

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 25, 2025
Edição Ermac

Nathalia Massambani

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Bauru, nathalia.massambani@unesp.br

André Christóvão Pio Martins

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Bauru

Antonio Roberto Balbo

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências (FC), Bauru

Edilaine Martins Soler

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências (FC), Bauru

Leonardo Nepomuceno

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), Bauru

Caracterização de pontos de equilíbrio e análise de estabilidade do SMIB utilizando o primeiro e segundo método de Lyapunov

Characterization of equilibrium points and stability analysis of the SMIB using the first and second Lyapunov methods

Resumo

A análise de estabilidade em sistemas dinâmicos desempenha um papel crucial na garantia da operação segura e confiável dos sistemas elétricos de potência. Este trabalho visa investigar as características dos pontos de equilíbrio e realizar uma análise de estabilidade em um sistema elétrico de potência de uma máquina contra barramento infinito - *Single Machine Infinite Bus* (SMIB). Para isso, será considerada uma abordagem detalhada da análise de sistemas dinâmicos não-lineares para descrever o comportamento do sistema de potência citado, com foco na análise de estabilidade de ângulo do rotor para grandes perturbações, explorando o Primeiro e Segundo Métodos de Lyapunov, bem como o Princípio de Invariância de LaSalle. As simulações serão conduzidas por meio de algoritmo, implementado no ambiente MATLAB, que possibilitará realizar a análise espectral do SMIB investigando-se condições de estabilidade deste.

Palavras-chave: estabilidade; sistemas elétricos de potência; pontos de equilíbrio; matemática aplicada à engenharia.

Abstract

Stability analysis in dynamic systems plays a crucial role in ensuring the safe and reliable operation of power systems. This work aims to investigate the characteristics of equilibrium points and conduct a stability analysis in a *Single Machine Infinite Bus* (SMIB) power system. To achieve this, a detailed approach to nonlinear dynamic systems analysis will be considered to describe the behavior of the aforementioned power system, focusing on rotor angle stability analysis under large disturbances, exploring the first and second Lyapunov methods, as well as LaSalle's Invariance Principle. The simulations will be conducted using an algorithm implemented in the MATLAB environment, which will enable spectral analysis of the SMIB to investigate its stability conditions.

Keywords: stability; power systems; equilibrium points; applied mathematics in engineering.



1 Introdução

Desde o advento da Revolução Industrial, a demanda por energia cresce continuamente, impulsionando a expansão de complexos sistemas elétricos. Estes sistemas, são utilizados para atender a essa demanda em constante ascensão, formando uma rede de linhas de transmissão, conectando a um grande número de geradores a diversos pontos de consumo. Em sua maioria, os parques geradores estão interligados aos centros de consumo por meio dessas linhas de transmissão e subtransmissão, que desempenham o papel crucial de transportar a energia gerada diretamente aos grandes consumidores ou, indiretamente, aos consumidores menores, por intermédio das empresas de distribuição [1].

A operação segura de um sistema de energia é essencial para fornecer um serviço confiável e ininterrupto aos consumidores. Isso implica em manter os geradores síncronos operando em paralelo, capazes de suprir a demanda com tensão e frequência constantes. No entanto, os sistemas de energia estão sujeitos a distúrbios que podem afetar o sincronismo dos geradores e a estabilidade do sistema [1].

A estabilidade de um sistema pode ser definida como sua capacidade de recuperar um estado de equilíbrio após uma perturbação física, de acordo com [2]. Para fins operacionais, a análise de estabilidade do sistema de energia é um componente crucial na determinação dos limites de operação do sistema. Além disso, essa análise é realizada com o objetivo de verificar os parâmetros dos dispositivos de controle e os ajustes dos relés, os quais detectam o curto-circuito e acionam os disjuntores que desligam a linha de transmissão. Os estudos de estabilidade possibilitam importantes conclusões e escolhas sobre planejamento e operações de sistemas de potência [1].

Segundo [1], a estabilidade em sistemas elétricos de potência pode ser analisada em relação a três variáveis básicas: ângulo do rotor das máquinas síncronas, frequência e tensão. Duas maneiras possíveis de analisar um sistema dinâmico não linear são: linearizar as equações que descrevem seu comportamento em torno de pontos de operação de interesse ou utilizar métodos não lineares, como as simulações computacionais ou métodos energéticos. Esses métodos energéticos são técnicas baseadas nos princípios de energia nas quais usam função de Lyapunov ou uma função de energia para analisar a estabilidade e o comportamento de sistemas dinâmicos [3].

Este trabalho aplica o Primeiro e Segundo Métodos de Lyapunov na análise de estabilidade transitória, isto é, a estabilidade do ângulo do rotor, para sistemas elétricos de potência representados por um gerador contra um barramento infinito - *Single Machine Infinite Bus* (SMIB). A partir de uma análise espectral do sistema dinâmico que governa o SMIB, utilizando o Primeiro Método de Lyapunov, são estabelecidas as condições de estabilidade ou instabilidade dos pontos de equilíbrio associados ao ângulo do rotor, através da linearização do sistema. Para a análise de grandes perturbações, os resultados serão interpretados por meio da representação de seus estados e espaços de fase, fundamentando-se na teoria dos sistemas dinâmicos e aplicando o Segundo Método de Lyapunov e o Princípio da Invariância de LaSalle. Este trabalho é uma extensão do realizado e divulgado em [4], onde foi discutido o problema SMIB e realizada a análise de estabilidade, a partir do Primeiro Método de Lyapunov, sem levar em considerações as perturbações que podem ocorrer no rotor, as quais são investigadas neste trabalho explorando-se o Segundo Método de Lyapunov, bem como o Princípio da Invariância de LaSalle. Os estudos realizados também foram utilizados como embasamento para o trabalho de [5], o qual utilizou sistemas dinâmicos para desenvolver um algoritmo capaz de investigar múltiplos pontos de ótimo do Problema de Despacho Econômico, com Efeito dos Pontos de Carregamento de Válvula (PDE-PV). Portanto, o objetivo deste trabalho é dar continuidade aos estudos anteriores, ampliando a análise de estabilidade do sistema SMIB com

a introdução de novos testes, especialmente em situações de grandes perturbações. Utilizando o Segundo Método de Lyapunov, serão detalhados todos os possíveis cenários de análise transitória e suas respectivas interpretações. Para isso, o sistema SMIB foi implementado no MATLAB, o que permitiu ilustrar geometricamente os resultados obtidos e fornecer uma compreensão mais profunda das respostas do sistema.

As seções seguintes apresentam simulações e análises, destacando as características de estabilidade dos pontos de equilíbrio e as propriedades dinâmicas das máquinas síncronas em relação a grandezas como velocidade e ângulo do rotor. Para isso, serão introduzidos na Seção 2, os conceitos principais de sistemas dinâmicos. Já na Seção 3 será apresentada a análise empírica sobre estabilidade e a modelagem matemática do SMIB. Na Seção 4 será desenvolvida a metodologia para caracterização dos pontos de equilíbrio e da análise de estabilidade. E por fim nas Seções 5 e 6 serão apresentados os resultados e conclusão da análise de estabilidade do SMIB levando consideração abordagens realizadas sobre o Primeiro e Segundo Método de Lyapunov.

2 Sistemas Dinâmicos

A moderna teoria de sistemas dinâmicos é fortemente baseada nos estudos da física conduzidos por Newton no século XVII. Newton contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática, fornecendo ferramentas fundamentais para descrever o comportamento dinâmico de sistemas por meio de equações diferenciais. Estas equações descrevem como as variáveis de estado de um sistema evoluem no tempo e tornaram-se uma parte essencial da teoria dos sistemas dinâmicos. Utilizando equações diferenciais, Newton concebeu as leis do movimento e da gravitação universal, aplicando-as para esclarecer as leis de Kepler referentes ao movimento dos corpos celestes. Segundo [6], as equações diferenciais foram criadas com o objetivo de representar o comportamento dos sistemas dinâmicos reais e são determinadas a partir de hipóteses sobre o comportamento dos sistemas físicos. Assim, quanto mais refinado for esse modelo, mais precisas serão as previsões do comportamento físico. Atualmente, os sistemas dinâmicos são de interesse para diversas áreas, como matemática, física, biologia, economia, engenharia, entre outras. Embora a variável independente mais comum em sistemas dinâmicos seja o tempo, é possível considerar outras grandezas, como posição, ou mesmo alguma variável sem uma interpretação física. Essas variáveis são descritas de maneira abrangente, com uma variável independente, frequentemente representada por t , que simboliza o tempo ou alguma outra das grandezas citadas.

Em vários problemas de engenharia, um sistema dinâmico é representado por um conjunto de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de ordem n , utilizadas para determinar o comportamento do processo evolutivo de um objeto ou evento específico. O sistema em questão pode apresentar propriedades determinísticas ou não, possuir dimensões finitas ou infinitas e considera a diferenciabilidade das variáveis dependentes envolvidas em relação à variável de domínio t . Um sistema é considerado determinístico quando, seu estado futuro ou passado, é unicamente determinado pelo seu estado presente. Um exemplo disso é a mecânica clássica, onde o movimento de um corpo tem seu futuro e passado exclusivamente determinados por sua posição e velocidade inicial. Por outro lado, sistemas dinâmicos não-determinísticos, também conhecidos como estocásticos, incorporam a incerteza ou aleatoriedade nas equações, ou regras que regem seu comportamento. Exemplos notáveis incluem os modelos probabilísticos utilizados em finanças para prever os preços das ações, modelos biológicos que lidam com populações sujeitas a flutuações aleatórias, e a mecânica quântica, uma teoria física que descreve o comportamento das partículas subatômicas, como elétrons e fótons.

Diante disso, conforme mencionado em [6], compreender um sistema implica na capacidade de quantificar grandezas que possibilitem descrever qualquer aspecto desse sistema, ou, pelo menos, aquelas que são de interesse particular. Essas grandezas, então, definem o estado do sistema e podem ser selecionadas como variáveis de estado, como, por exemplo, posição e velocidade em um sistema de partículas, ou tensão e corrente em um circuito elétrico, entre outros exemplos. É importante ressaltar que essa escolha não é única, uma vez que algumas grandezas físicas podem ser derivadas de outras. Por exemplo, pode-se optar por trabalhar com tensão e potência em um circuito elétrico em vez de tensão e corrente, uma vez que a potência é função da tensão e corrente.

Toda equação diferencial de ordem n pode ser decomposta em n equações diferenciais de primeira ordem, facilitando a sua análise teórica e a utilização de métodos numéricos para a solução. Assim, tratam-se os sistemas dinâmicos como um modelo matemático representado por um número finito de EDOs de 1a. ordem, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}\tag{1}$$

em que $\dot{x}_i, i = 1, \dots, n$, denota a derivada da variável de estado x_i com respeito a variável independente t e $u_1, u_2, \dots, u_p$ são os parâmetros de controle. Já as variáveis de estado $x_1, x_2, \dots, x_n$, geralmente são grandezas físicas como velocidade, aceleração, ângulo, tensão, entre outras.

De forma compacta, indica-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem pela notação vetorial:

$$\dot{x} = f(t, x, u).\tag{2}$$

Chama-se a (2) de uma representação de um sistema dinâmico, e refere-se x como variável de estado e u como entrada ou parâmetro de controle. Quando não há a entrada u presente no sistema, chama-se de equação de estado não-forçada, a qual é escrita na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(t, x).\tag{3}$$

Um sistema dinâmico pode ser categorizado como autônomo (invariante no tempo) ou não-autônomo (variante no tempo), estabelecido com base na dependência do campo vetorial (parte direita da (3)) em relação à variável independente t . Em outras palavras, pode-se considerar um sistema dinâmico autônomo ou invariante no tempo quando a função $f(t, x)$ que compõe a parte direita da equação não depende explicitamente da variável t , resultando na Equação (4):

$$\dot{x} = f(x).\tag{4}$$

Embora a maioria dos problemas de engenharia esteja sujeita a variações ao longo do tempo, seja por alterações em sua configuração ou envelhecimento natural de seus componentes físicos, em diversas situações a análise desses problemas pode ser simplificada considerando intervalos de tempo específicos, durante os quais o campo vetorial pode ser considerado invariante no tempo. Assim, este texto se restringe, a sistemas dinâmicos autônomos representados pela Equação (4).

Como mencionado anteriormente, um sistema dinâmico pode ser descrito por meio de equações diferenciais, podendo estas serem lineares ou não lineares. No caso de sistemas não lineares, como o encontrado no contexto do sistema elétrico de potência, enfrentam-se desafios consideravelmente

mais complexos do que os apresentados pelos sistemas lineares. Devido à natureza não linear desses sistemas, há a necessidade de se trabalhar com abordagens analíticas e computacionais mais sofisticadas para uma melhor compreensão e a modelagem mais fidedigna.

Segundo [6], em razão do conhecimento vasto das ferramentas de análise para sistemas dinâmicos lineares, o primeiro passo para analisar um sistema não linear é linearizar esse sistema em torno da vizinhança de um ponto de operação e, uma vez linearizado, estudar seu comportamento. Essa técnica, chamada linearização, é explicada mais adiante na Seção 5. Contudo, [6] destaca duas limitações intrínsecas à linearização. A primeira delas reside no fato de que a linearização, por sua natureza, é uma aproximação válida apenas em uma vizinhança próxima a um ponto de operação. Portanto, essa abordagem se restringe a prever o comportamento local de um sistema não linear apenas nas proximidades desse ponto, incapaz de antecipar comportamentos “não locais” ou distantes do ponto de operação. A segunda limitação identificada pelo autor é relacionada à presença de fenômenos específicos a sistemas não lineares. Estes fenômenos, por sua própria natureza não linear, não podem ser adequadamente descritos e analisados por meio de sistemas linearizados. De acordo com [6], alguns exemplos de fenômenos não lineares são:

- Tempo finito de fuga: um sistema linear instável tende ao infinito quando o tempo tende ao infinito; um sistema não linear pode tender ao infinito em um tempo finito;
- Múltiplos equilíbrios isolados: um sistema linear pode ter somente um ponto de equilíbrio isolado; um sistema não linear pode ter vários pontos de equilíbrio isolados, podendo convergir para diferentes pontos de operação no seu regime permanente;
- Ciclos limite: para um sistema linear invariante no tempo oscilar, é necessário um par de autovalores no eixo imaginário, o que é uma condição quase impossível de se manter na presença de perturbações. Ainda que fosse viável, a amplitude da oscilação dependerá do estado inicial do sistema. Na prática, oscilações estáveis só são produzidas por sistemas não lineares. Existem sistemas não lineares que podem oscilar em valores fixos de amplitude e frequência, independentemente do estado inicial. Esse comportamento caracteriza um Ciclo Limite;
- Sub harmônico, harmônico e oscilações quase periódicas: um sistema linear alimentado por uma fonte periódica, produz uma saída com a mesma frequência. Um sistema não linear com uma alimentação periódica pode ter uma saída com frequências que são submúltiplas ou múltiplas da frequência de entrada. Isso pode gerar uma oscilação quase periódica. Um exemplo dessa saída é a soma de oscilações periódicas com frequências que não são múltiplas uma das outras;
- Caos: trata-se de um sistema não linear que pode ter um comportamento no seu regime permanente que não seja equilíbrio, oscilação periódica ou oscilação quase periódica. Esse comportamento é normalmente chamado de Caos. Alguns desses sistemas caóticos demonstram comportamentos aleatórios, independentemente da natureza do sistema.

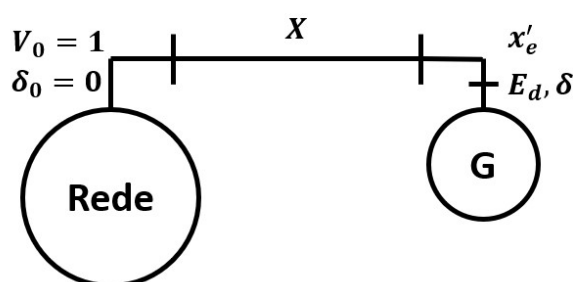
Essa distinção é particularmente crucial ao investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos, tema que será abordado mais adiante. Para isso, será discutida a problemática do SMIB, com foco em sua estabilidade transitória.

3 Análise Empírica do SMIB

Nos sistemas elétricos de potência, os geradores síncronos são responsáveis pela geração e fornecimento de grande parte da alimentação da rede. Eles são acionados por turbinas a vapor, hidráulicas e, em menor proporção, eólicas. Em países com frequência elétrica de 60Hz, caso do Brasil, a velocidade de rotação do rotor dos geradores dependerá do número de pólos do gerador

(pequeno nas termelétricas, que giram em 3600 ou 1800 rpm, e grande nas hidrelétricas, que giram em torno de 100 rpm). Geralmente, os geradores estão conectados aos centros consumidores por linhas de transmissão que formam uma rede complexa de interligações. Na análise de estabilidade transitória é comum modelar um único gerador por vez e representar o restante do sistema como um barramento infinito -*Single Machine Infinite Bus* (SMIB), como na Figura 1. O barramento infinito tem este nome, pois se considera que o restante do sistema, por ser muito maior que a máquina em análise, possa ser considerado um gerador síncrono com inércia infinita. Ou seja, a frequência do sistema permanece fixa em 60 Hz independentemente da potência fornecida pela máquina sendo analisada.

Figura 1: Máquina síncrona conectada ao barramento infinito



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Durante a operação normal a velocidade de rotação é basicamente constante, o problema de estabilidade transitória consiste em analisar a estabilidade do sistema após a ocorrência de uma grande perturbação, geralmente um curto-circuito trifásico em uma linha de transmissão. Para este fim pode-se representar o SMIB por sua equação de *swing* (5), a qual é uma EDO de 2º ordem não linear que utiliza o modelo clássico para representar o gerador, e descreve a dinâmica da posição angular do rotor em relação ao campo magnético girante como função das potências de entrada e saída do gerador. Note que a equação de *swing* é o desenvolvimento das leis de Newton aplicadas ao movimento rotativo do conjunto rotor/turbina da máquina:

$$M\ddot{\delta} = P_m - P_e(t)\sin(\delta) - D\omega \quad (5)$$

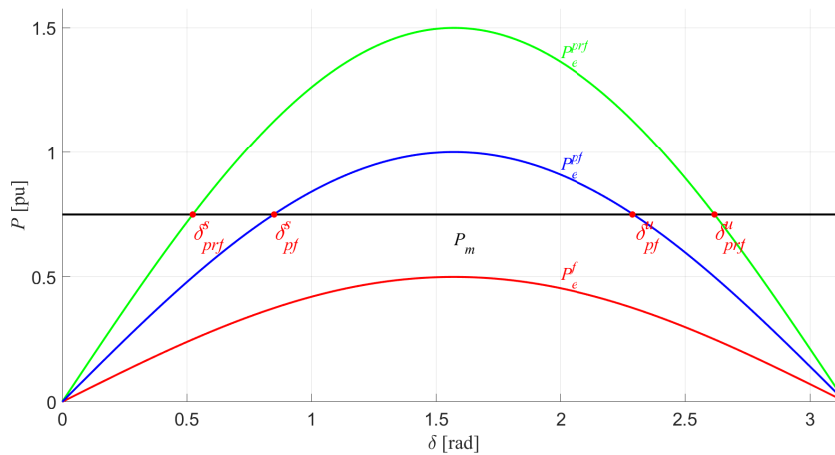
em que δ é a posição angular do rotor do gerador em relação a um referencial rotativo síncrono, M é constante de inércia do conjunto girante e P_m e $P_e(t)$ são a potência mecânica líquida de entrada e a potência elétrica máxima de saída do gerador dependente de t , $\omega = \dot{\delta}$ é a velocidade angular relativa ao referencial rotativo e D é a constante de amortecimento viscoso e que também incorpora os efeitos do enrolamento amortecedor, os quais são barras condutoras inseridas nas sapatas polares do rotor de modo a funcionar como uma gaiola de esquilo e aumentar o amortecimento de oscilações do rotor. A equação $P_e(t)\sin(\delta)$ expressa a relação entre a potência elétrica e a posição angular do rotor. A potência máxima é $P_e(t) = \frac{V_0 E_d}{X(t)}$, em que V_0 , E_d , e $X(t)$ são, respectivamente, a magnitude de tensão no barramento infinito, tensão induzida de eixo direto e a reatância de conexão, em que $X(t) = X_{eq}(t) + X'_d$, sendo que $X_{eq}(t)$ é a reatância equivalente de interligação com o restante do sistema e tem valores distintos antes da falta, durante a ocorrência do curto-circuito e após a eliminação deste pelo sistema de proteção, e o último termo é a reatância transitória de eixo direto

do gerador síncrono. Quando o sistema está em estado estacionário, a potência mecânica de entrada é igual à potência elétrica de saída do gerador, logo $\ddot{\delta} = 0$, $\dot{\delta} = \omega = 0$ (velocidade de rotação é igual à velocidade mecânica síncrona) e $\delta = \sin^{-1}(P_m/P_e)$ [7].

Segundo [8], um sistema elétrico pode enfrentar dois tipos de grandes perturbações: aleatórias e de carga. As perturbações aleatórias são ocasionadas por contingências, como a perda de unidades geradoras ou de elementos de transmissão devido a curtos-circuitos. Já os distúrbios de carga geralmente são causados por mudanças repentinas na demanda do sistema e podem não alterar a configuração da rede.

A análise de estabilidade transitória consiste em determinar t_f de modo que o ponto de operação estável pós-falta possa ser alcançado pelo sistema após a ocorrência de uma grande perturbação, podendo ser dividida em três partes distintas, as quais são: sistema pré-falta, sistema em falta e sistema pós-falta. Cada uma dessas fases apresenta topologias elétricas diferentes. Pode-se observar na Figura 2 as três fases do sistema perturbado, sendo a curva verde (P_e^{prf}) o sistema pré-falta, a curva vermelha (P_e^f) o sistema em curto-circuito, ou seja, em falta e a curva azul (P_e^{pf}) referente ao sistema depois do curto ser retirado. Cada uma dessas curvas obtém pontos de operação distintos.

Figura 2: Pontos de operação estável e instável do sistema SMIB.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Pode-se escrever o sistema de equações diferenciais relacionado ao SMIB denotando $x_1 = \delta$ e $x_2 = \dot{\delta} = \omega$ como as variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (P_m - P_e(t)\sin(x_1) - Dx_2)/M \end{aligned} \quad (6)$$

sendo que a cada intervalo de tempo a potência elétrica máxima tem um valor constante diferente, $P_e(t) = P_e^{prf}$ para $t < 0$, P_e^f para $0 \leq t < t_f$ e P_e^{pf} para $t \geq t_f$.

O sistema dinâmico descrito pela Equação (6) é não autônomo, mas pode ser analisado como um sistema autônomo em cada intervalo de tempo, devido à facilidade em se trabalhar com sistemas autônomos. Igualando o campo vetorial da (6) a zero, podemos calcular dois ângulos de operação: $[\sin^{-1}(P_m/P_e(t)); 0]$ e $[\pi - \sin^{-1}(P_m/P_e(t)); 0]$, estes ângulos são mostrados na Figura 2 como

δ_{prf}^s , δ_{prf}^u , δ_{pf}^s e δ_{pf}^u , respectivamente antes da falta e depois da falta. No entanto, durante o período de falta, não existem ângulos de operação possíveis, como ilustrado na Figura 2. Matematicamente existem infinitos ângulos de operação pré (δ_{prf}^s) e pós falta (δ_{pf}^s), já que o campo vetorial é senoidal, mas empiricamente sabe-se que os demais ângulos não podem ser atingidos sem que ocorram sobretensões, sobrecorrentes e perda de passo, o que acarretaria o acionamento dos sistemas de proteção e o desligamento da máquina.

A Figura 2 apresenta os ângulos nos quais o balanço de potência é nulo, nestes pontos a aceleração angular é nula e a frequência permanece constante. Os pontos de operação estável e instável podem ser identificados empiricamente nesse gráfico, no qual o ponto de operação estável ocorre quando o sistema retorna a uma condição de repouso após uma pequena perturbação. Enquanto o ponto de operação instável resulta em movimentos crescente ou decrescente, indicando uma resposta dinâmica mais sensível às perturbações. Quando uma perturbação reduz (ou aumenta) δ_{prf}^s (ou δ_{pf}^s) então P_m fica maior (ou menor) que P_e , isso dá origem a uma aceleração angular positiva (ou negativa) que desloca a velocidade para valores positivos (ou negativos), que tende a aumentar (diminuir) o δ restaurando o equilíbrio, mesmo mediante alguma oscilação. Nos ângulos de operação δ_{prf}^u e δ_{pf}^u ocorre exatamente o oposto, qualificando-o como instável.

Note-se que não basta que exista um ponto de operação estável no pós falta para que tal sistema seja considerado estável. Antes da ocorrência do curto-circuito o sistema opera em δ_{prf}^s com frequência síncrona, durante o período de falta (δ^f) o rotor acelera, a velocidade angular fica positiva e a posição angular aumenta. Após a eliminação do curto, embora a aceleração normalmente torne-se negativa, a velocidade ainda é positiva e o ângulo do rotor continua aumentando. É preciso garantir que durante a falta o rotor não acelere o suficiente para, após a eliminação da falta, o ângulo δ_{pf}^u não seja atingido. Estes conceitos empíricos serão definidos matematicamente e discutidos com mais profundidade nas seções posteriores.

4 Ponto de equilíbrio, tipos de estabilidade, região de atração e retrato de fase

Como foi visto na Seção 2, um sistema dinâmico pode ser descrito usando equações diferenciais autônomas de ordem n , conforme a (4). A resposta de tais sistemas está relacionada com a solução de EDOs, dada uma condição inicial do vetor de estado no instante t_0 :

$$x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Esta condição inicial juntamente com a (4) constituem o PVI. Obter uma solução deste PVI consiste em encontrar uma função $\phi(t, t_0, x_0)$ que satisfaz a EDO (4) e a condição inicial (7). A solução do PVI ($\phi(t, t_0, x_0)$) pode ser entendida como uma curva no espaço de estados parametrizada por t e que passa em x_0 quando $t = t_0$. Essa curva é chamada de trajetória do sistema passando pelo ponto x_0 . Em sistemas dinâmicos, um ponto de equilíbrio, também conhecido como ponto fixo ou ponto crítico, é um estado no qual o sistema permanece inalterado ao longo do tempo. Em outras palavras, é um conjunto de condições em que $\dot{x}_i = 0$, em que x_i são as variáveis do sistema, $i = 1, \dots, n$; indicando que o sistema não experimenta mudanças nesse ponto específico.

Definição 4.1: Suponha que $x^* \in \mathbb{R}^n$ seja um ponto de equilíbrio de (4), então:

$$f(x^*) = 0. \quad (8)$$

■

Portanto, os pontos de equilíbrio são as raízes ou soluções do sistema de equações não lineares (8). Ao contrário dos sistemas dinâmicos lineares, nos não lineares pode-se ter nenhum, apenas um ou múltiplos pontos de equilíbrio isolados. Note que $\phi(t, t_0, x^*) = x^*, \forall t \in \mathbb{R}, t > t_0$ ou $t < t_0$.

Por conveniência, é comum apresentar as definições e teoremas para o caso em que o ponto de equilíbrio está na origem de $\mathbb{R}^n$, isto é, $x^* = 0$. É importante salientar que não há perda de generalidade em fazer isso, pois qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem por meio de uma mudança de variáveis. Suponha que $x^* \neq 0$ e considere a mudança de variáveis $y = x - x^*$. Com essa mudança de variáveis a EDO que rege y é dada por:

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{x}^* = \dot{x} - 0 = f(x) = f(y + x^*) = g(y). \quad (9)$$

Na nova variável y , o sistema tem um ponto de equilíbrio na origem, pois $g(0) = f(0 + x^*) = f(x^*) = 0$.

Definição 4.2: O ponto de equilíbrio x^* da (4) é:

- estável se para cada $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe $\sigma = \sigma(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x_0 - x^*\| < \sigma \Rightarrow \|\phi(t, t_0, x_0) - x^*\| < \epsilon, \forall t \geq t_0; \quad (10)$$

- instável se não verificar a condição anterior, ou seja, se não for estável;
- assintoticamente estável se for estável e σ pode ser escolhido de modo que:

$$\|x_0 - x^*\| < \sigma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, t_0, x_0) = x^*. \quad (11)$$

■

A exigência $\epsilon - \sigma$ para estabilidade assume a forma de um desafio-resposta. Para demonstrar que o ponto denominado origem x^* é estável, é assumido que para qualquer valor de ϵ , deve-se produzir um valor de σ , possivelmente dependente de ϵ , tal que uma trajetória começando em uma vizinhança σ da origem nunca saia da vizinhança ϵ . Segundo [6], esta exigência $\epsilon - \delta$ deve continuar válida para qualquer valor arbitrariamente pequeno de ϵ , para que a definição de estabilidade seja verificada, caso contrário um ponto de equilíbrio instável no interior de um Ciclo Limite estável poderia ser erroneamente classificado como estável.

Assim, a estabilidade está relacionada ao ponto de equilíbrio e é uma propriedade local. Ao se analisar as soluções da (4) nota-se que a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável implica que todas as trajetórias iniciadas em uma determinada região irão tender para ele. Define-se então como Região de Atração deste ponto de equilíbrio, como a região da qual o sistema evolui para o ponto de equilíbrio ao longo do tempo.

Definição 4.3: A Região de Atração do ponto de equilíbrio x^* , $A(x^*)$, é o maior subconjunto do espaço de estado que satisfaz:

$$x_0 \in A(x^*) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, t_0, x_0) = x^*. \quad (12)$$

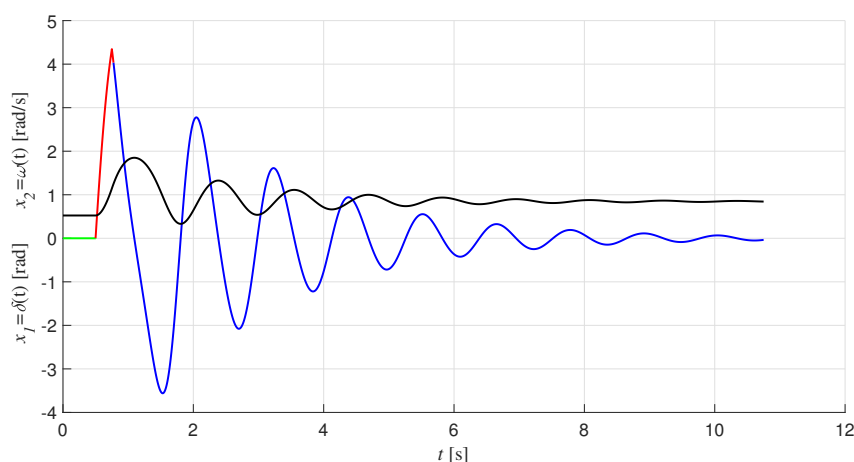
■

Para análise dos pontos de operação do sistema SMIB, foram utilizados nos graficos simulados em MATLAB com os seguintes parâmetros: $P_m = 0,75$, $P_e = 1,5$, $M = \frac{4}{\pi 60}$, $D = 0,02$ e passo de integração $h = 0,0001$. Assim, é possível analisar através da Figura 2 que quando a rede está em equilíbrio, $P_m = P_e$, o ângulo do rotor é $\delta_s = 27,78^\circ = 0,4859$ rad e $\omega = 0$. Assim, se $\delta > \delta_s$, o gerador irá frear, enquanto no caso contrário, o gerador irá acelerar, retornando sempre ao ponto de operação original, caracterizando um ponto de equilíbrio estável. Já no ponto $\delta_{prf}^u = 152,23^\circ = 2,6659$ rad com $\omega = 0$, o aumento do ângulo do rotor provoca uma redução na potência elétrica. Assim, se $\delta > \delta^u$, a máquina acelera, aumentando o ângulo do rotor, e o contrário acontece para $\delta < \delta^u$ (a máquina freia). Em ambas as condições, a máquina não retorna ao ponto de operação original, caracterizando δ^u como um ponto de equilíbrio instável.

Para o sistema em falta, a capacidade de transmissão de potência diminui abruptamente, passando da curva pré-falta (P_e^{prf}) para a curva em falta (P_e^f), apresentada na Figura 2. Também pode-se notar que em P_e^f sua curva não intercepta a linha de P_m do gerador, não existindo pontos de equilíbrio, pois não há valor de δ que torne a aceleração do gerador igual a zero. Assim, para esse caso a proteção do sistema deve agir para não ocorrer a interrupção completa do gerador desligando a linha que entrou em curto. Imediatamente a curva que passa a valer é a curva pós-falta (P_e^{pf}).

A Figura 3 apresenta o gráfico correspondente de uma trajetória do SMIB nos eixos $x_1 = \delta(t)$ e $x_2 = \omega(t)$, $\phi(t, 0, [\delta_{prf}^s, 0])$. A solução foi obtida numericamente, visto que a Equação (5) não tem solução analítica. Note que os dois estados foram projetados no mesmo eixo, essa é uma estratégia comum para sistemas com $n > 2$, mas também é útil para comparar o comportamento dos estados a cada instante de tempo. Isso permite visualizar a resposta do sistema. O gráfico da Figura 3 ilustra uma situação de estabilidade do sistema. Após uma perturbação, o sistema se estabiliza em um novo ponto de operação, demonstrando o sincronismo do gerador com o barramento infinito. Também pode-se observar nas Figuras 3 e 4 que a trajetória ao longo dos três intervalos de tempo do estudo, de 0 a 0,5s quando o sistema é o pré-falta, representado pela cor verde e se encontra no ponto de equilíbrio $[\delta_{prf}^s, 0]$, 0,5 a 0,79s, representado pela cor vermelha, quando o sistema está em falta com velocidade e posição angular aumentando e, de 0,8 a 10s, representado pela cor azul, quando o sistema é o pós-falta e a velocidade e a posição angular oscilam em torno de $[\delta_{pf}^s, 0]$.

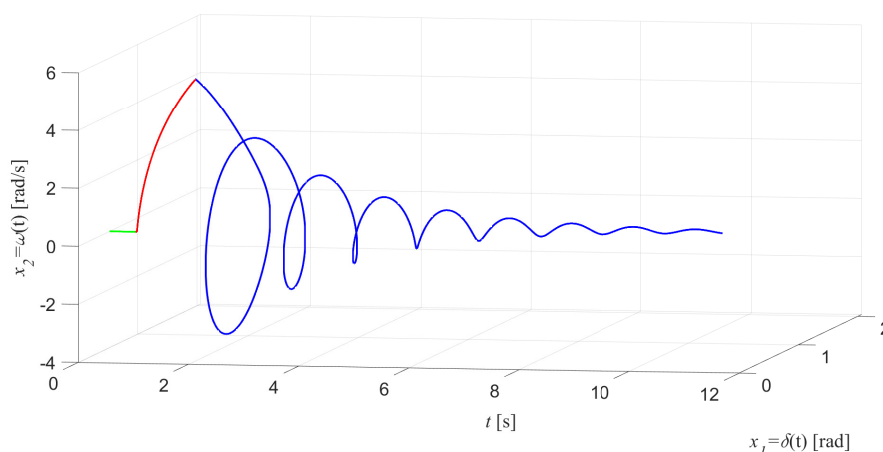
Figura 3: Trajetória projetada nos eixos do sistema SMIB estável.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

A Figura 4 mostra a trajetória no espaço de estado para o sistema SMIB. Percebe-se que a oscilação amortecida em cada estado resulta em uma trajetória espiral decrescente que tende ao ponto de equilíbrio estável.

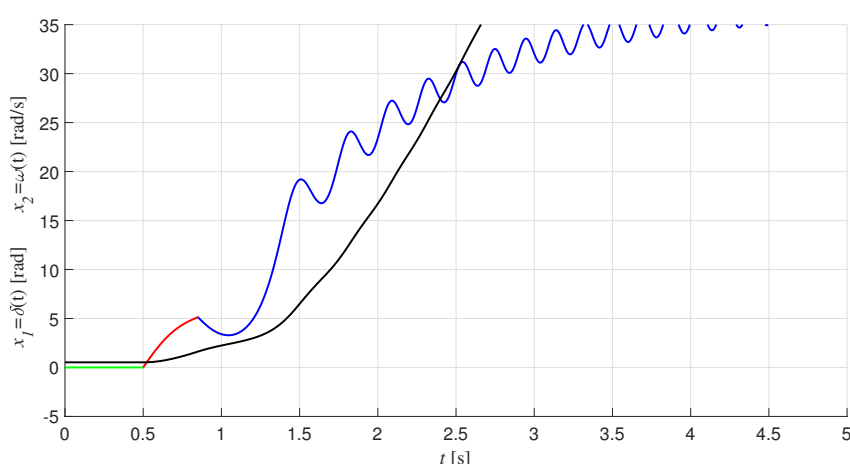
Figura 4: Trajetória do sistema SMIB estável.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Por outro lado, uma simulação realizada com um tempo de abertura de 0,35 segundos revela um sistema instável. As curvas obtidas para este tempo de abertura estão na Figura 5, na qual se percebe que, tanto a variação do ângulo interno quanto o desvio de velocidade do gerador aumentam continuamente, ou seja, a máquina continua acelerando após a eliminação do curto-circuito sem atingir um novo ponto de equilíbrio e, assim, o sistema se configura como transitoriamente instável.

Figura 5: Trajetória projetada nos eixos do sistema SMIB instável



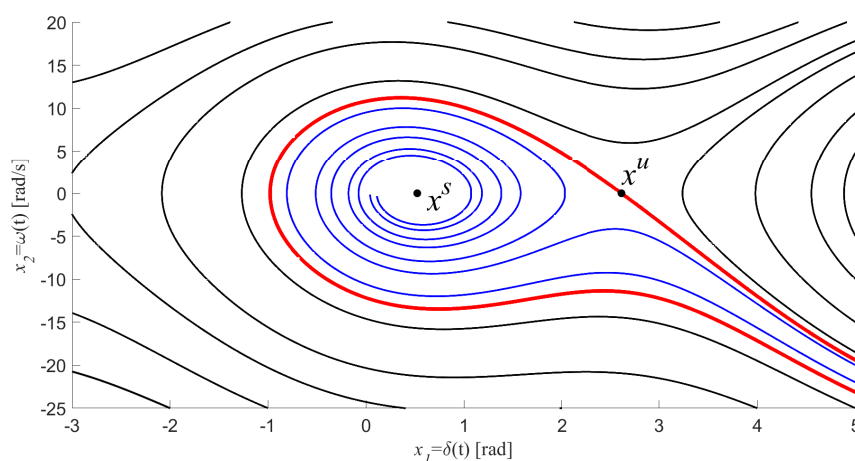
Fonte: elaborada pelos próprios autores

Segundo [6], o conjunto de variáveis do espaço de fase de um sistema compõe o conjunto mínimo de variáveis que oferecem uma descrição completa do estado do sistema. Com isso, pode-se referir

a espaço de fase ao espaço que surge a partir dessas variáveis de fase, ou seja, o estado de um sistema em qualquer momento específico é representado como um ponto dentro desse espaço de fase. Assim, as mudanças no estado do sistema ao longo da variável independente t são visualizadas como trajetórias no espaço de fase. Essas trajetórias são, essencialmente, os caminhos que um objeto percorre nesse espaço em relação a t , que normalmente é o tempo. O retrato de fase é uma representação que abrange um conjunto suficiente de trajetórias projetadas no espaço de fase (ie, sem a componente t do gráfico) que permitem a compreensão do comportamento dinâmico do sistema. É importante salientar que, por se tratar de um sistema autônomo, nesta projeção não haverá cruzamento entre qualquer trajetória. Assim, a partir do retrato de fase do SMIB, é possível observar a região de equilíbrio em torno dos pontos de equilíbrio estável. Logo, para manter o sincronismo com o restante do sistema, a falta deve ser eliminada enquanto δ e ω estiverem dentro da região interna da curva vermelha na Figura 6.

A Figura 6 apresenta o retrato de fase do sistema pós falta que permite uma avaliação da estabilidade de cada ponto de equilíbrio e da área de atração do ponto de equilíbrio $[\delta_{pf}^s, 0]$. As trajetórias vermelhas correspondem às duas trajetórias que tendem ao ponto de equilíbrio instável $x^u = [\delta_{pf}^u, 0]$. Essas duas trajetórias, juntamente com o ponto de equilíbrio instável $[\delta_{pf}^u, 0]$, delimitam a fronteira da região de atração do ponto de equilíbrio estável $[\delta_{pf}^s, 0]$. Já as trajetórias em azul convergem para o ponto de equilíbrio estável, pois se encontram dentro da área de atração desse ponto. Por outro lado, as trajetórias em preto convergem para outros pontos de equilíbrio, pois estão fora da região de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse.

Figura 6: Órbitas do sistema SMIB.

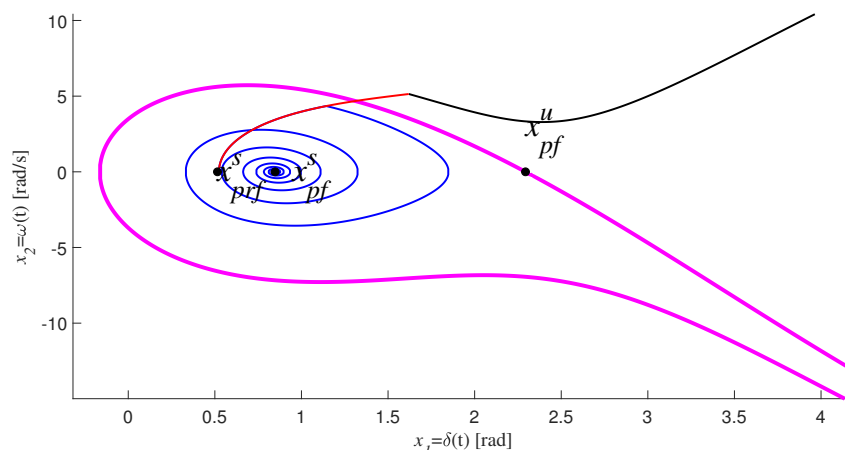


Fonte: elaborada pelos próprios autores

Após a remoção do curto-circuito, por meio da abertura dos disjuntores, inicia-se a fase pós-falta. Nesse momento, dependendo do tempo de resposta do sistema de segurança, duas situações podem ocorrer: a primeira, em que a máquina retorna ao ponto de operação estável do pós-falta, $[\delta_{pf}^s, 0]$; e a segunda, necessitando que o gerador seja desligado completamente, pois a trajetória escapa da área de atração do ponto de equilíbrio estável do pós falta, o que implicará em perda de sincronismo com o restante da rede, sobretensões, sobrecorrentes, perda de passo e vibrações mecânicas inaceitáveis para a segurança da usina. A Figura 7 ilustra as órbitas do sistema após uma falta. A curva azul

representa a trajetória da máquina na primeira situação, onde ela retorna ao ponto de operação estável. Por outro lado, a curva preta mostra a segunda situação, na qual a trajetória escapa da área de atração, não atingindo um ponto de operação estável.

Figura 7: Órbitas do sistema pós falta.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Na primeira situação, após a falta e a abertura da linha em curto, a máquina atinge o ângulo de operação δ_{pf}^s , pois toda a energia cinética adquirida pelo rotor durante a falta pode ser convertida em energia potencial, ainda dentro da região de atração do ponto de equilíbrio estável do pós falta, e posteriormente dissipada pelo amortecimento. Por outro lado, na segunda situação na qual é atingido o ponto de operação δ_{pf}^u , a energia cinética adquirida durante a falta não pode ser completamente convertida em energia potencial dentro da área de atração do ponto de equilíbrio estável após a falta. Isso ocorre porque a trajetória do sistema durante a falta abandona, mesmo que minimamente, a área de atração do ponto de equilíbrio estável no pós-falta. Nessas condições, para evitar danos ao sistema, a proteção deve atuar e desligar o gerador. O tempo limite para isolar o defeito sem que o sistema perca o sincronismo é chamado de Tempo Crítico de Abertura.

A seguir esses conceitos serão aplicados para a análise espectral do sistema dinâmico SMIB, definido em (5), aplicando assim o primeiro e segundo método de Lyapunov com o objetivo principal de determinar se o sistema é estável, instável ou assintoticamente estável em torno de um ponto de equilíbrio. Maiores detalhes sobre este sistema podem ser encontrados em [7].

5 Resultados

A seguir, serão apresentadas algumas definições e conceitos como apresentadas por [6] e [9] de maneira a embasar a análise espectral do sistema não linear SMIB. Na primeira subseção, será apresentado o Primeiro Método de Lyapunov, abordando as técnicas de linearização. Na segunda subseção, serão discutidas as funções de Lyapunov e sua utilização no Segundo Método de Lyapunov.

Para analisar o comportamento de um sistema não linear, a determinação dos pontos de equilíbrio e a verificação de sua estabilidade é crucial. Como o conceito de estabilidade envolve um comportamento local do sistema nas vizinhanças do ponto de equilíbrio faz sentido linearizar o sistema não

linear no entorno dos pontos de interesse. Assim, a partir do sistema não linear autônomo definido pela Equação (4), é realizada uma mudança de variável visando linearizar esse sistema em torno de um ponto de equilíbrio x^* , de maneira que uma pequena perturbação seja analisada em torno deste:

$$x = x^* + \Delta x. \quad (13)$$

Substituindo na Equação (4), tem-se:

$$\dot{x} = \dot{x}^* + \dot{\Delta x} = 0 + \dot{\Delta x} = f(x^* + \Delta x). \quad (14)$$

A Equação (4) pode ser aproximada expandindo o campo vetorial em uma série de Taylor e desprezando as derivadas de alta ordem:

$$\dot{x}_i = \dot{\Delta x}_i = f_i(x^* + \Delta x) \approx f_i(x^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (15)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Como $f_i(x^*) = 0$, tem-se que:

$$\dot{\Delta x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (16)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Desta maneira, a equação linearizada resultante da Equação (4) pode ser escrita, considerando-se a Equação (16) como:

$$\Delta \dot{x} = J(x^*) \Delta x \quad (17)$$

sendo:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A matriz $J(x^*)$ é chamada de matriz Jacobiana. Observe que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado. Para facilitar a compreensão, será analisado um sistema de dimensão $n = 2$. O parâmetro λ é denominado autovalor de $J(x^*)$, se existe um vetor não nulo v , conhecido como autovetor à direita de $J(x^*)$, tal que:

$$J(x^*)v = \lambda v \quad (19)$$

em que, neste caso, $J(x^*) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $v \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Os autovalores da matriz $J(x^*)$ podem ser obtidos resolvendo a equação característica:

$$\det(J(x^*) - \lambda I) = 0 \quad (20)$$

sendo I uma matriz identidade de ordem igual à da matriz $J(x^*)$. A (20) dá origem a um polinômio de grau n na variável λ , tal que $n = 2$ para o sistema SMIB investigado. Este polinômio é conhecido como polinômio característico.

A análise se baseia na observação se os autovalores são reais, complexos, múltiplos ou diferentes de zero, podendo um ou ambos serem zero, o que será caracterizado pela Definição 5.1.

Definição 5.1: Considere o sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x} = Ax \quad (21)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dada uma decomposição espectral para a matriz A , $A = MJM^{-1}$, onde J é a forma canônica de Jordan e M é uma matriz cujas colunas são os autovetores e autovetores generalizados de A , a solução fechada para a (21) para um estado inicial dado, x_0 , é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = [I + At + A^2t^2/2! + \dots]x_0 \\ &= [MM^{-1} + MJM^{-1}t + MJM^{-1}MJM^{-1}t^2/2! + \dots]x_0 \\ &= Me^{(Jt)}M^{-1}x_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Para $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, a forma de Jordan real pode assumir uma das três formas a seguir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (23)$$

em que k é igual a 0 ou 1 e $\beta \in [0, +\infty)$. A primeira forma corresponde ao caso em que os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e distintos, a segunda forma corresponde ao caso em que os autovalores são reais e iguais, e a terceira forma corresponde ao caso de autovalores complexos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Além disso, no caso de autovalores reais, deve-se isolar o caso em que pelo menos um dos autovalores é zero. Nesse caso, a origem não é um ponto de equilíbrio isolado e o comportamento qualitativo do sistema é bastante diferente dos outros casos. ■

Caso 1: Ambos os autovalores são reais, em que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$.

Neste caso, $M = [v_1, v_2]$, em que v_1 e v_2 são os autovetores à direita reais associados a λ_1 e λ_2 . A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema em duas equações diferenciais de primeira ordem desacopladas:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned} \quad (24)$$

A solução, para o estado inicial (z_{10}, z_{20}) , é dada por:

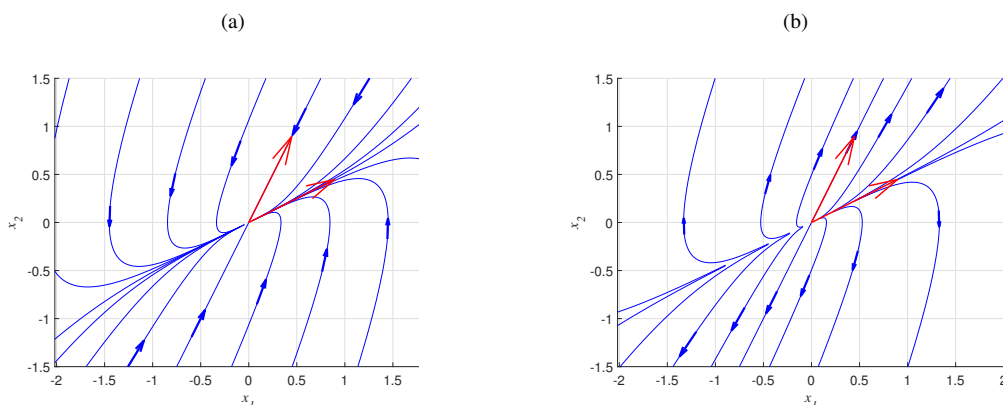
$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10}e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (25)$$

A forma do retrato de fase depende dos sinais de λ_1 e λ_2 . Considere primeiro o caso em que ambos os autovalores são negativos. Sem perda de generalidade, tem-se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Neste caso, ambos os termos exponenciais $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ tendem a zero conforme $t \rightarrow \infty$. Além disso, como $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, o termo $e^{\lambda_2 t}$ tenderá a zero mais rapidamente do que o termo $e^{\lambda_1 t}$. Portanto, chama-se λ_2 de autovalor rápido e λ_1 de autovalor lento.

Quando transformadas de volta para as coordenadas x , a família de trajetórias terá o retrato típico apresentado na Figura 8(a). Note que no plano $x_1 - x_2$, as trajetórias se tornam tangentes ao autovetor lento v_1 à medida que se aproximam da origem e paralelas ao autovetor rápido v_2 longe da origem. Neste caso, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é chamado de nó estável.

Quando λ_1 e λ_2 são positivos, o retrato de fase manterá a característica da Figura 8(a), mas com as direções das trajetórias invertidas, uma vez que os termos exponenciais $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ cresce exponencialmente conforme t aumenta. A Figura 8(b) mostra o retrato de fase para o caso $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. O ponto de equilíbrio x^* é referido, neste caso, como um nó instável.

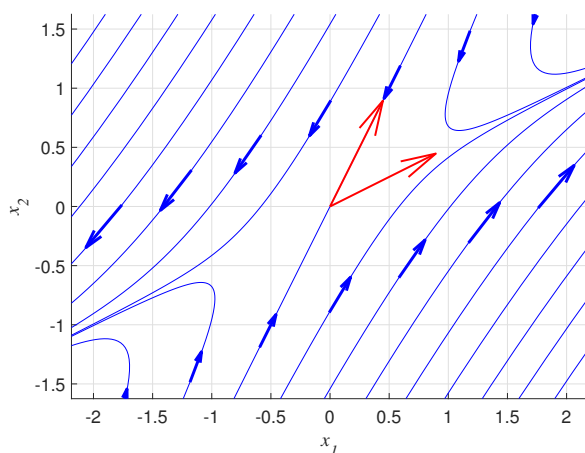
Figura 8: Retratos de fase para (a) um nó estável; (b) um nó instável



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Suponha agora que os autovalores tenham sinais opostos. Em particular, seja $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Neste caso, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ enquanto $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Portanto, chama-se λ_2 de autovalor estável e λ_1 de autovalor instável. Correspondentemente, v_2 e v_1 são chamados de autovetores estável e instável, respectivamente. As trajetórias têm formas hiperbólicas. Elas se tornam tangentes ao eixo dado pelo autovetor instável conforme tende ao infinito e tangentes ao eixo dado pelo autovetor estável conforme tende a zero. A única exceção a essas formas hiperbólicas são as quatro trajetórias ao longo dos eixos. As duas trajetórias ao longo do eixo dado pelo autovetor estável são chamadas de trajetórias estáveis, pois se aproximam da origem conforme $t \rightarrow \infty$, enquanto as duas trajetórias ao longo do eixo dado pelo autovetor instável são chamadas de trajetórias instáveis, pois se aproximam do infinito conforme $t \rightarrow \infty$. O retrato de fase no plano $\mathbb{R}^2$, representado pelas variáveis x_1, x_2 , é apresentado na Figura 9, na qual as trajetórias estáveis estão ao longo do autovetor estável v_2 e as trajetórias instáveis estão ao longo do autovetor instável v_1 . Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de ponto de sela.

Figura 9: Retrato de fase de um ponto de sela.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Caso 2: Autovalores complexos, em que $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

MASSAMBANI, N.; MARTINS, A. C.; BALBO, A. R.; SOLER, E. M.; NEPOMUCENO, L. Caracterização de pontos de equilíbrio e análise de estabilidade do SMIB utilizando o primeiro e segundo método de Lyapunov. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 25, e25006, 2025. Edição Ermac.

DOI: 10.21167/cqdv25e25006 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd

A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema para:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= \alpha z_1 + \beta z_2\end{aligned}\quad (26)$$

A solução desta equação é oscilatória e pode ser expressa de forma mais conveniente em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\end{aligned}\quad (27)$$

em que se tem duas equações diferenciais de primeira ordem desacopladas:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta\end{aligned}\quad (28)$$

A solução para um estado inicial dado (r_0, θ_0) é dada por:

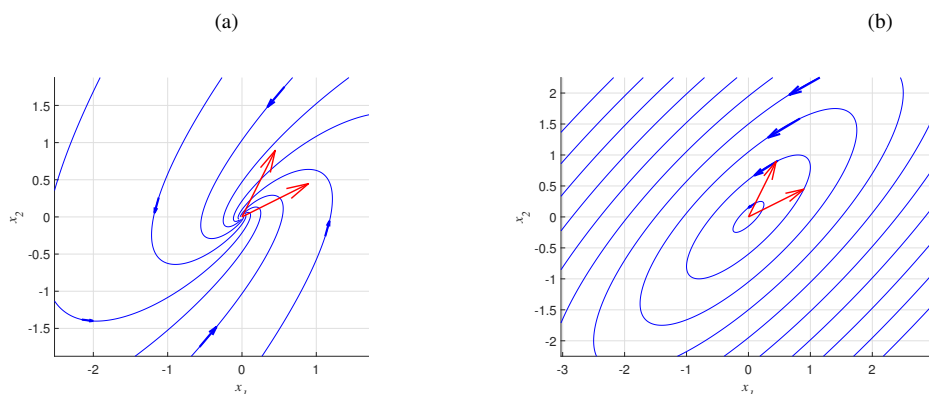
$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \beta t\end{aligned}\quad (29)$$

De modo que nas coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned}z_1 &= r_0 e^{\alpha t} \cos(\theta_0 + \beta t) \\ z_2 &= r_0 e^{\alpha t} \sin(\theta_0 + \beta t)\end{aligned}\quad (30)$$

A (30) descreve uma espiral logarítmica no plano representado pelas variáveis z_1 e z_2 . Dependendo do valor de α , a trajetória pode assumir uma das três formas. Duas dessas formas estão ilustradas nas Figuras 10(a) e 10(b), que representam as trajetórias no plano de coordenadas x_1 , x_2 . A representação para um foco instável pode ser omitida, pois graficamente é idêntica à do foco estável, diferindo apenas na inversão da direção do fluxo. Quando $\alpha < 0$, a espiral converge para a origem; quando $\alpha > 0$, ela se afasta da origem. Já quando $\alpha = 0$, a trajetória é um círculo de raio r_0 . O ponto de equilíbrio x^* é referido como um foco estável se $\alpha < 0$, foco instável se $\alpha > 0$, e centro se $\alpha = 0$.

Figura 10: Retratos de fase para: (a) um foco estável; (b) um centro



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Caso 3: Autovalores múltiplos não nulos, em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

MASSAMBANI, N.; MARTINS, A. C.; BALBO, A. R.; SOLER, E. M.; NEPOMUCENO, L. Caracterização de pontos de equilíbrio e análise de estabilidade do SMIB utilizando o primeiro e segundo método de Lyapunov. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 25, e25006, 2025. Edição Ermac.

DOI: 10.21167/cqdv25e25006 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd

A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema para:

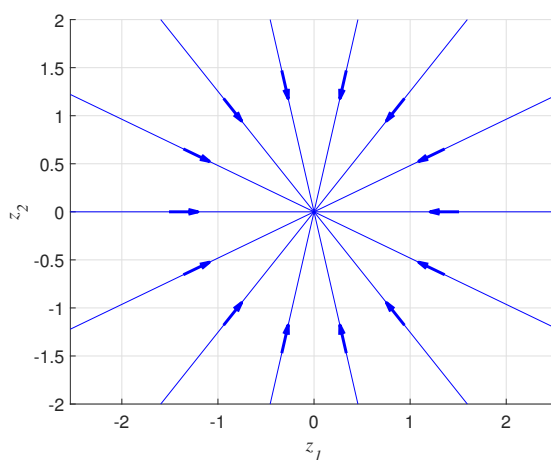
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda z_1 + k z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2\end{aligned}\quad (31)$$

no qual, k pode ser 1 ou 0 dependendo da multiplicidade geométrica do autovalor e cuja solução, para um estado inicial dado (z_{10}, z_{20}) , é dada por:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= e^{\lambda t}(z_{10} + k z_{20}t) \\ z_2(t) &= e^{\lambda t} z_{20}\end{aligned}\quad (32)$$

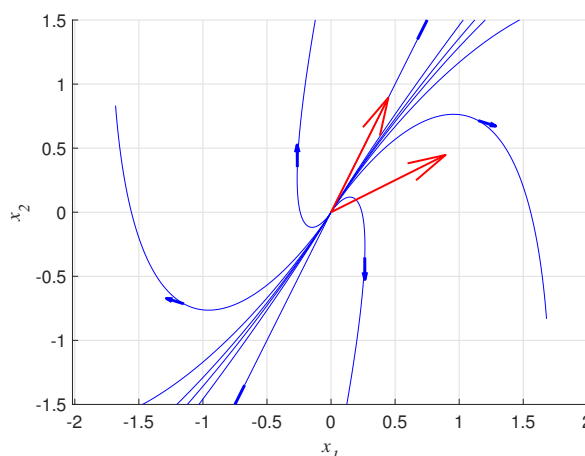
A Figura 11 apresenta a forma das trajetórias quando $k = 0$ e $\lambda < 0$, enquanto a Figura 12 mostra a forma das trajetórias quando $k = 1$ e $\lambda > 0$. Nos casos complementares o sentido das trajetórias é invertida. O retrato de fase tem alguma semelhança com o retrato de um nó. Portanto, o ponto de equilíbrio x^* é geralmente referido como um nó degenerado estável se $\lambda < 0$ e nó degenerado instável se $\lambda > 0$. No entanto, observe que os retratos de fase das Figuras 11 e 12 não têm o comportamento assintótico lento-rápido que foi visto na Figura 8, uma vez que a taxa de decaimento é a mesma nos dois eixos.

Figura 11: Retrato de fase para autovalores múltiplos
 $k = 0$ e $\lambda < 0$



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Figura 12: Retrato de fase para autovalores múltiplos
 $k = 1$ e $\lambda > 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Resumidamente, quando o ponto de equilíbrio x^* é isolado, o sistema pode exibir seis retratos de fase qualitativamente diferentes, que estão associados a diferentes tipos de equilíbrios: nó estável, nó instável, ponto de sela, foco estável, foco instável e centro. O tipo de ponto de equilíbrio é completamente especificado pela localização no plano complexo dos autovalores de A . Note que o comportamento qualitativo global (em todo o plano de fase) do sistema é determinado pelo tipo do ponto de equilíbrio. Isso é uma característica dos sistemas lineares ou linearizados.

Caso 4: Um ou ambos os autovalores são zero.

Quando um ou ambos os autovalores de A são zero, o retrato de fase é, de certa forma, degenerado. Nesse caso, a matriz A possui um espaço nulo não trivial. Qualquer vetor no espaço nulo de A é um ponto de equilíbrio para o sistema, ou seja, o sistema possui um subespaço de equilíbrio em vez de um ponto de equilíbrio. A dimensão do espaço nulo pode ser um ou dois; se for dois, a matriz A será a matriz nula. Este é um caso trivial em que todo ponto no plano é um ponto de equilíbrio. Quando a dimensão do espaço nulo é um, a forma de Jordan de A dependerá da multiplicidade do autovalor zero. Quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, a matriz M é dada por $M = [v_1, v_2]$, em que v_1 e v_2 são os autovetores associados.

A mudança de variáveis $z = M^{-1}x$ resulta em:

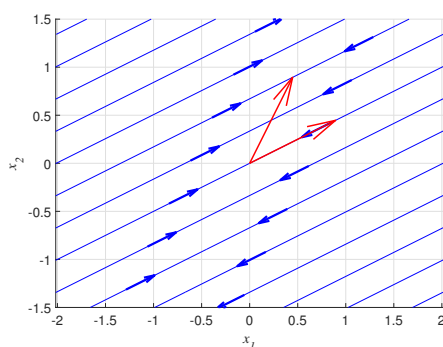
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 0 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2\end{aligned}\tag{33}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_{10} \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}\tag{34}$$

O termo exponencial irá crescer ou decair, dependendo do sinal de λ_2 . A Figura 13 apresenta o retrato de fase no plano de coordenadas x_1 e x_2 . Todas as trajetórias convergem para o subespaço de equilíbrio quando $\lambda_2 < 0$, e divergem dele quando $\lambda_2 > 0$.

Figura 13: Retrato de fase para $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Quando ambos os autovalores estão na origem, a mudança de variáveis $z = M^{-1}x$ resulta em:

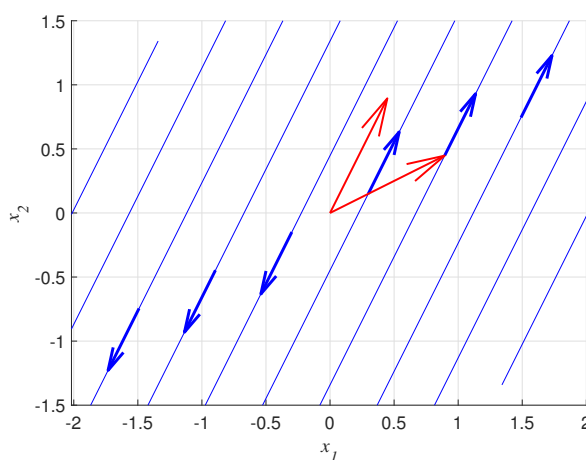
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 0\end{aligned}\quad (35)$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_{10} + z_{20}t \\ z_2(t) &= z_{20}\end{aligned}\quad (36)$$

O termo $z_{20}t$ aumentará ou diminuirá, dependendo do sinal de z_{20} de modo que as trajetórias se deslocam para a esquerda quando z_{20} é negativo, quadrantes 3 e 4, e as trajetórias se deslocam para a direita quando z_{20} é positivo, quadrantes 1 e 2. O eixo z_1 representa o subespaço de equilíbrio. A Figura 14 apresenta o retrato de fase no plano de coordenadas x_1, x_2 . O retrato de fase na Figura 14 é bastante diferente do da Figura 13. Trajetórias que começam fora do subespaço de equilíbrio movem-se paralelamente a ele.

Figura 14: Retrato de fase para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

5.1 Primeiro Método de Lyapunov

O estudo do comportamento de sistemas lineares em torno do ponto de equilíbrio x^* é importante, pois em muitos casos, o comportamento local de um sistema não linear perto de um ponto de equilíbrio pode ser deduzido linearizando o sistema em torno desse ponto e estudando o comportamento do sistema linear resultante. A análise espectral do sistema dinâmico depende em grande parte de como os diversos retratos de fase qualitativos de um sistema linear persistem sob perturbações. Pode-se ganhar percepções sobre o comportamento de um sistema linear sob perturbações examinando o caso especial de perturbações lineares. Suponha que A tenha autovalores distintos e considere $A + \Delta A$, onde ΔA é uma matriz real de dimensão 2×2 cujos elementos têm magnitudes arbitrariamente pequenas. Pela teoria de perturbação de matrizes, sabe-se que os autovalores de uma matriz dependem continuamente de seus parâmetros. Isso significa que, dado qualquer número positivo ϵ , existe um número positivo correspondente δ tal que, se a magnitude da perturbação em cada elemento de A for menor que δ , os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ estarão contidos em bolas abertas de raio ϵ centradas nos autovalores de A . Consequentemente, qualquer autovalor de A que esteja no semiplano direito aberto (parte real positiva) ou no semiplano esquerdo aberto (parte real negativa) permanecerá em seu respectivo semiplano após perturbações arbitrariamente pequenas. Por outro lado, os autovalores no eixo imaginário, quando perturbados, podem ir para o semiplano direito ou esquerdo do plano, já que uma bola centrada no eixo imaginário se estenderá em ambos os semiplanos, não importa o quão pequeno ϵ seja. Consequentemente, conclui-se que se o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ de $\dot{x} = Ax$ for um nó, foco ou ponto de sela, então o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ de $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ será do mesmo tipo para perturbações suficientemente pequenas. A situação é bastante diferente se o ponto de equilíbrio for um centro. Considere a seguinte perturbação da forma de Jordan real no caso de um centro:

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \quad (37)$$

em que μ é um parâmetro de perturbação. Quando μ é positivo, o ponto de equilíbrio do sistema perturbado é um foco instável; quando μ é negativo, é um foco estável. Isso é verdade, não importa quão pequeno μ seja, desde que seja diferente de zero. Os retratos de fase de um foco estável e um foco instável são qualitativamente diferentes do retrato de fase de um centro, com isso um ponto de equilíbrio do tipo centro não persistirá sob perturbações. Os pontos de equilíbrio do tipo nó, foco e sela são ditos estruturalmente estáveis porque mantêm seu comportamento qualitativo sob perturbações infinitesimalmente pequenas, enquanto o ponto de equilíbrio do tipo centro não é estruturalmente estável. A distinção entre os dois casos é devido à localização dos autovalores de A , com os autovalores no eixo imaginário sendo vulneráveis a perturbações. Isso traz a definição de um ponto de equilíbrio hiperbólico.

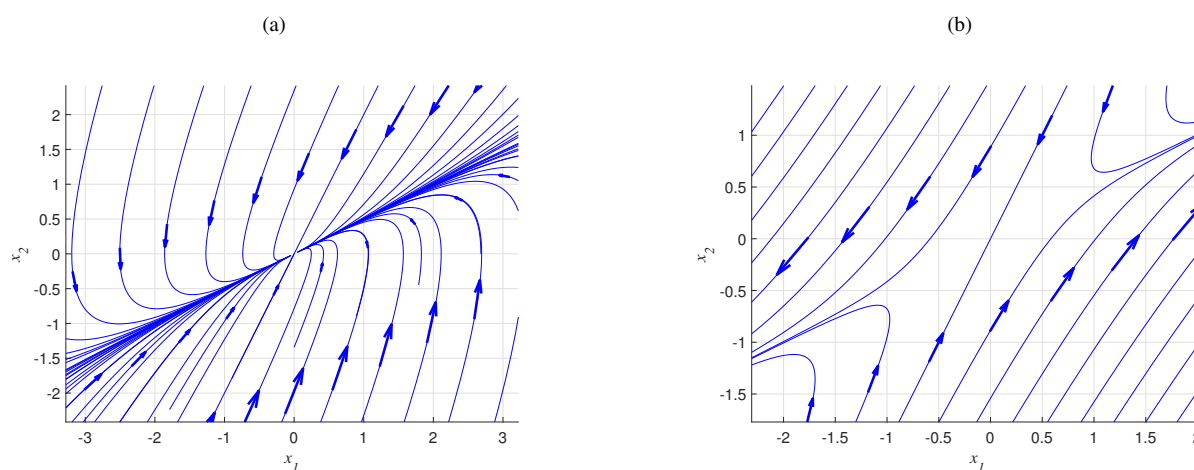
Definição 5.2: A origem $x^* = 0$ é dita um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\dot{x} = Ax$ se A não tiver autovalores com parte real zero. ■

Baseando-se na Definição 5.2 tem-se as seguintes condições:

- Quando A tem múltiplos autovalores reais não nulos, perturbações infinitesimais (pequenas) podem resultar em um par de autovalores complexos. Portanto, um nó estável (respectivamente, instável) permanecerá um nó estável (respectivamente, instável) ou se tornará um foco estável (respectivamente, instável);
- Quando A tem autovalores nulos, espera-se que perturbações movessem esses autovalores para

longe de zero, resultando em uma grande mudança no retrato de fase. No entanto, acontece que há uma diferença importante entre o caso em que há apenas um autovalor em zero e o caso em que ambos os autovalores estão em zero ($\lambda \neq 0$). No primeiro caso, a perturbação do autovalor zero resulta em um autovalor real $\lambda_1 = \mu$ onde μ pode ser positivo ou negativo. Como o outro autovalor λ_2 é diferente de zero, sua perturbação o manterá longe de zero. Além disso, já que as perturbações são arbitrariamente pequenas, $|\lambda_1| = |\mu|$ será muito menor que $|\lambda_2|$. Assim, tem-se dois autovalores reais distintos, o que significa que o ponto de equilíbrio do sistema perturbado será um nó ou um ponto de sela, dependendo dos sinais de λ_2 e μ . Isso provoca uma mudança importante no retrato de fase. No entanto, um exame cuidadoso do retrato de fase fornece mais *insights* sobre o comportamento qualitativo do sistema. Como $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$, o termo exponencial $e^{\lambda_2 t}$ mudará com t muito mais rápido do que o termo exponencial $e^{\lambda_1 t}$. Isso resulta nos retratos de fase típicos de um nó e um ponto de sela mostrados nas Figuras 15(a) e 15(b), para o caso $\lambda_2 < 0$. A comparação desses retratos de fase com a Figura 13 apresenta alguma semelhança. Em particular, as trajetórias que começam fora do autovetor v_1 convergem (ou divergem no caso instável) para este subespaço ao longo de trajetórias (quase) paralelas ao autovetor v_2 . Conforme se aproximam do subespaço gerado pelo vetor v_1 , tornam-se tangentes a ele e movem-se ao longo dele.

Figura 15: Retratos de fase de um sistema perturbado quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$: (a) $\mu < 0$; (b) $\mu > 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

- Quando $\mu < 0$, o movimento ao longo de v_1 converge para a origem (nó estável), enquanto quando $\mu > 0$, o movimento ao longo de v_1 tende ao infinito (ponto de sela). Esse comportamento qualitativo é característico de sistemas singularmente perturbados;
- Quando ambos os autovalores de A são zeros, o efeito das perturbações tem caracterizações mais abrangentes. Considere as quatro possíveis perturbações da forma de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (38)$$

em que μ é um parâmetro de perturbação que pode ser positivo ou negativo. Pode ser facilmente visto que os pontos de equilíbrio nesses quatro casos são um centro, um foco, um nó e um ponto de sela, respectivamente. Em outras palavras, todos os possíveis retratos de fase de um equilíbrio isolado poderiam resultar de perturbações.

O primeiro método de Lyapunov, também conhecido como o Método Indireto de Lyapunov, fornece condições sob as quais é possível afirmar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear.

Assim, dado o sistema dinâmico da (4), suponha que x^* é um ponto de equilíbrio e $J(x^*)$ a matriz jacobiana do campo vetorial, (18), calculada no ponto de equilíbrio de interesse. Então:

- O ponto de equilíbrio x^* é assintoticamente estável se a parte real de todos os autovalores de $J(x^*)$ for menor que 0;
- O ponto de equilíbrio x^* é instável se a parte real de um ou mais dos autovalores de $J(x^*)$ for maior que 0;
- Se um autovalor tiver parte real nula, então não se pode inferir nada sobre a estabilidade, pois as derivadas de alta ordem desconsideradas na linearização podem resultar em um comportamento completamente diferente para o ponto de equilíbrio do sistema não linear em comparação com o linearizado.

Em suma, os autovalores podem revelar informações importantes sobre a estabilidade e o comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos. Através do cálculo dos autovalores e autovetores da matriz A , a resposta do sistema nessas condições pode ser caracterizada. Além disso, a estabilidade de um ponto de equilíbrio ou ponto de operação específico pode ser estudada.

O Teorema de Hartman-Grobman é um resultado importante na teoria dos sistemas dinâmicos com foco principal nas trajetórias do sistema dinâmico, na qual estabelece uma conexão entre a estabilidade de um ponto de equilíbrio em um sistema dinâmico não linear e a estabilidade de seu equivalente linearizado próximo a esse ponto. Em termos simples, o teorema afirma que, sob certas condições, o comportamento qualitativo próximo a um ponto de equilíbrio em um sistema dinâmico não linear é essencialmente o mesmo que o comportamento de seu equivalente linearizado próximo a esse ponto. Mais precisamente:

- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é assintoticamente estável, então seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também é assintoticamente estável;
- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é instável, então seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também é instável;
- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é marginalmente estável, isso implica que seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também exibe a mesma característica de margem de estabilidade. Em suma, um ponto de equilíbrio é considerado marginalmente estável quando as trajetórias próximas a ele permanecem próximas ao longo do tempo, sem convergir nem divergir. Este estado indica que pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio resultam em movimentos oscilatórios ou periódicos.

A seguir, a análise de estabilidade para o sistema SMIB é apresentada.

5.1.1 Aplicação do Primeiro Método de Lyapunov ao SMIB

Dada a (5), de *swing*, sua linearização é realizada escrevendo o sistema de equações diferenciais linearizado em torno dos pontos de equilíbrio. Assim, a matriz Jacobiana do sistema linearizado é dada por:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} \\
 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} \\
 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{P_m - P_e \sin(x_1) - Dx_2}{M} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} \\
 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{P_m - P_e \sin(x_1) - Dx_2}{M} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \Delta x \tag{41}$$

em que x_1^* é o valor de x_1 nos pontos de equilíbrio, ie, δ^s e δ^u mostrados na Figura 2. Note que a primeira derivada de $\dot{x}_1$ em relação a x_1 é zero porque $\dot{x}_1$ não depende diretamente de x_1 .

Com isso, através da (20) obtém-se então a equação característica associada à análise espectral do SMIB expressa por:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} & -\frac{D}{M} - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \frac{D}{M}\lambda + \frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} = 0. \tag{42}$$

Portanto, para determinar a estabilidade do sistema é preciso calcular os autovalores da matriz $J(x^*)$ e verificar suas propriedades conforme descrito anteriormente. Para isso, resolvendo-se a equação quadrática (42) obtêm-se as seguintes soluções:

$$\lambda = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4MP_e \cos(x_1^*)}}{2M}. \tag{43}$$

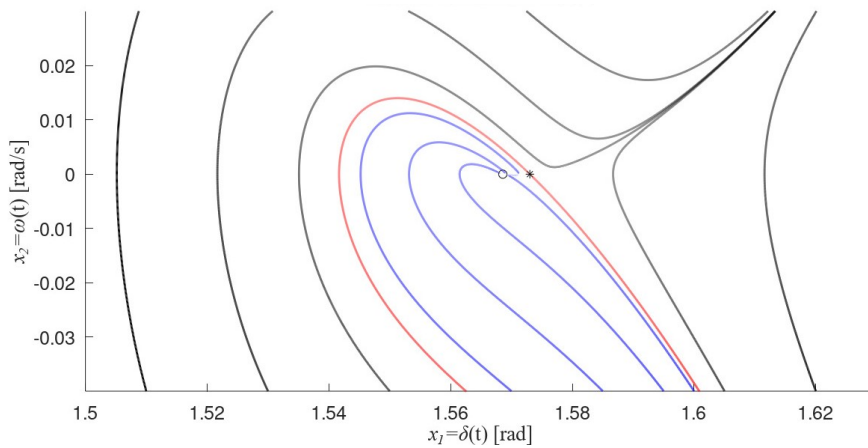
Uma vez que a constante de amortecimento viscoso, D , é sempre positiva, pode-se concluir a análise de estabilidade do sistema SMIB com base no discriminante $\Delta = D^2 - 4M(P_e \cos(x_1^*))$. Para isso, é necessário calcular explicitamente os autovalores usando a (43), em seguida, analisar seus sinais.

Da Figura 2 pode-se ver que $\cos(x^*) > 0$ para $x^* = [\delta^s, 0]$ e $\cos(x^*) < 0$ para $x^* = [\delta^u, 0]$. Além disso, os valores típicos de D , H (constante de inércia tipicamente fornecida pelos fabricantes e da qual se calcula M) e P_e implicam que P_e e H têm a mesma ordem de grandeza, com P_e em geral valendo de 25 a 100% de H , sendo $M = H/(60\pi)$, enquanto D tem valores típicos de 1 a 5% de P_e e $P_m < P_e$. Normalmente $\Delta > 0$ quando $\cos(x^*) < 0$, o que resulta em duas raízes reais de sinal trocado, ou seja, o ponto de equilíbrio $[\delta^u, 0]$ é uma sela, portanto instável. E $\Delta < 0$ quando $\cos(x^*) > 0$, o que resulta em raízes complexas conjugadas cuja taxa de decaimento é dada por $-D/(2M)$, ou seja, o ponto de equilíbrio $[\delta^s, 0]$ é um foco estável, isso confirma de modo rigoroso a análise empírica feita para o SMIB, na seção 3. Considerando variações na configuração do sistema, temos vários modos de operação: i) quando $P_m > P_e$ não existem pontos de equilíbrio para o sistema. Esse resultado ilustra uma característica específica dos sistemas dinâmicos não lineares, destacada anteriormente no texto; ii) quando $P_m = P_e$ então ocorre uma fusão entre os pontos de equilíbrio, ie, $[\delta^s, 0] = [\delta^u, 0] = [\pi/2, 0]$ e $\cos(x^*) = 0$, que implica que os autovalores da matriz jacobiana se tornam 0 e $-D/M$, cuja estabilidade não pode ser determinada apenas analisando a

Jacobiana do sistema linearizado. Essa fusão, melhor conhecida na literatura como bifurcação, é uma característica comum em sistemas dinâmicos não lineares e resalta a complexidade da análise de estabilidade nesses casos. Note que na iminência da fusão $D^2 > |4MP_e \cos(x^*)|$ o que implica que o foco estável se converte num nó estável enquanto a sela permanece uma sela, mas ambos com dinâmicas rápidas e lentas similares às de um sistema singularmente perturbado. Desse modo, a bifurcação que ocorre é do tipo sela-nó [10].

A Figura 16 ilustra a transição de um foco estável para um nó estável, sob a condição $D^2 > |4MP_e \cos(x^*)|$. Com isso é possível observar o comportamento local característico de dinâmicas rápidas e lentas típicas de um sistema singularmente perturbado.

Figura 16: Órbitas do SMIB na iminência da bifurcação.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

5.2 Segundo Método de Lyapunov

O Segundo Método de Lyapunov, também conhecido como Método Direto de Lyapunov, é uma técnica poderosa na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos que não requer a resolução explícita das equações diferenciais que descrevem o sistema nem a linearização. Inspirado no conceito físico de energia em sistemas dissipativos, determina a estabilidade através do comportamento de uma função escalar chamada função de Lyapunov. Também permite fazer uma estimativa, mesmo que conservadora, da área de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, o que é uma vantagem considerável em relação ao Primeiro Método.

Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável definida em um domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém o ponto de equilíbrio de interesse. A derivada de V ao longo das trajetórias de (4), denotada por $\dot{V}(x)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (44)$$

Note que $\dot{V}$ não depende explicitamente de t , portanto sua derivada em relação à t decorre da

variação de seu valor calculado ao longo das trajetórias do sistema. Sendo então a derivada de V ao longo das trajetórias de um sistema dependente do campo vetorial e do gradiente de V . Se $\phi(t, t_0, x_0)$ é a solução de (4), a qual considera o estado inicial x_0 no tempo $t = 0$, então:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\phi(t, t_0, x_0)). \quad (45)$$

Portanto, se $\dot{V}(x)$ for negativo para todo t então o valor escalar V irá diminuir ao longo das trajetórias de (4), eventualmente tendendo a um valor constante.

Definição 5.3 - Estabilidade de Lyapunov: Seja x^* um ponto de equilíbrio para (4) e $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo x^* . Suponha também que seja possível encontrar uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, tal que:

$$\begin{aligned} V(x^*) = 0 \quad e \quad V(x) > 0 \quad em \quad U - \{x^*\} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \quad em \quad U \end{aligned} \quad (46)$$

Então, x^* é estável. Além disso, se:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad em \quad U - \{x^*\} \quad (47)$$

então x^* é assintoticamente estável. ■

Quando x^* é assintoticamente estável, frequentemente se está interessado em determinar quão longe da origem a trajetória pode estar e ainda convergir para a origem conforme t se aproxima do infinito, caracterizando assim a busca pela área de atração. Porém, encontrar a região de atração exata de forma analítica pode ser difícil ou até impossível. Entretanto, funções de Lyapunov podem ser usadas para fazer estimativas conservadoras da região de atração, ou seja, para encontrar conjuntos contidos na região de atração.

A busca por funções de Lyapunov pode ser um processo pouco sistemático. Em alguns casos, existem candidatos naturais, como funções de energia em sistemas elétricos ou mecânicos. Em outros casos, é uma questão de tentativa e erro. Assim, a falha de uma candidata à função de Lyapunov em satisfazer as condições para estabilidade ou estabilidade assintótica não significa que o equilíbrio não seja estável ou assintoticamente estável, significa apenas que tal propriedade de estabilidade não pode ser estabelecida usando essa candidata à função de Lyapunov.

5.2.1 Aplicação do Segundo Método de Lyapunov ao sistema SMIB

Para aplicar o segundo método de Lyapunov ao problema de estabilidade transitória do SMIB, representado pela equação de *swing*, necessita-se propor a função de Lyapunov adequada e verificar sua derivada ao longo das trajetórias do sistema.

Lembrando que $\delta = \omega$, uma candidata natural à função de Lyapunov é a energia total, ou seja a soma da energia cinética ($0,5M\omega^2$) e energia potencial ($-P_e[\cos(\delta) - \cos(\delta_{pf}^s)] - P_m(\delta - \delta_{pf}^s)$):

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2}M\omega^2 - P_e[\cos(\delta) - \cos(\delta_{pf}^s)] - P_m(\delta - \delta_{pf}^s). \quad (48)$$

Então pode-se verificar a estabilidade calculando a derivada de V ao longo das trajetórias do sistema, sendo:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \delta} \dot{\delta} + \frac{\partial V}{\partial \omega} \dot{\omega} = (P_e \sin(\delta) - P_m) \dot{\delta} + (M\omega) \dot{\omega} \quad (49)$$

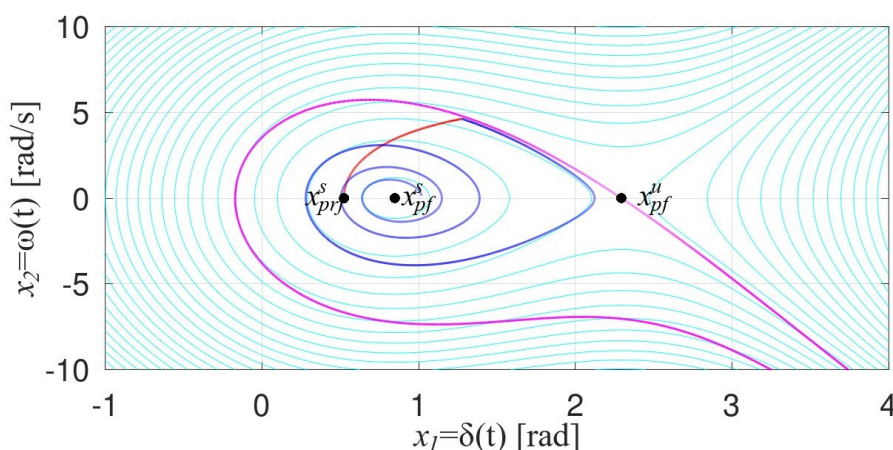
Substituindo $\dot{\delta}$ e $\dot{\omega}$ nas equações:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (P_e \sin(\delta) - P_m)\omega + M\omega \left(\frac{P_m - P_e \sin(\delta) - D\omega}{M} \right) \\ &= (P_e \sin(\delta) - P_m)\omega + \omega(P_m - P_e \sin(\delta) - D\omega). \\ &= -D\omega^2\end{aligned}\quad (50)$$

Portanto, uma vez que a constante de amortecimento D é positiva, a derivada temporal da função de Lyapunov é estritamente não positiva em todo o $\mathbb{R}^2$, de modo que ao longo de qualquer trajetória do sistema SMIB a energia total estará diminuindo ou permanecerá constante. Deve-se notar que isso não implica que todos os pontos de equilíbrio são estáveis, pois nos pontos de sela $[\delta_{prf}^u / -2k\pi, 0]$ a função de Lyapunov não é definida positiva, mesmo com a adição de uma constante conveniente para que $V(x)$ nestes pontos seja nula. Porém, nos pontos de equilíbrio estáveis, $[\delta_{prf}^s / -2k\pi, 0]$, as condições do Segundo Método de Lyapunov são satisfeitas qualificando tais pontos como estáveis, embora sem poder afirmar que são assintoticamente estáveis. Aparentemente tem-se então um resultado pior que o fornecido pelo Primeiro Método, que permitia afirmar a estabilidade assintótica.

A Figura 17 é uma atualização da Figura 7 com o acréscimo das curvas de nível da função de Lyapunov da (48). Pode-se notar também a curva de nível da função de Lyapunov que passa por $[\delta_{prf}^u, 0]$, ie, $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $V(x) = V([\delta_{prf}^u, 0])$.

Figura 17: Curvas de níveis e órbitas do SMIB.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

No segundo método de Lyapunov, idealmente, é esperado que a derivada temporal da função de Lyapunov $V(x)$ seja estritamente negativa ($\dot{V} < 0$) para garantir que o sistema seja assintoticamente estável. No entanto, em muitos casos, pode acontecer que $\dot{V} \leq 0$ (ou seja, a derivada é não positiva, mas não estritamente negativa em toda parte). Nesse caso, o método de Lyapunov sozinho pode não ser suficiente para concluir sobre a estabilidade assintótica daquele ponto de equilíbrio. Assim, o Princípio da Invariância de LaSalle é uma extensão do segundo método de Lyapunov que permite, entre outras coisas, analisar a estabilidade assintótica de sistemas dinâmicos, especialmente quando a derivada da função de Lyapunov não é estritamente negativa definida.

Definição 5.4 - Princípio da Invariância de LaSalle: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto (limitado e fechado) que é positivamente invariante com respeito ao sistema dinâmico da (4). Seja $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ em Ω . Seja E o conjunto de todos os

pontos em Ω onde $\dot{V}(x) = 0$. Seja M o maior conjunto invariante em E . Então, toda solução que começa em Ω se aproxima de M conforme $t \rightarrow \infty$. ■

Note que não é necessário que a função $V(x)$ seja definida positiva. Aplicando este resultado ao sistema SMIB verifica-se que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e uma $\dot{V} = 0$ em todo o eixo $\omega = 0$ então o Princípio de Invariância de LaSalle estabelece que todas as trajetórias do sistema permanecem ou tendem para o maior conjunto invariante neste eixo. Note que o Princípio de Invariância aplica-se a conjuntos compactos positivamente invariantes Ω , então no caso do sistema SMIB pode-se escolher tais conjuntos arbitrariamente grandes contendo parcelas arbitrariamente grandes do eixo $\omega = 0$, bem como de pontos de equilíbrios estáveis e instáveis. Porém, o maior conjunto invariante é a união de todos os finitos pontos de equilíbrio instáveis e estáveis sobre este eixo. Isso implica que as trajetórias permanecem em qualquer dos pontos de equilíbrio ou tendem para os pontos de equilíbrio estáveis, isso pouco acrescenta ao que já se sabia. Entretanto, considerando uma componente conexa e compacta das regiões delimitadas pelas curvas de nível de $V(x)$, ie, $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$, contendo apenas um único ponto de equilíbrio de interesse, então podemos concluir que este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Para o caso do sistema SMIB, qualquer parte conexa das curvas de nível $\Omega_c(c \leq V([\delta_{prf}^u, 0]))$ permite classificar o ponto de equilíbrio $[\delta_{prf}^s, 0]$ como assintoticamente estável, pois para $D > 0$ todas as trajetórias iniciadas neste conjunto tendem ao maior conjunto invariante no seu interior que neste caso consiste apenas de $[\delta_{prf}^s, 0]$. Além disso, a parte conexa da região interna à maior curva de nível de $V(x)$ contendo x_{prf}^s , representado pela curva de cor preta na Figura 17, representa a fronteira de um estimativa, ainda que conservadora, da área de atração deste ponto. Isso é um ganho substancial de informações em relação ao Primeiro Método de Lyapunov. Note também a importância que o conjunto seja positivamente invariante, pois uma bola centrada no ponto $[\delta_{prf}^u, 0]$ contendo apenas este ponto de equilíbrio não garante que este ponto de equilíbrio instável seja assintoticamente estável, pois este conjunto não é positivamente invariante.

A busca por funções de Lyapunov, a identificação das curvas de nível compondo conjuntos conexos, compactos e invariantes, a identificação do momento em que as trajetórias de um sistema dinâmico abandonam este conjunto invariante ou a própria área de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse, são todos problemas ainda relevantes para a maioria das aplicações práticas. A discussão mais aprofundada sobre estas questões poderá ser feita em trabalhos posteriores.

6 Conclusão

A compreensão da estabilidade dos pontos de equilíbrio é fundamental para desvendar o comportamento dinâmico dos sistemas, sendo abordada neste trabalho com o intuito de incorporar os conceitos mais relevantes dos métodos de Lyapunov para sistemas dinâmicos.

Esses conceitos foram aplicados no trabalho realizado em [5], com o objetivo de aprofundar a compreensão do estudo de [11]. Em [4], foi realizada uma análise empírica mais simplificada dos sistemas dinâmicos utilizando o sistema SMIB como um modelo matemático motivador inserido nestes. Destaca-se, sobretudo, o diferencial deste trabalho, que consiste na imposição de condições de estabilidade para grandes perturbações na análise do ponto de equilíbrio, de interesse para o Primeiro e Segundo Métodos de Lyapunov e à aplicação do Princípio da Invariância de LaSalle, inclusive para gerar uma estimativa da área de atração. Os resultados numéricos foram obtidos através de uma implementação em MATLAB. Devido ao caso abordado ser bidimensional foi possível visualizar geometricamente esses conceitos ilustrando-os através do seu retrato de fase e de

sua área de atração.

Realizou-se, também, a análise do SMIB por meio do segundo método de Lyapunov, o qual permitiu determinar que a derivada temporal da função de Lyapunov, dependendo do sistema, pode variar e ser de difícil determinação. No caso estudado, foi possível determinar que a derivada desta função é não positiva, mas não estritamente negativa, o que implica que este método, por si só, pode não ser suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema. Com a aplicação do Princípio da Invariância de LaSalle, foi possível expandir essa análise e concluir que, mesmo quando a derivada desta função se anula em um conjunto de pontos, o sistema pode ainda ser assintoticamente estável. Especificamente, foi mostrado que as trajetórias do sistema tendem para o maior conjunto invariante e que, ao considerar a parte conexa da região interna à maior curva de nível da função de Lyapunov do sistema SMIB, contendo o ponto de equilíbrio estável, é possível afirmar que este ponto é de fato assintoticamente estável. Com as interpretações geométricas desenvolvidas, foi possível estimar a região de atração do ponto de equilíbrio oferecendo informações substanciais que não seriam obtidas pelo Primeiro Método de Lyapunov. Foi possível observar também, que as trajetórias tendem ao ponto de equilíbrio estável ao longo do tempo, garantindo a estabilidade assintótica do sistema.

Em trabalhos futuros poderão ser analisados outros aspectos dos sistemas dinâmicos, como bifurcações de Hopf ou mesmo trajetórias caóticas, provavelmente exigindo diferentes modelos matemáticos para a simulação do sistema SMIB, tendo em vista que o modelo analisado neste trabalho possui somente a dinâmica mecânica do gerador. Além destes, os resultados desenvolvidos neste trabalho podem ser utilizados para todas as análises e interpretações feitas ao método baseado em sistemas dinâmicos, apresentado em [5], para aplicação ao problema de despacho termoeólico multimodal, de interesse da área de sistemas de energia em engenharia elétrica.

Referências

- [1] KUNDUR, P. *et al.* Definition and classification of power system stability. **IEEE Transactions on Power Systems**, New York, v. 19, n. 2, p. 1387–1401, 2004.
- [2] BIALEK, J. W.; MACHOWSKI, J.; BUMBY, J. R. **Power system dynamics: stability and control**. 2. ed. Reino Unido: John Wiley & Sons, 2008.
- [3] CHIANG, H. D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, New York, v. 35, n. 6, p. 712–728, 1988.
- [4] MASSAMBANI, N. *et al.* Caracterização de pontos de equilíbrio e análise de estabilidade do sistema com um barramento infinito. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2024. p. 79–85.
- [5] MASSAMBANI, N. **Investigação de múltiplos pontos de ótimo do Problema de Despacho Econômico com efeito dos pontos de carregamento de válvula através de um método baseado em Sistemas Dinâmicos**. 2024. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2024.

-
- [6] KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3. ed. Estados Unidos: Michigan State University, 2002.
- [7] KUNDUR, P. **Power system stability and control**. Estados Unidos: Electric Power Research Institute, Inc, 1994.
- [8] CHIANG, H. D. **Direct methods for stability analysis of Electric Power Systems**: theoretical foundation, BCU methodologies and applications. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2011.
- [9] ZUBOV, V. I. **Methods of A. M. Lyapunov and their application**. [S. l.]: United States Atomic Energy Commission, 1957.
- [10] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. New York: Springer, 1983.
- [11] CHIANG, H. D.; CHU, C. C. A systematic search method for obtaining multiple local optimal solutions of nonlinear programming problems. **IEEE Transactions on circuits and systems I: fundamental theory and applications**, New York, v. 43, n. 2, p. 467–474, fev. 1993.