

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 25, 2025
Edição Ermac

Alessandro Firmiano de Jesus
Academia da Força Aérea (AFA),
Pirassununga, lezandro@gmail.com

Matheus dos Santos Silva
Academia da Força Aérea (AFA),
Pirassununga

João Paulo Martins dos Santos
Academia da Força Aérea (AFA),
Pirassununga

Áreas de triângulos e algumas inferências na Geometria Plana

Triangle areas and some inferences on plane geometry

Resumo

A condição de existência de um triângulo ABC de lados a , b e c estabelece que $a + b > c$. O presente trabalho identifica nos elementos do triângulo, uma certa quantidade $\kappa > 0$ tal que $a + b = c + \kappa$. Para essa identificação, foram obtidos os pontos interceptos M , N e P do triângulo com o seu Incírculo de centro I . O principal resultado é a Equivalência de Áreas entre o Quadrilátero Reentrante $ADBC$, sendo D o vértice percorrendo o incírculo que minimiza sua área, e a área do Deltoide $CNIP$. Como contribuição geométrica, é sugerida uma construção para obtenção dos interceptos M , N e P sobre ABC sem a prévia necessidade do traçado do incírculo. Por fim, uma ferramenta dinâmica foi aplicada para traçar coordenadas definidas, ponto a ponto, pelas áreas dos Quadriláteros Reentrantes $ADBC$, $ADCB$ e $ACDB$, enquanto o vértice comum D percorre o incírculo do triângulo ABC . Trajetórias elípticas desses pontos foram reveladas.

Palavras-chave: quadrilátero reentrante. incírculo. triângulo.

Abstract

The condition for the existence of a triangle ABC with sides a , b and c establishes that $a + b > c$. The present work identifies in the elements of the triangle, a certain quantity $\kappa > 0$ such that $a + b = c + \kappa$. For this identification, the intercept points M , N and P of the triangle with its incircle of center I were obtained. The main result is the Equivalence of Areas between the Re-entrant Quadrilateral $ADBC$, with D being the vertex running through the incircle that minimizes its area, and the area of the Deltoid (or Kite) $CNIP$. As a geometric contribution, a construction is suggested to obtain the intercepts M , N and P on ABC without the prior need to trace the incircle. Finally, a dynamic tool was applied to trace coordinates defined, point-to-point, by the areas of the Re-entrant Quadrilaterals $ADBC$, $ADCB$ and $ACDB$, while the common vertex D runs through the incircle of the triangle ABC . Elliptical trajectories of these points were revealed.

Keywords: re-entrant quadrilateral. incircle. triangle.



1 Introdução

Para a Educação Básica, o cálculo de área de um triângulo ABC é considerado uma das atividades mais elementares da Geometria Plana. No entanto, esses inequívocos cálculos geométricos e suas relações serviram de base na resolução elegante de clássicos problemas de transformações geométricas, a exemplo do problema de obtenção do triângulo de perímetro mínimo conhecido por **Triângulo de Schwartz** (Andreescu, Mushkarov e Stoyanov, 2005, p. 3). Nesse viés, o objetivo desse trabalho é encontrar a disposição do Quadrilátero Reentrante $ADBC$ de área mínima e definido pelos mesmos vértices do triângulo ABC e o ponto D situado em seu incírculo, conforme ilustra a Figura 1.

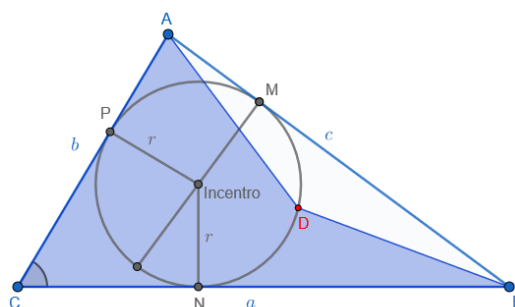


Figura 1: Quadrilátero Reentrante Dinâmico
disponível em <https://www.geogebra.org/geometry/n7qq4wrh>
Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Se considerar ABC um triângulo qualquer, a resolução do problema acima visa a generalização dos resultados da Seção 5 que foram apresentados por Silva, Firmiano e Santos (2024) durante o VII ERMAC na UNESP de Bauru-SP. Outras contribuições para a Geometria Plana, das quais podem ser discutidas durante a Educação Básica, também serão apontadas nesse trabalho. Tais como:

- obtenção geométrica dos interceptos MNP do triângulo ABC com o seu incírculo antes da construção geométrica do *Incentro*;
- apresentação de três novas fórmulas para o cálculo de área de triângulo;
- versão do **Teorema abcd** (Silva, Firmiano e Santos, 2024, p. 264) para triângulos quaisquer.

A motivação para enunciar o teorema no último item foi devida a um questionamento relacionado à conhecida *Desigualdade Triangular*, ou seja, num triângulo ABC qualquer de lados a , b e c , segue que $a + b > c$, logo, como identificar no triângulo a quantia $\kappa > 0$ tal que:

$$a + b = c + \kappa \quad (1)$$

Os demais resultados foram obtidos a partir da maneira mais simples de se calcular a área de um triângulo ABC , de base b e altura h dada pela conhecida expressão $S_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$. Aplicando essa expressão em dois triângulos, ACD e ABC de respectivas alturas x e y , que particionam o quadrilátero convexo $ABCD$ da Figura 2, Morgado, Wagner e Jorge (2002, p. 192), após projeção das alturas sobre a diagonal \overline{DB} , enunciam a seguinte fórmula de área:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} p \cdot q \cdot \sin(\alpha) \quad (2)$$

sendo p a medida da diagonal \overline{AC} , q a medida da diagonal \overline{BD} e α o ângulo formado por essas diagonais.

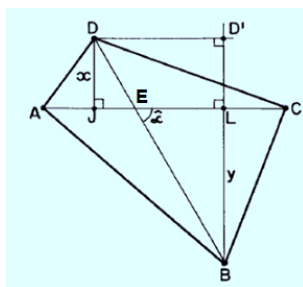


Figura 2: Área do Quadrilátero Convexo

Fonte: Adaptado de (Morgado *et al.*, 2002)

Assim, se na Figura 2 deslocar o vértice B sobre o segmento \overline{BD} até o ponto E da intersecção das diagonais, é obtido da equação (2) mais uma fórmula para a área de triângulo ao considerar a medida da ceviana $q = \overline{DE}$:

$$S_{\Delta_{ACD}} = \frac{1}{2} p \cdot q \cdot \sin(\alpha) \quad (3)$$

2 Pipa, deltoide e o incírculo

Para calcular o valor da área mínima do Quadrilátero Reentrante da Figura 1, inicialmente, consideremos uma **Pipa** ou **Deltoide** como sendo um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos congruentes. O **Incírculo** é a circunferência inscrita no triângulo ABC de raio r e centrada no Incentro I , ponto notável definido pelo encontro das bissetrizes internas (Lopez Linares, Santos e Jesus, 2022a).

A partir dessas definições e considerando os pontos de tangência M , N e P em destaques na Figura 3, é possível particionar o Triângulo ABC em três Deltoides: $CNIP$; $BMIN$ e $AMIP$.

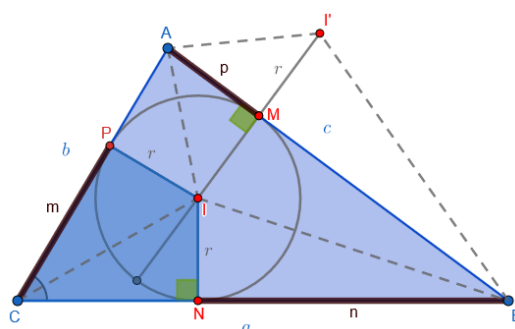


Figura 3: Partição do Triângulo ABC em Deltoides

disponível em <https://www.geogebra.org/geometry/yrbhjm>

Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Para isto, estabeleça as seguintes medidas entre vértices e pontos de tangência:

$$m = \overline{CP} = \overline{CN}; n = \overline{BN} = \overline{BM} \text{ e } p = \overline{AM} = \overline{AP} \quad (4)$$



Assim, $S_{\Delta ABC} = S_{CNIP} + S_{BMIN} + S_{AMIP} = 2 \cdot \frac{m \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{n \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{p \cdot r}{2} = (m + n + p) \cdot r$ se apresenta como sendo mais uma fórmula para obter a área do triângulo ABC .

Observe agora que existe uma equivalência entre a soma das áreas dos Deltoides $BMIN$ e $AMIP$ e a área da Pipa $AIBI'$ sendo I' o ponto obtido da reflexão do Incentro I sobre o ponto M . Assim, aplicando para S_{Pipa} a fórmula (2), segue que a área do triângulo ABC será:

$$S_{\Delta ABC} = S_{CNIP} + \underbrace{S_{BMIN} + S_{AMIP}}_{S_{Pipa}} = S_{CNIP} + S_{AIBI'} = m \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot (2r) \cdot \sin(\pi/2) = (m + c)r \quad (5)$$

Com isso, em resposta ao questionamento na Introdução, a equação (5) permite a demonstração da seguinte versão do **Teorema abcd** para triângulos quaisquer:

Teorema 1 *Considere a, b e c medidas dos lados do triângulo ABC e m, n e p dados na equação (4), então*

$$\begin{cases} a + b = c + 2m \\ a + c = b + 2n \\ b + c = a + 2p \end{cases}$$

Dem.

De fato, na Geometria Plana tem-se a fórmula de área $S_{\Delta ABC} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r$, sendo r o raio do incírculo de ABC (Lopez Linares, Santos e Jesus, 2022c, p. 55). Logo, combinando-a com (5), segue que

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r = (m + c) \cdot r \Rightarrow a + b + c = 2m + 2c \Rightarrow a + b = c + 2m$$

As igualdades $a + c = b + 2n$ e $b + c = a + 2p$ seguem de formas análogas para

$$S_{\Delta ABC} = (n + b) \cdot r = (p + a) \cdot r \quad (6)$$

□

A equação (5) permite ainda a demonstração do seguinte **Teorema de Minimização de Área**.

Teorema 2 *O Quadrilátero Reentrante $ADBC$ da Figura 1 possuirá área mínima quando o vértice D no incírculo coincidir com M' , o **Antipodal** do ponto tangente M ¹. O valor dessa área mínima é equivalente à área do Deltoide $CNIP$.*

Dem.

De fato, $ADBC$ é uma figura plana que pode ser obtida da extração no triângulo ABC de um outro triângulo DBA de base $c = AB$ e altura h cuja extremidade D está no incírculo. Assim, a área mínima de $ADBC$ ocorre quando DBA atingir sua área máxima, ou seja, quando h for máximo. Uma vez que o máximo da altura h ocorre quando D está na posição diametralmente oposta ao ponto tangente M , segue que $h_{max} = 2r$, assim, da equação (5):

$$S_{ADBC_{min}} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta DBA_{max}} = (m + c) \cdot r - \frac{c \cdot 2r}{2} = m \cdot r = S_{CNIP}$$

Ou seja, a área mínima de $ADBC$ é equivalente à área do Deltoide $CNIP$. □

¹ponto sobre o Incírculo que está diametralmente oposto a ele.

3 Uma construção geométrica dos pontos tangentes M , N e P

Da equação (4) é possível relacionar as medidas a , b e c dos lados do triângulo ABC por

$$\begin{cases} a = m + n \\ b = m + p \\ c = n + p \end{cases}, \text{ assim, somando essas três equações não é complicado obter a igualdade:}$$

$$m + n + p = \frac{a + b + c}{2} \quad (7)$$

Ou seja, a soma $m + n + p$ das medidas dos segmentos definidos pelos pontos tangentes M , N e P representa o semiperímetro \mathcal{P} do triângulo ABC e ainda fornece uma interessante versão para a conhecida fórmula de Heron, à saber:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - a)(\mathcal{P} - b)(\mathcal{P} - c)} = \sqrt{(m + n + p) \cdot p \cdot n \cdot m} \quad (8)$$

A proposta nesta seção é construir sobre cada lado do triângulo ABC segmentos de medidas:

$$\overline{CP} = \overline{CN} = m = \frac{a + b - c}{2} \quad \overline{BN} = \overline{BM} = n = \frac{a + c - b}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AP} = \overline{AM} = p = \frac{b + c - a}{2} \quad (9)$$

relacionadas no Teorema 1 e sem a necessidade prévia do traçado do incírculo, conforme ilustra a Figura 4 abaixo. É importante notar que M , N e P é a única tripla de pontos que satisfazem (4) ou (9) e pertencem ao incírculo do triângulo ABC .

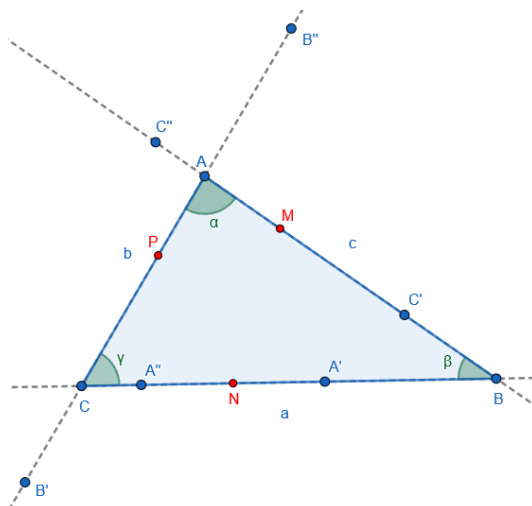


Figura 4: Construção dos pontos tangentes M , N e P

disponível em <https://www.geogebra.org/geometry/gp5rwsuj>
Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Nessa construção, α , β e γ são os ângulos internos do triângulo ABC , assim, determine:

- A' a rotação no sentido horário do vértice A centrada no vértice C sob um ângulo γ ;
- A'' a rotação no sentido anti-horário do vértice A centrada no vértice B sob um ângulo β ;
- B' a rotação no sentido horário do vértice B centrada no vértice A sob um ângulo α ;

- B'' a rotação no sentido anti-horário do vértice B centrada no vértice C sob um ângulo γ ;
- C' a rotação no sentido anti-horário do vértice C centrada no vértice A sob um ângulo α e
- C'' a rotação no sentido horário do vértice C centrada no vértice B sob um ângulo β .

Após essas rotações, os pontos A' e A'' serão colineares com os vértices B e C ; os pontos B' e B'' serão colineares com os vértices A e C e os pontos C' e C'' serão colineares com os vértices A e B . Logo, basta tomar os pontos M , N e P por:

$$\begin{cases} M = \text{Ponto Medio de } C' \text{ e } C'' \\ N = \text{Ponto Medio de } A' \text{ e } A'' \\ P = \text{Ponto Medio de } B' \text{ e } B'' \end{cases} \quad (10)$$

Uma justificativa para a construção:

Na figura 4, os segmentos de comprimento $b = \overline{CA'}$ e de comprimento $c = \overline{BA''}$ foram sobrepostos ao lado de medida $a = \overline{BC}$, logo, $a = b + c - \overline{A'A''}$. Pelo Teorema 1, $b + c = a + 2p$ logo, $a = a + 2p - \overline{A'A''} \Rightarrow \overline{A'A''} = 2p \Rightarrow \overline{NA'} = p$ e $\overline{A''N} = p$. O que resulta $\overline{CN} = \overline{CA'} - \overline{NA'} = b - p = m$ e $\overline{BN} = \overline{BA''} - \overline{A''N} = c - p = n$.

E ainda, os segmentos de comprimento $b = \overline{AC'}$ e de comprimento $a = \overline{CB''}$ foram sobrepostos ao lado de medida $b = \overline{AC}$. Neste caso, $c = a - \overline{C'C''} + b = a + b - \overline{C'C''}$. Pelo Teorema 1, $a + b = c + 2m$, logo, $c = c + 2m - \overline{C'C''} \Rightarrow \overline{C'C''} = 2m \Rightarrow \overline{MC'} = m$ e $\overline{C''M} = m$. O que resulta $\overline{AM} = \overline{AC'} - \overline{MC'} = b - m = p$ e $\overline{BM} = \overline{BA} - \overline{AM} = c - p = n$.

Finalmente, os segmentos de comprimento $c = \overline{AB'}$ e de comprimento $a = \overline{BC''}$ foram sobrepostos ao lado de medida $c = \overline{AB}$. Neste caso, $\overline{B'B''} = \overline{B'A} + \overline{CB''} - \overline{CA} = c + a - b$. Pelo Teorema 1, $a + c = b + 2n$, logo, $\overline{B'B''} = b + 2n - b \Rightarrow \overline{B'B''} = 2n \Rightarrow \overline{PB'} = n$ e $\overline{PB''} = n$. O que resulta $\overline{AP} = \overline{AB'} - \overline{PB'} = c - n = p$ e $\overline{CP} = \overline{CB''} - \overline{PB''} = a - n = m$.

Portanto, tem-se as seguintes medidas de segmento:

$$\overline{CP} = \overline{CN} = m; \quad \overline{BN} = \overline{BM} = n \quad \text{e} \quad \overline{AM} = \overline{AP} = p$$

conforme as igualdades estabelecidas em (4) e (9).

Uma demonstração matemática de que a construção geométrica dos pontos M , N e P da Figura 4, satisfazendo as igualdades das equações (9), resulte nos pontos tangentes do triângulo ABC com o seu incírculo é uma tarefa possível de ser realizada, mas foge da abordagem adotada nesse trabalho. \square

4 Uma aplicação dos resultados acima

Na figura 5, D é um ponto que percorre o incírculo do triângulo de vértices A , B e C . Os pontos M , N e P são de tangência. Considere que o Quadrilátero Reentrante $ACDB$ possui **área mínima** $S_{ACDB_{min}} = 6$, e que o lado CB possui medida $a = 20$ e sobre o lado CA $p = 2$. Nessas condições:

- 1.) Determine o raio r do incírculo centrado em I .
- 2.) Calcule a **área máxima** $S_{ACDB_{max}}$ do Quadrilátero Reentrante $ACDB$.
- 3.) Encontre as medidas $b = m + p$ e $c = n + p$ do triângulo ABC .

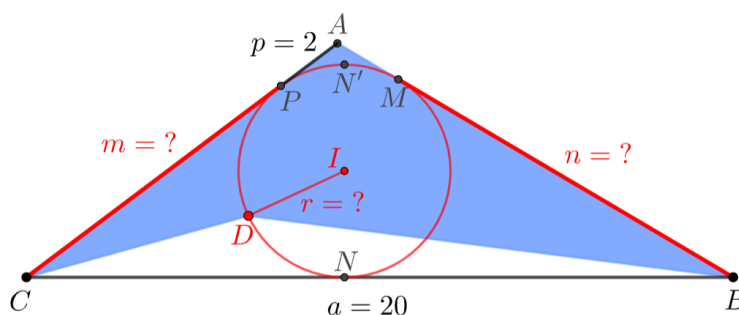


Figura 5: Uma Aplicação dos Resultados disponível em <https://www.geogebra.org/classic/xwgd2vq9>
Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Solução:

1.) De forma análoga ao que foi apresentado no **Teorema 2**, a área mínima do Quadrilátero Reentrante $ACDB$ é obtida quando a posição do ponto D coincide o ponto N' **Antipodal** do ponto tangente N , e ainda, o valor é equivalente ao da área do Deltoide $AMIP$. Ou seja,

$$S_{ACDB_{min}} = S_{AMIP} = p \cdot r \Rightarrow p \cdot r = 6 \Rightarrow r = 3$$

2.) O Quadrilátero Reentrante $ACDB$ atinge sua área máxima quando a posição do ponto D coincide o ponto tangente N . Nessa forma degenerada, aplicando a equação (6), temos:

$$S_{ACDB_{max}} = S_{\Delta_{ABC}} = (a + p) \cdot r = 22 \cdot 3 = 66$$

3.) Para as medidas b e c , encontramos m e n aplicando a formula (8) e o fato que $a = m + n$. Assim,

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{ABC}} &= \sqrt{(m+n+p) \cdot p \cdot n \cdot m} \Rightarrow \\ 66 &= \sqrt{(20+2) \cdot 2 \cdot n \cdot m} \Rightarrow \\ n \cdot m &= \frac{66^2}{44} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 11} = 9 \cdot 11 = 99 \\ \begin{cases} m+n=20 \\ n \cdot m=99 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} m=9 & n=11 \\ b=11 & c=13 \end{cases} \text{ ou suas soluções simétricas } \begin{cases} m=11 & n=9 \\ b=13 & c=11 \end{cases} . \end{aligned}$$

□

5 Resultados particulares para o triângulo retângulo

Nessa seção, considere ABC um triângulo retângulo em C e circunscrito em uma circunferência de diâmetro $d = 2r$. Assim, o Deltoide $CNIP$ da Figura 3 é degenerado em um quadrado de lado r , conforme Figura 6, ou seja $S_{CNIP} = r^2$ será o valor da área mínima do Quadrilátero Reentrante $ADBC$, quando o vértice D percorrer o incírculo. De fato, na equação (5) tome $m = \overline{CP} = r$, logo,

$$S_{ADBC_{min}} = S_{\Delta_{ABC}} - S_{\Delta_{ADB}} = (r+c)r - \frac{c \cdot d}{2} = r^2 + cr - cr = r^2$$

E ainda, podemos enunciar o seguinte **Teorema abcd para Triângulos Retângulos**.

Teorema 3 Em todo triângulo retângulo (a, b, c) de hipotenusa c e incírculo de diâmetro $d = 2r$ é válida a relação

$$a + b = c + d$$

Dem.

$$\text{De fato, } S_{\Delta ABC} = (r+c)r = \frac{a+b+c}{2}r \Rightarrow 2r+2c = a+b+c \Rightarrow a+b = 2c-c+2r \Rightarrow a+b = c+d \quad \square$$

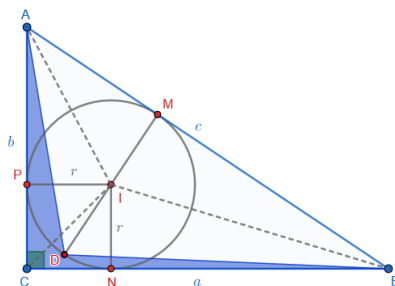


Figura 6: Equivalência de Áreas: $S_{ADBC} = r^2$
disponível em <https://www.geogebra.org/geometry/vgfmcmv>
Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

6 Quadriláteros reentrantes e elipses

Na demonstração do Teorema 2, o vértice $D = (x_D, y_D)$ percorre o incírculo até atingir uma posição específica M' , que minimizará a área do Quadrilátero Reentrante $ADBC$. Esse processo dinâmico, inspira a necessidade de compreensão do comportamento da área S_{ADBC} nas demais posições do vértice D . Para isso, as ferramentas do GeoGebra são muito úteis para definir um ponto $Q_1 = (x_D, S_{ADBC})$ no sistema de coordenadas centrado no incentro do triângulo de ABC . Abusando da ferramenta dinâmica, definiu-se também os pontos $Q_2 = (x_D, S_{ACDB})$ e $Q_3 = (x_D, S_{ADCB})$, sendo $ACDB$ e $ADCB$ dois outros Quadriláteros Reentrantes que compartilham os vértices ABC do triângulo, conforme ilustra a Figura 7.

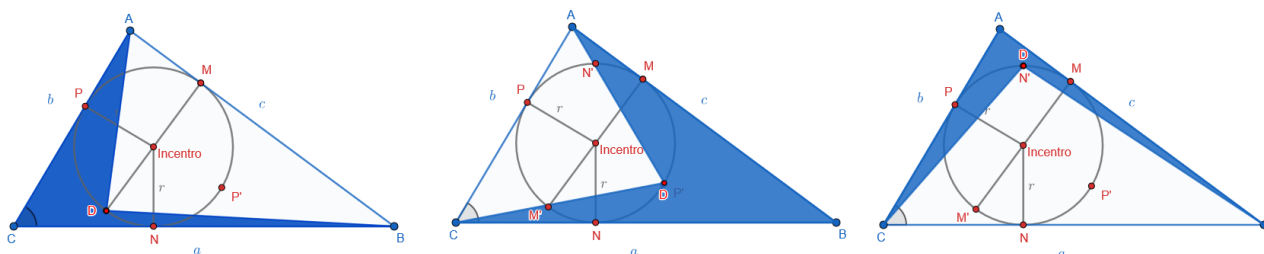


Figura 7: Quadriláteros Reentrantes $ADBC$, $ADCB$ e $ACDB$ nas posições de área mínima

Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Sobre o incírculo da Figura 7, cinco pontos são selecionados: os tangentes M , N e P , e os antipodais M' e P' . Sobre esses, conforme o vértice D percorre o incírculo, a aplicação da ferramenta

GeoGebra conhecida por **Cônica por Cinco Pontos** equaciona e traça o Lugar Geométrico de todos os demais pontos Q_1 , Q_2 e Q_3 .

Para um triângulo ABC específico, da figura 8, é possível obter as respectivas Cônicas:

$$Q_1 : -58,02x^2 + 38,68xy - 12,89y^2 - 194,29x + 129,53y = 285,8 \quad (11)$$

$$Q_2 : -18,68x^2 - 17,19xy - 5,73y^2 + 92,75x + 61,83y = 158,99 \quad (12)$$

$$Q_3 : \frac{x^2}{1,36} + \frac{(y - 4,58)^2}{8,52} = 1 \quad (13)$$

Evidentemente, os parâmetros das equações acima são sensíveis aos valores dos lados a , b e c . Essas equações foram obtidas para as seguintes coordenadas dos vértices $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ e $C(6, 1)$. Para esse triângulo, a Figura 8 ilustra o lugar geométrico elíptico das coordenadas Q_1 , Q_2 e Q_3 .

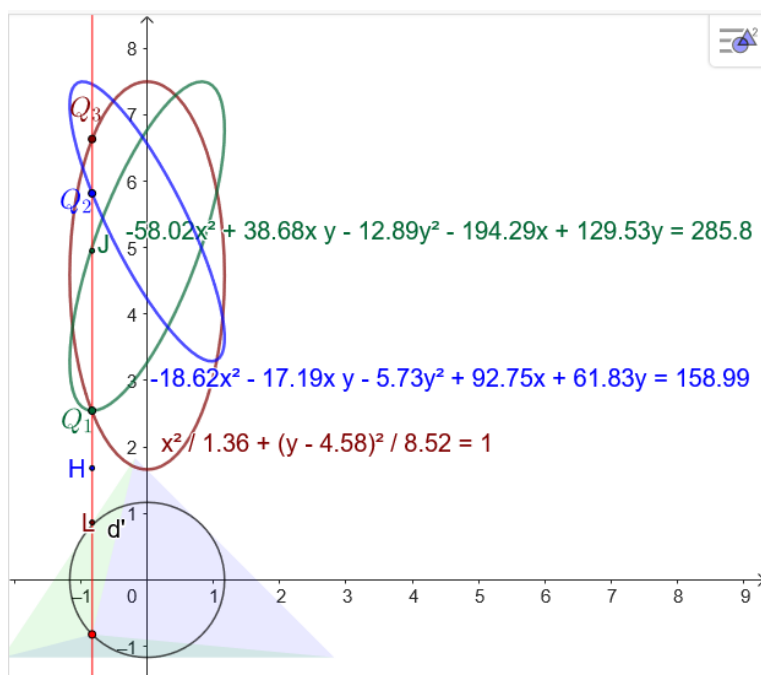


Figura 8: Trajetórias elípticas definidas pelos valores de áreas dos Quadrilátero Reentrantes

disponível em <https://www.geogebra.org/classic/ctp4sh93>

Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Verifique na Figura 8 que translações foram realizadas para o incentro assumir a origem do sistema de coordenadas. E que a coordenada Q_1 assume o mínimo da elipse (11) na posição em que o vértice D sobrepõe M' . Os valores de máximo em cada elipse são coincidentes pois, quando o vértice D sobrepõe um ponto tangente, o Reentrante assume o valor da área total do triângulo ABC .

A translação do sistema de coordenadas para o incentro faz com que o diâmetro $\overline{NN'}$ sobreponha o eixo y . Isto explica a forma reduzida da equação da elipse (13). De forma geral, no sistema de coordenadas adotado, a elipse Q_3 associada às áreas dos Deltoides $ACDB$ possuirá eixo menor de

medida r e eixo maior de medida $\frac{1}{2}(S_{max} - S_{min}) = \frac{S_{Pipa2CFBI}}{2} = \frac{a \cdot r}{2}$, ou seja, a equação reduzida:

$$Q_3 : \frac{x^2}{r^2} + \frac{\left(y - \frac{b+c}{2} \cdot r\right)^2}{a^2 \cdot r^2/4} = 1 \quad (14)$$

A identificação dos parâmetros das elipses (11) e (12) relacionados aos elementos do triângulo ABC fogem ao escopo desse trabalho. No entanto, a identificação do ângulo de inclinação das elipses Q_1 e Q_2 é uma tarefa desafiadora e ficará para trabalhos futuros.

Considerações Finais

A solução do citado problema de Fagnano de 1775, para inscrever um triângulo de perímetro mínimo em um dado triângulo acutângulo, é dada pelo triângulo pedal do ortocentro (o chamado triângulo órtico). Segundo Coxeter (1989), desde as primordiais traduções dos clássicos trabalhos de Archimedes, Apollonius e Pappus, muitos outros teoremas de mesmo espírito foram descobertos e estudados detalhadamente durante o século XIX.

As equações (3), (5) e (8), reveladas nesse artigo, sugerem mais três maneiras de se calcular a área do triângulo ABC que poderiam ser apresentadas, discutidas e relacionadas a outros conceitos geométricos na Educação Básica.

Na Figura 3, os deltoídes, $CNIP$, $BMIN$ e $AMIP$, que particionam o triângulo ABC , são todos pipas retas, ou seja, compartilham as propriedades dos quadriláteros bicêntricos (Lopez Linares, Santos e Jesus, 2022b, p. 89). E ainda, como cada Deltoide possui Equivalência de Áreas com a área mínima dos respectivos Quadriláteros Reentrantes $AM'BC$, $AP'CB$ e $ACN'B$ da Figura 7, sendo M' , N' e P' antipodais de M , N e P , a soma dessas áreas mínimas equivale a área do triângulo ABC . Ainda na Figura 7, quando o vértice D sobrepõe cada ponto tangente M , N ou P , os Quadriláteros Reentrantes são degenerados no triângulo ABC ou em triângulo unido a um segmento.

O uso de recursos da matemática dinâmica, o software GeoGebra, permitiu a revelação das trajetórias elípticas, suas respectivas equações e principalmente, a imediata resposta dos conceitos aqui discutidos, quando a disposição dos vértices ABC ou os tipos de triângulos são modificados. No *app* disponível pelo *link* na Figura 8, outras trajetórias elípticas Q_4 , Q_5 e Q_6 foram reveladas considerando, na Figura 7, as áreas dos triângulos ADB , ADC e CDB que seguem inseridos no triângulo ABC e são complementares aos respectivos Quadriláteros Reentrantes.

Por fim, nos dias atuais, o avanço de resultados promissores em determinados ramos da Geometria Plana é possibilitado quando há clara identificação de que conceitos considerados básicos configuram a essência e as particularidades do tema em estudo.

Agradecimentos

Os autores agradecem a revisão, apontamentos e discussões oportunamente proporcionadas pelos docentes Marcus Vinícius da AFA e Juan Linares da USP.



7 Bibliografia

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric problems on maxima and minima**. Boston: Birkhäuser, 2005.

COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

LOPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. **Geometria olímpica com GeoGebra**. Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da USP, 2022a. v. 1. Disponível em <https://doi.org/10.11606/9786587023212>. Acesso em: 30 ago. 2024.

LOPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. **Geometria olímpica com GeoGebra**. Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da USP, 2022b. v. 2. Disponível em <https://doi.org/10.11606/9786587023236>. Acesso em: 30 ago. 2024.

LOPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. **Geometria olímpica com GeoGebra**. Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da USP, 2022c. v. 3. Disponível em <https://doi.org/10.11606/9786587023243>. Acesso em: 30 ago. 2024.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**, Rio de Janeiro: FC & Z Livros, 2002.

SILVA, M. S.; FIRMIANO, A.; SANTOS, J. P. Áreas de triângulos e algumas inferências na geometria plana. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 7., 2024, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: FC/Unesp, 2024. p. 263-264, 2024. Disponível em <https://drive.google.com/file/d/1jIVWriJT5X45vWa3ecgM8AaAp5EeDm7B/view>. Acesso em: 19 jun. 2024.