned} [\underline{X}_{n+1}, \overline{X}_{n+1}] &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] + h\lambda[\underline{X}_n, \overline{X}_n] \\ &= [\underline{X}_n, \overline{X}_n] + [h\lambda\underline{X}_n, h\lambda\overline{X}_n] \\ &= [\min(\underline{X}_n + h\lambda\underline{X}_n, \overline{X}_n + h\lambda\underline{X}_n), \max(\underline{X}_n + h\lambda\overline{X}_n, \overline{X}_n + h\lambda\overline{X}_n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Para a construção dos gráficos de comparação entre o princípio de extensão de Zadeh e o princípio de extensão sup- J_0 , os valores atribuídos aos parâmetros das Figuras 1 e 2 foram os seguintes: $\lambda = 0, 1$, $h = 0, 01$, $tempo = 0 : h : 20$ e para a condição inicial o intervalo $x_0 = [1, 3]$; nas Figuras 3 e 4 a mudança é apenas no valor do tempo, $tempo = 0 : h : 50$.

Na Figura 1, a linha de cor azul representa a solução numérica do modelo de Malthus via Zadeh, e a linha preta pontilhada representa a solução numérica via sup- J_0 . Os comportamentos das soluções são distintos: a solução intervalar usando o método de Zadeh apresenta um intervalo de solução que cresce ao longo do tempo, já na solução sup- J_0 observa-se o intervalo de solução cada vez menor, desse modo, na solução de Zadeh ocorre a propagação da incerteza, por outro lado, na solução sup- J_0 a incerteza foi controlada. Para validar este resultado, analisamos os diâmetros das soluções na Figura 2. Via princípio extensão de Zadeh o diâmetro aumenta, e o diâmetro via princípio de extensão sup- J_0 diminui conforme o tempo passa.

Nas Figuras 3 e 4, o tempo da simulação foi ampliado, nota-se que na Figura 3 o comportamento exponencial do modelo de Malthus se mantém para os dois métodos. Na Figura 4 o diâmetro da soma de Zadeh segue crescendo para qualquer valor do tempo t , enquanto o diâmetro da soma interativa J_0 vai se aproximando de 0, como pode ser visto na Tabela 1.

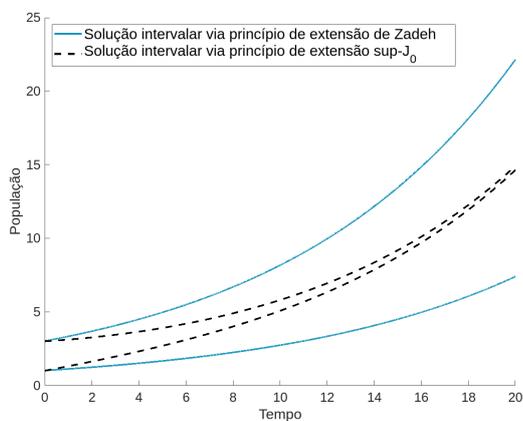


Figura 1: Malthus intervalar. Fonte: Elaborado pelos autores.

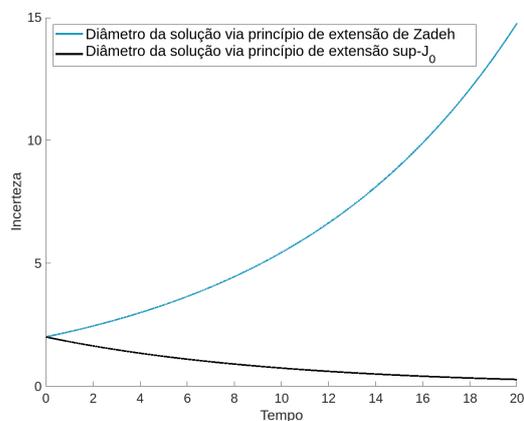


Figura 2: Diâmetros das soluções no modelo de Malthus. Fonte: Elaborado pelos autores.

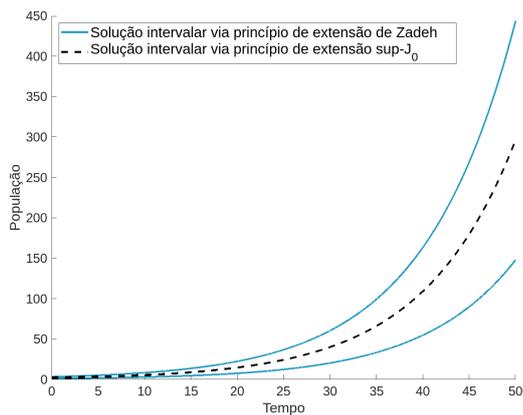


Figura 3: Malthus intervalar com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.



Figura 4: Diâmetros das soluções no modelo de Malthus com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 1 apresenta os diâmetros das soluções intervalares do modelo de Malthus. A primeira coluna é de iteração, a segunda coluna é dos diâmetros da solução intervalar via princípio de extensão de Zadeh, e a última coluna com os diâmetros da solução intervalar via princípio de extensão sup - J_0 . Inserimos as cinco primeiras iterações e as cinco últimas, para que fosse possível visualizar numericamente o comportamento dos diâmetros em cada solução. É possível observar que, via princípio de extensão de Zadeh a iteração 1 tem diâmetro de valor igual a 2,000, e a iteração 100 tem diâmetro igual a 250,4786. Portanto, o diâmetro aumentou, assim como a incerteza. Via princípio de extensão sup - J_0 , o diâmetro inicia com valor igual a 2,000, e a última iteração é igual a 0,0125, evidenciando uma diminuição da incerteza associada ao diâmetro da solução.

Iteração	Diâmetro da solução via Zadeh	Diâmetro da solução via sup- J_0
1	2,0000	2,0000
2	2,1000	1,9000
3	2,2050	1,8050
4	2,3152	1,7147
5	2,4310	1,6290
⋮	⋮	⋮
96	206,0694	0,0153
97	216,3728	0,0145
98	227,1915	0,0138
99	238,5510	0,0131
100	250,4786	0,0125

Tabela 1: Diâmetro da solução via princípio de extensão de Zadeh e diâmetro da solução via princípio de extensão sup- J_0 para o modelo de Malthus intervalar. Foram consideradas apenas as primeiras cinco iterações e as cinco últimas.

3.2 Modelo de Verhulst intervalar

No modelo de Verhulst intervalar, a condição inicial e a solução do modelo, são os intervalos

$$Y(0) = [\underline{y}_0, \overline{y}_0] \quad \text{e} \quad Y(t) = \left[\frac{K}{1 + \left(\frac{K}{\underline{y}_0} + 1\right) e^{-\lambda t}}, \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{\overline{y}_0} + 1\right) e^{-\lambda t}} \right], \quad (14)$$

novamente, sendo obtidas por meio da extensão de Zadeh da solução clássica do modelo.

Com o método de Euler, temos h o tamanho do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, $Y_n = [\underline{Y}_n, \overline{Y}_n]$. Adaptando o método numérico às somas, obtemos Y_{n+1} da formas mostradas abaixo.

Método de Euler adaptado ao princípio de extensão de Zadeh para o modelo de Verhulst

$$\begin{aligned}
 [\underline{Y}_{n+1}, \overline{Y}_{n+1}] &= [\underline{Y}_n, \overline{Y}_n] + h \left[\lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right), \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right) \right] \\
 &= [\underline{Y}_n, \overline{Y}_n] + \left[h \lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right), h \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right) \right] \\
 &= \left[\underline{Y}_n + h \lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right), \overline{Y}_n + h \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Método de Euler adaptado à soma interativa J_0 para o modelo de Verhulst

$$\begin{aligned}
 [\underline{Y}_{n+1}, \overline{Y}_{n+1}] &= [\underline{Y}_n, \overline{Y}_n] + h \left[\lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right), \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right) \right] \\
 &= [\underline{Y}_n, \overline{Y}_n] + \left[h \lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right), h \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right) \right] \\
 &= \left[\min \left(\underline{Y}_n + h \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right), \overline{Y}_n + h \lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right) \right), \right. \\
 &\quad \left. \max \left(\underline{Y}_n + h \lambda \overline{Y}_n \left(1 - \frac{Y_n}{K} \right), \overline{Y}_n + h \lambda \underline{Y}_n \left(1 - \frac{\overline{Y}_n}{K} \right) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Os valores atribuídos aos parâmetros das Figuras 5 e 6 foram: $\lambda = 0,1$, $h = 0,01$, $tempo = 0 : h : 20$, para a condição inicial o intervalo $y_0 = [1, 3]$ e a capacidade de suporte $K = 500$; nas Figuras 7 e 8 a mudança é apenas no valor do tempo, $tempo = 0 : h : 100$.

Na Figura 5, o princípio de extensão de Zadeh representado pelas linhas roxas, apresenta propagação da incerteza, enquanto a soma sup- J_0 , representada pelas linhas pretas pontilhadas, apresenta o controle da incerteza, comprovados na Figura 6.

O tempo ampliado nas Figuras 7 e 8 permite observar que o diâmetro da soma de Zadeh cresce e depois decresce, acompanhando a característica do modelo de Verhulst cuja taxa de variação da população cresce e depois decresce conforme a população vai atingindo sua capacidade de suporte K . A soma interativa J_0 também tem o diâmetro com o mesmo comportamento, no entanto em uma escala menor, não sendo possível visualizar no gráfico, apenas na Tabela 2. Outro comportamento interessante ocorre no diâmetro da soma de Zadeh, em que o ponto de maior crescimento do diâmetro ocorre junto ao ponto de inflexão do modelo visto na Figura 7.

A Tabela 2 apresenta os diâmetros das soluções intervalares do modelo de Verhulst. Neste caso, mostramos os diâmetros das iterações de 1 a 10, de 55 a 64 e de 91 a 100, para que fosse possível analisar os valores numéricos dos diâmetros. Em particular, nos diâmetros da solução via princípio de extensão de Zadeh, as soluções de maior diâmetro ocorrem entre as iterações de 59 a 61, onde se encontra o ponto de inflexão da curva, e posteriormente diminuem. Este comportamento pode ser visto na Figura 8.

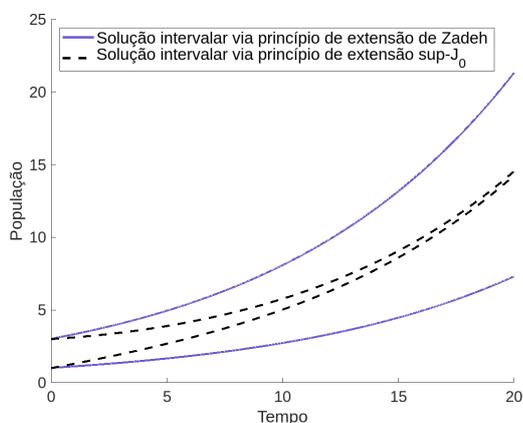


Figura 5: Verhulst intervalar. Fonte: Elaborado pelos autores.

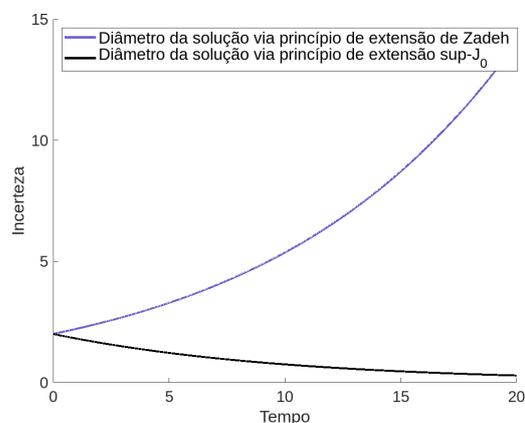


Figura 6: Diâmetros das soluções no modelo de Verhulst. Fonte: Elaborado pelos autores.

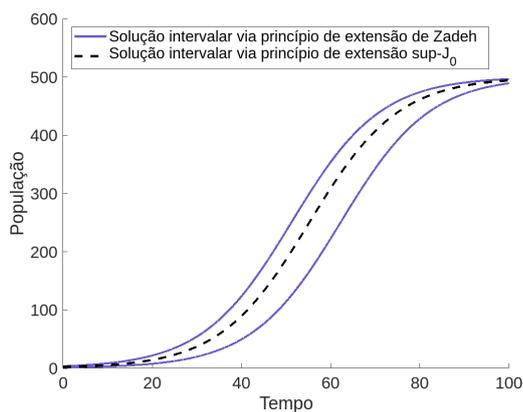


Figura 7: Verhulst intervalar com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.

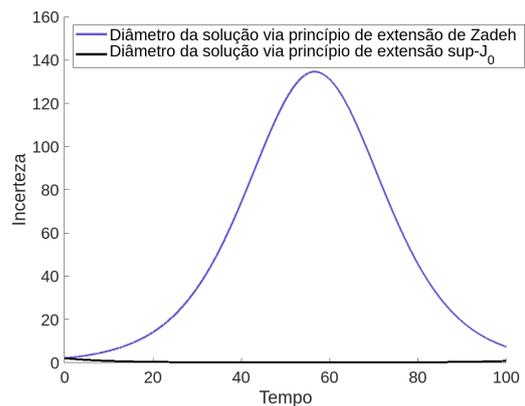


Figura 8: Diâmetros das soluções no modelo de Verhulst com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.

Iteração	Diâmetro da solução via Zadeh	Diâmetro da solução via sup- J_0
1	2,0000	2,0000
2	2,1984	1,8016
3	2,4163	1,6230
4	2,6556	1,4623
5	2,9183	1,3176
6	3,2068	1,1874
7	3,5233	1,0702
8	3,8707	0,9647
9	4,2517	0,8697
10	4,6696	0,7842
⋮	⋮	⋮
55	132,3815	0,0216
56	135,1918	0,0213
57	137,4636	0,0210
58	139,1560	0,0209
59	140,2365	0,0209
60	140,6828	0,0209
61	140,4831	0,0211
62	139,6371	0,0214
63	138,1556	0,0218
64	136,0607	0,0223
⋮	⋮	⋮
91	23,4015	0,1356
92	21,2703	0,1483
93	19,3153	0,1622
94	17,5252	0,1776
95	15,8887	0,1945
96	14,3950	0,2131
97	13,0334	0,2335
98	11,7938	0,2561
99	10,6665	0,2809
100	9,6424	0,3081

Tabela 2: Diâmetro da solução via princípio de extensão de Zadeh e diâmetro da solução via princípio de extensão sup- J_0 para o modelo de Verhulst intervalar.

3.3 Modelo de Gompertz intervalar

A condição inicial do modelo é o intervalo $Z(0) = [\underline{z}_0, \overline{z}_0]$, a solução do modelo será do tipo

$$Z(t) = \left[K e^{e^{\ln\left(\ln\left(\frac{z_0}{K}\right)\right) - at}}, K e^{e^{\ln\left(\ln\left(\frac{\overline{z}_0}{K}\right)\right) - at}} \right]. \quad (17)$$

Na solução numérica com o método de Euler, Z_n é o intervalo atribuído como $Z_n = [\underline{z}_n, \overline{z}_n]$, h o tamanho do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, e adaptando o método de Euler para as somas de Zadeh e sup- J_0 temos Z_{n+1} para ambos casos, mostrados a seguir.

Método de Euler adaptado ao princípio de extensão de Zadeh para o modelo de Gompertz

$$\begin{aligned} [\underline{Z}_{n+1}, \overline{Z}_{n+1}] &= [\underline{z}_n, \overline{z}_n] + h \left[-a\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right), -a\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right) \right] \\ &= [\underline{z}_n, \overline{z}_n] + \left[-ah\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right), -ah\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right) \right] \\ &= \left[\underline{z}_n - ah\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right), \overline{z}_n - ah\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Método de Euler adaptado à soma interativa J_0 para o modelo de Gompertz

$$\begin{aligned} [\underline{Z}_{n+1}, \overline{Z}_{n+1}] &= [\underline{z}_n, \overline{z}_n] + h \left[-a\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right), -a\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right) \right] \\ &= [\underline{z}_n, \overline{z}_n] + \left[-ah\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right), -ah\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right) \right] \\ &= \left[\min\left(\underline{z}_n - ah\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right), \overline{z}_n - ah\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right)\right), \right. \\ &\quad \left. \max\left(\underline{z}_n - ah\underline{z}_n \ln\left(\frac{\overline{z}_n}{K}\right), \overline{z}_n - ah\overline{z}_n \ln\left(\frac{z_n}{K}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Para o desenvolvimento dos gráficos de comparação das somas, foram atribuídos os seguintes valores aos parâmetros: $a = 0, 1$, $h = 0,01$, $tempo = 0 : h : 10$, para a condição inicial o intervalo $z_0 = [1, 3]$ e a capacidade de suporte $K = 500$; nas Figuras 11 e 12 a mudança é apenas no valor do tempo, $tempo = 0 : h : 50$.

Na Figura 9, a linha de cor verde representa o princípio de extensão de Zadeh, e a linha pontilhada de cor preta representa a soma interativa J_0 . Em relação à soma de Zadeh, os resultados apresentam similaridades com os modelos já analisados, observando-se a propagação da incerteza. Para a soma interativa J_0 , a incerteza também é moderada, e os diâmetros das somas confirmam esta análise na Figura 10 e na Tabela 3. No modelo de Gompertz intervalar via princípio de extensão de Zadeh, o instante em que ocorre o ponto de inflexão da curva visto na Figura 11, coincide com o instante de maior crescimento do diâmetro na Figura 12.

A Tabela 3 apresenta os diâmetros das soluções intervalares do modelo de Gompertz. Selecionamos os diâmetros das iterações de 1 a 10, de 15 a 24 e de 41 a 50. Os diâmetros da solução via princípio de extensão de Zadeh, inicialmente crescem até atingir os maiores valores entre as iterações de 18 a 20, depois diminuem. Nos diâmetros da solução via sup- J_0 , identificamos que a princípio o diâmetro diminui e posteriormente aumenta, como exemplo, nas iterações de 41 a 50.

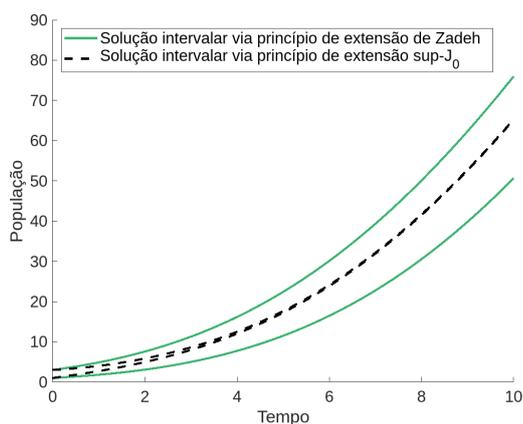


Figura 9: Gompertz intervalar. Fonte: Elaborado pelos autores.

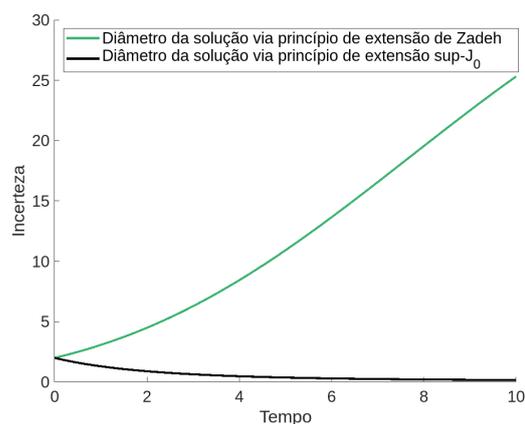


Figura 10: Diâmetros das soluções no modelo de Gompertz. Fonte: Elaborado pelos autores.

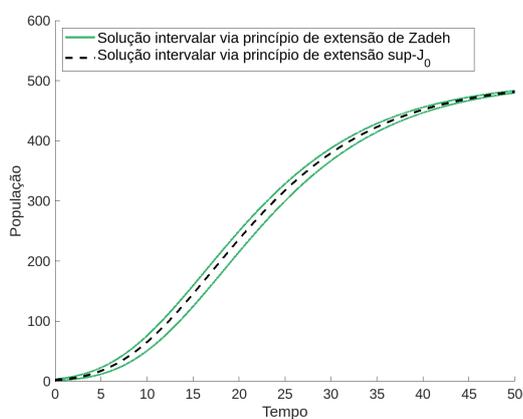


Figura 11: Gompertz intervalar com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.

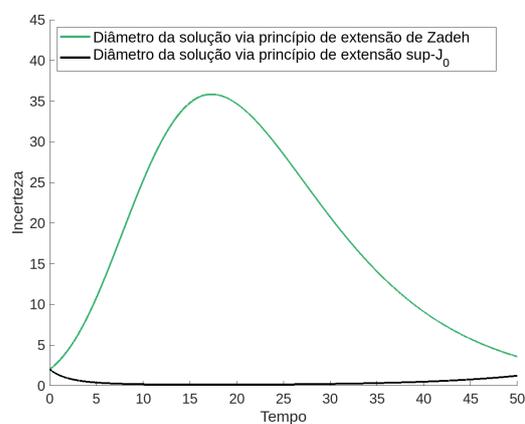


Figura 12: Diâmetros das soluções no modelo de Gompertz com tempo estendido. Fonte: Elaborado pelos autores.

Mesmo com este aumento, os diâmetros da solução via princípio de extensão sup - J_0 são menores que os diâmetros solução via princípio de extensão de Zadeh, ou seja, a incerteza é menor. Estes comportamentos podem ser observados na Figura 12.

Iteração	Diâmetro da solução via Zadeh	Diâmetro da solução via sup- J_0
1	2,0000	2,2000
2	2,9133	1,0867
3	4,1167	6,4160
4	5,6489	4,0550
5	7,5359	2,7180
6	9,7850	1,9190
7	12,3813	1,4190
8	15,2855	1,0930
9	18,4347	0,8730
10	21,7458	0,7200
⋮	⋮	⋮
15	37,1870	0,4020
16	39,3944	0,3800
17	41,1543	0,3640
18	42,4402	0,3540
19	43,2460	0,3480
20	43,5836	0,3460
21	43,4798	0,3480
22	42,9731	0,3530
23	42,1100	0,3610
24	40,9417	0,3720
⋮	⋮	⋮
41	12,4473	1,1440
42	11,3427	1,2460
43	10,3234	1,3580
44	9,3853	1,4820
45	8,5239	1,6190
46	7,7346	1,7690
47	7,0127	1,9340
48	6,3535	2,1170
49	5,7525	2,3170
50	5,2052	2,5380

Tabela 3: Diâmetro da solução via princípio de extensão de Zadeh e diâmetro da solução via princípio de extensão sup- J_0 para o modelo de Gompertz intervalar.

4 Considerações finais

Neste artigo, buscamos comparar a propagação da incerteza pelo princípio de extensão de Zadeh e pelo princípio de extensão \sup - J_0 . Nos resultados obtidos a soma interativa J_0 apresentou um melhor controle da incerteza em cada solução numérica dos modelos estudados, em relação a soma usual via princípio de extensão de Zadeh. Para chegar a estes resultados, consideramos a adaptação do método de Euler para a aproximação da solução numérica dos modelos, a fim de estudar a propagação da incerteza via soma padrão e soma interativa. O controle ou diminuição da incerteza obtido pelo princípio de extensão \sup - J_0 é significativo, pois controlar a incerteza do modelo permite nos aproximarmos de uma solução mais realista do fenômeno.

Outro resultado interessante, deu-se na solução numérica intervalar via Zadeh, dos modelos de Verhulst e Gompertz. Observamos que o ponto de maior propagação da incerteza ocorre no mesmo instante do ponto de inflexão de ambos modelos; no modelo de Verhulst no intervalo de tempo [59, 61], apresentado na Figura 7, Figura 8 e na Tabela 2; e no modelo de Gompertz no intervalo de tempo [19, 21], exibido na Figura 11, Figura 12 e na Tabela 3. Com isso, conjectura-se que a maior incerteza propagada ao longo do fenômeno ocorre em uma vizinhança do ponto de inflexão das curvas de Verhulst e Gompertz.

Como trabalho futuro, pretende-se explorar o comportamento de maior incerteza ao longo do método numérico, isto é, buscar-se-á provar matematicamente que este comportamento ocorre em torno de pontos de inflexão intervalar (fuzzy).

Referências

- [1] BEDE, B. **Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic**. Heidelberg: Springer, 2012.
- [2] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, W. A. **A first course in fuzzy logic, fuzzy dynamical systems, and biomathematics: theory and applications**. Berlin: Springer, 2017.
- [3] BARROS, L. C.; SANTO PEDRO, F. Fuzzy differential equations with interactive derivative. **Fuzzy sets and systems**, v. 309, p. 64-80, 2017.
- [4] MIZUKOSHI, M. T.; BARROS, L. C.; CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES, H.; BASSANEZI, R. C. Fuzzy differential equations and the extension principle. **Information Sciences**, v. 177, n. 17, p. 3627-3635, 2007.
- [5] ABBASBANDY, S.; VIRANLOO, T. A. Numerical solutions of fuzzy differential equations by Taylor method. **Computational Methods in Applied Mathematics**, v. 2, n. 2, p. 113-124, 2002.
- [6] WASQUES, V. F.; ESMI, E.; BARROS, L. C.; BEDE, B. Comparison between numerical solutions of fuzzy initial-value problems via interactive and standard arithmetics. *In*: KEARFOTT, R.; BATYRSHIN, I.; REFORMAT, M.; CEBERIO, M.; KREINOVICH, V. (ed.). **Fuzzy techniques: theory and applications**. Cham: Springer, 2019. p. 704-715. (Advances in Intelligent Systems and Computing, v. 1000). Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-21920-8_62. Acesso em: 28 nov. 2024.
- [7] WASQUES, V. F.; ANDRADE, A. E. R.; ZANINELI, P. H. M. Associative property of interactive addition for intervals: application in the malthusian model. *In*: COHEN, K.;



-
- ERNEST, N.; BEDE, B.; KREINOVICH, V. (ed.). **Fuzzy Information Processing 2023**. Cham: Springer, 2023. p. 194-206. (Lecture Notes in Networks and Systems, v. 751). Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-46778-3_18. Acesso em: 28 nov. 2024.
- [8] KLIR, G. J.; YUAN, B. **Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.
- [9] NOVAES, G. P. **Introdução à teoria dos conjuntos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.
- [10] ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [11] BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.
- [12] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [13] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. Sao Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [14] MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to interval analysis**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.