

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 25, 2025
Edição Ermac

Cleber Aparecido de Almeida

Rede Sesi de Ensino do Estado de
São Paulo, Barretos

Wladimir Seixas

Universidade Federal de São Car-
los (Ufscar), São Carlos, sei-
xas@ufscar.br

Funções quadráticas na sala de aula: uma proposta de ensino através da modelagem matemática

Quadratic functions in the classroom: a teaching proposal
through mathematical modeling

Resumo

Propomos uma abordagem didática para o ensino de funções quadráticas através da modelagem matemática. A proposta parte de um problema o qual solicita determinar um dos lados de um retângulo em função da altura de um trapézio formado dentro de um triângulo, sob a condição de que as áreas das regiões formadas sejam iguais. Mais ainda, o triângulo e o retângulo devem ter as mesmas áreas totais e alturas. Exploramos essa situação-problema por meio de um experimento de transferência de líquidos por gravidade entre reservatórios de forma triangular e retangular, permitindo aos estudantes manipular, investigar e validar conceitos matemáticos. O uso de ferramentas como planilhas eletrônicas e simulações no GeoGebra proporcionou um ambiente dinâmico de aprendizagem, favorecendo a compreensão das propriedades da função quadrática. A proposta foi implementada com uma turma de 1º ano do ensino médio, seguida pela análise dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Ensino. Modelagem Matemática e Aplicações. Ensino de funções quadráticas.

Abstract

We propose a didactic approach to teaching quadratic functions through mathematical modeling. The proposal is based on a problem that requires determining one side of a rectangle as a function of the height of a trapezoid formed within a triangle, under the condition that the areas of the regions formed are equal. Additionally, the triangle and the rectangle must have the same total areas and heights. We explored this problem situation through an experiment involving the transfer of liquids by gravity between triangular and rectangular reservoirs, allowing students to manipulate, investigate, and validate mathematical concepts. The use of tools such as spreadsheets and GeoGebra simulations provided a dynamic learning environment, enhancing the understanding of the properties of quadratic functions. The proposal was implemented with a first-year high school class, followed by an analysis of the results obtained.

Keywords: Teaching. Mathematical Modeling and Applications. Teaching quadratic functions.



1 Introdução

Em geral, com base na nossa experiência profissional, o estudo de funções quadráticas no ensino médio não é um tema de fácil compreensão para os estudantes, sendo frequentemente abordado apenas de maneira teórica, o que o torna distante e pouco acessível para eles.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) estabelece, no ensino médio, para a área de Matemática e suas Tecnologias, que os estudantes devem consolidar os conhecimentos adquiridos na etapa anterior e agregar novos, ampliando suas habilidades para resolver problemas mais complexos e que exijam maior reflexão e abstração. Também espera-se que os estudantes construam uma visão mais ampla da Matemática, relacionando-a com outras áreas do conhecimento e aplicando-a de maneira prática à realidade. Além das competências gerais previstas, a BNCC propõe competências específicas e habilidades relacionadas à Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental.

Para cada uma das competências são mobilizadas habilidades específicas. No caso do ensino de função quadrática, destacamos a competência:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 531),

evocando a habilidade específica (EM13MAT302) descrita como: “Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º e 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018, p. 536). Observa-se que ambas, competência e habilidade aqui descritas, colocam o estudante num papel ativo dentro do processo de aprendizagem. Busca-se assim por metodologias de ensino aprendizagem que sejam eficientes, preferencialmente de baixo custo, fácil implementação e monitoramento dentro do tempo alocado para o tema.

Em outra direção, o Banco de Questões da OBMEP¹ destaca-se como uma fonte de problemas matemáticos. Ao buscarmos por questões desafiadoras sobre o tema de funções quadráticas, encontramos na edição de 2012, um problema envolvendo a altura do trapézio formado dentro de um triângulo quando traçada uma linha paralela à sua base e a altura de um retângulo obedecendo algumas condições. Isso nos levou a vislumbrar a possibilidade de reproduzir e explorar tal situação em uma abordagem diferente elaborando para tal um experimento real onde o estudante poderia manusear, investigar e validar conceitos matemáticos.

A apresentação dessa proposta didática, partindo desde sua concepção, construção do experimento e uma breve descrição das folhas de atividades já foram comunicadas no VII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional realizado na Unesp, câmpus de Bauru durante o período de 21 a 24 de maio de 2024 (Almeida; Seixas, 2024).

Neste trabalho, iremos não apenas detalhar as atividades, mas também apresentar a análise dos resultados referentes à implementação das atividades propostas por Almeida e Seixas (2024), concluindo assim toda a pesquisa relacionada à proposta didática. Apresentaremos, de forma breve, a concepção e a montagem do experimento, destacando as atividades e detalhando todas as etapas da investigação matemática. Nosso objetivo é mostrar como conduzimos os estudantes ao longo do processo de investigação, coleta de dados, formulação de conjecturas, e representação gráfica e algébrica do comportamento das grandezas. Apresentaremos também uma análise qualitativa das

¹<http://www.obmep.org.br/banco.htm>

observações e percepções no desenvolvimento de cada atividade e também alguns dos registros produzidos pelos estudantes nas folhas de atividades e planilha eletrônica.

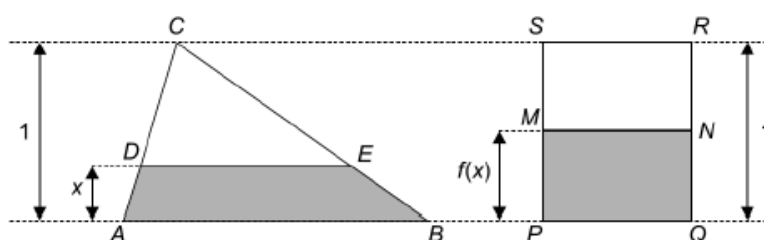
Por fim, nas considerações finais, faremos algumas reflexões sobre o processo do trabalho, destacando os pontos positivos da proposta e oferecendo sugestões para sua ampliação e adaptação para implementação em sala de aula. O objetivo é contribuir não apenas para a melhoria da aprendizagem dos nossos estudantes, mas também para a troca de experiências entre os docentes.

2 Concepção da proposta didática

A fazermos uma pesquisa sobre questões envolvendo funções quadráticas no banco de questões da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas do ano de 2012, encontramos o problema intitulado “Mesma área” como mostra a Figura 1.

29 Mesma área

Na figura abaixo, o triângulo ABC e o retângulo $PQRS$ têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio $ABED$ de altura x e depois o retângulo $PQNM$ de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo $PQNM$.



- Qual é a razão entre AB e PQ ?
- Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?
- Ache a expressão de $f(x)$ e desenhe o gráfico de f .

Figura 1: Questão da OBMEP motivadora para o experimento

Fonte: Banco de Questões OBMEP 2012, página 52 (www.obmep.org.br/banco.htm).

Este é um problema do Nível 3 (Ensino Médio) onde são colocados um triângulo e um retângulo de mesma área e ambos com altura unitária. O enunciado também diz que, para cada valor x entre 0 e 1, determina-se no triângulo ABC um trapézio $ABED$ de altura x . No quadrilátero $PQRS$ (lado direito da Figura 1) constrói-se o retângulo $PQNM$ com área igual ao do trapézio $ABED$ de forma que a altura do retângulo $PQNM$ seja uma função f da variável x , ou seja, determina-se uma função que irá relacionar a altura x do trapézio com a altura $f(x)$ do retângulo correspondente.

Identificamos que o problema ilustrado na Figura 1 é de geometria plana. No entanto, consideramos representá-lo concretamente em três dimensões por meio de um experimento, concebendo as figuras como reservatórios comunicantes, onde a água pode fluir de um para o outro. Antes de iniciar a construção, realizamos uma simulação dinâmica do problema com o software de geometria dinâmica GeoGebra.

A seguir faremos uma descrição detalhada dos passos para a construção do simulador do experimento a ser modelado. Seguem os passos da sua construção (Almeida, 2023).

2.1 Construção do triângulo (reservatório 1 no experimento)

- Em uma página em branco (ocultar eixos e malha da janela de visualização), construa a reta f (por uma questão didática, aconselha-se construí-la na posição horizontal).
- Trace a reta g paralela (não coincidente) à reta f ;
- Sobre a reta f , marcamos os pontos A e B e, sobre a reta g marcamos o ponto C (Provavelmente, esses pontos já foram criados por padrão do software quando traçadas as retas f e g);
- Construa o triângulo t_1 com vértices em A , B e C utilizando a ferramenta polígono (clique com o botão direito do mouse sobre o triângulo t_1 , vá em propriedades, cor e, deslize o cursor para Transparência 0);
- Trace a reta i perpendicular a reta g passando por C ;
- Marque o ponto H , intersecção entre as retas f e i ;
- Sobre a reta i , construa o segmento HC ;
- Sobre o segmento HC marque o ponto I (Ferramenta: ponto em Objeto);
- Trace a reta h paralela (não coincidente) à reta f passando por I .
- Marque os pontos E e F , intersecções com os lados AC e BC , respectivamente.
- Construa o Triângulo t_2 com vértices em C , E e F (Para uma melhor ilustração do experimento, coloque a cor azul para o polígono t_2).
- Construa o trapézio q_1 com vértices em A , B , E e F (Como no triângulo t_1 , deixa a transparência zero).
- Construa o segmento HI (Observe que a medida do segmento HI corresponde à altura do trapézio q_1).

2.2 Construção do retângulo (reservatório 2 no experimento)

Nas condições do problema, as alturas do triângulo e do retângulo devem ser iguais e a razão entre suas bases deve ser $\frac{1}{2}$. Assim, o retângulo terá como reta suporte da base e o lado oposto, as retas g e f da construção anterior, respectivamente.

- Sobre a reta g , marque o ponto J (Ferramenta: ponto em Objeto);

Para garantir a razão entre as bases do triângulo ABC e do retângulo a ser definido, faça o seguinte:

- Marque o ponto médio K do segmento AB (Ferramenta: Ponto Médio ou Centro);
- Construa o segmento $KB = l$;
- Construa o círculo d , com centro em J e raio l (comprimento do segmento KB);
- Marque o ponto M , intersecção entre o círculo d e a reta g .
- Construa a reta m perpendicular a reta g passando por J ;
- Construa a reta n perpendicular a reta g passando por M ;
- Marque os pontos N e O , intersecções da reta f com as retas n e m , respectivamente;

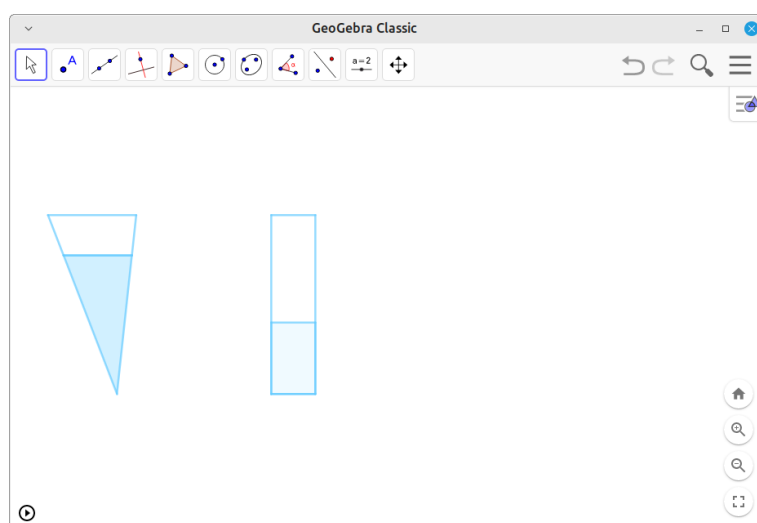


Figura 3: Simulação com elementos e rótulos ocultos.

Iniciamos a simulação, clicando na tecla *play* localizada no canto inferior esquerdo da janela de visualização.

De acordo com essa adaptação do problema da Figura 1, se x representa a altura do trapézio (parte vazia do reservatório 1), a altura do retângulo formado pelo líquido no reservatório 2 será $f(x)$. Na resolução apresentada, f será uma função quadrática. Para ilustrar essa afirmação, analisamos o comportamento dos pontos de coordenadas $(x, f(x))$. Neste sentido,

- Para criar um ponto S , no campo de entrada digite $S = (HI, JP)$;
- Com o botão da direita, clique sobre o ponto S . Depois em configurações em avançado. Desmarque a opção “Janela de Visualização” e marque a opção “Janela de Visualização 2”;
- Agora clique em “Exibir” e selecione a opção “Janela de Visualização 2”;
- Na “Janela de Visualização 2”, clique com o botão direito sobre o ponto S e selecione a opção “Habilitar Rastro”.

O resultado do procedimento descrito anteriormente é mostrado na Figura 4.

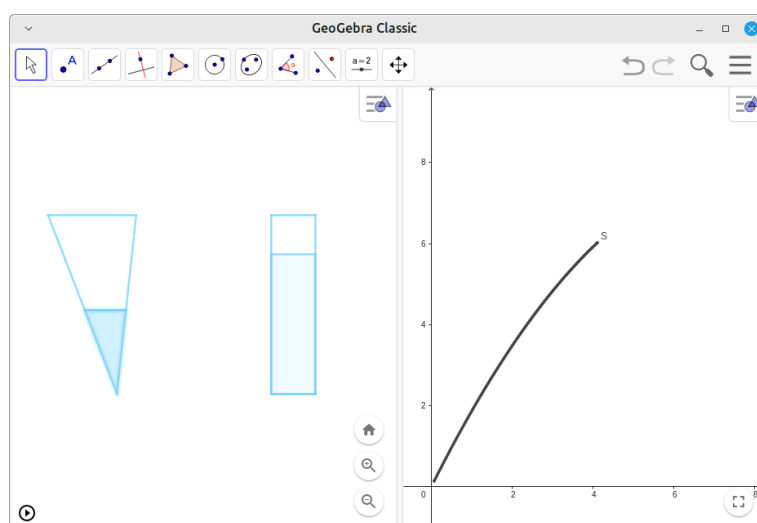


Figura 4: Simulação com o ponto S na “Janela de Visualização 2”.

3 Construção do experimento

Para materializar a questão da OBMEP foi utilizado vidro comum e as estruturas ficaram bem-acabadas assemelhando-se a aquários. Além de baixo custo, podem ser confeccionados em casas especializadas do ramo. Impondo as condições do problema, a razão entre a base do retângulo e do triângulo deve ser de $\frac{1}{2}$. Optamos por construir triângulos retângulos para as bases do prisma, confeccionados com medidas de 20 cm de base e altura 25cm. As faces laterais retangulares foram construídas todas com 5 cm de largura. Essa etapa da confecção é mostrada na Figura 5

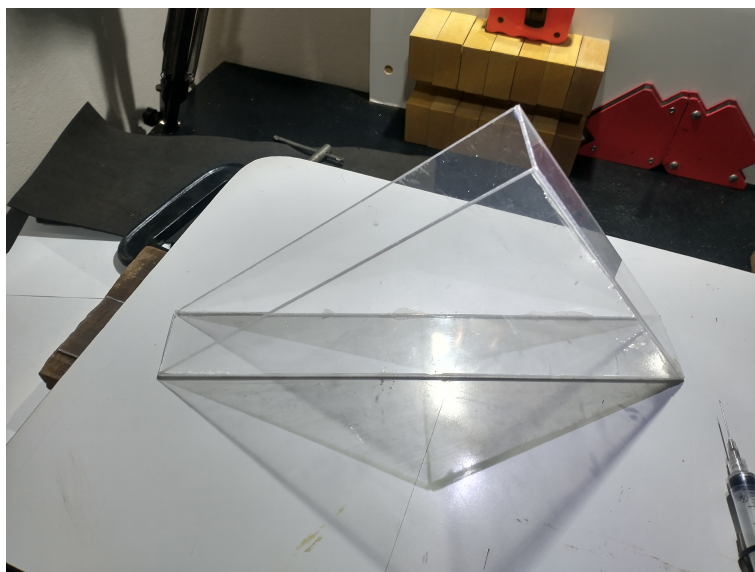


Figura 5: Construção do reservatório 1.

As dimensões das faces do prisma quadrangular foram 10 cm de base e 25 cm de altura, fixando as faces laterais com 5 cm de largura como mostra a Figura 6.



Figura 6: Construção do reservatório 2.

O líquido é transferido de um reservatório para outro através de uma mangueira com regulador, as mesmas utilizadas em sondas de alimentação e adquiridas em lojas de materiais cirúrgicos. Para o suporte do reservatório utilizou-se uma placa de madeira MDF com dimensões 45 cm por 50 cm. Para melhorar a precisão do experimento utilizou-se pés com quatro pontos de apoio de forma que a base pudesse ser ajustada e foram utilizadas cantoneiras de metal para a sustentação do reservatório. Para uma melhor visualização do nível do líquido, utilizamos água com corante azul para a produção de um bom contraste, uma vez que, o fundo é de cor branca. A medição da altura do líquido foi feita utilizando réguas de 30 cm de material plástico transparente, posicionadas e fixadas da melhor maneira visando uma coleta de dados mais precisa. O experimento final montado é mostrado na Figura 7.

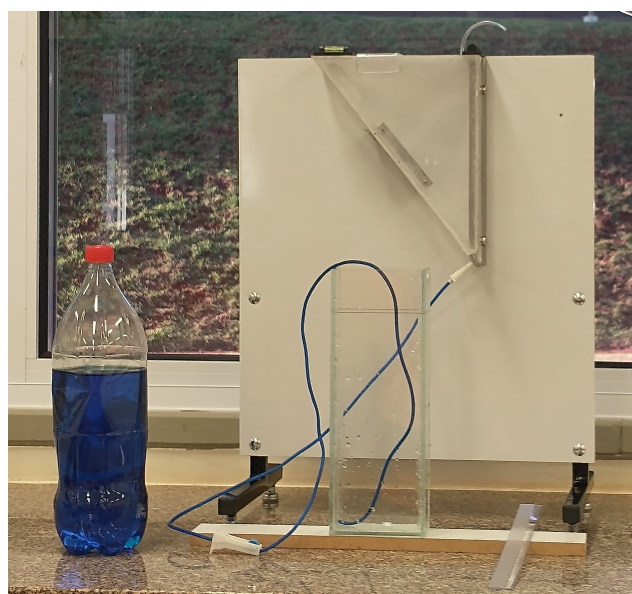


Figura 7: Experimento montado.

4 Proposta didática

A concepção da nossa proposta didática fará uso da Modelagem Matemática. Acreditamos que a metodologia pode ser aplicada dentro da própria matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem. Uma vez que, segundo Bassanezi (2002, p.18),

”O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.”

Bassanezi (2002) apresenta cinco etapas chamadas de atividades intelectuais da Modelagem Matemática descritas a seguir:

1ª etapa: Experimentação - Obtenção de dados por meio da análise ou simulação do problema real.

2ª etapa: Abstração - É o processo que encaminha à formulação do Modelo Matemático. Neste processo, ocorrem a seleção das variáveis, problematização, formulação de hipóteses ou conjecturas e simplificação.

3ª etapa: Resolução - Efetivamente a obtenção do modelo, ou seja, etapa na qual ocorre a troca da linguagem natural do problema por uma linguagem matemática coerente que pode responder o problema.

4ª etapa: Validação - Processo em que ocorre a aceitação ou rejeição do modelo matemático. Nessa etapa, o modelo deve ser testado em confronto aos dados obtidos na primeira etapa. Segundo Bassanezi (2002, p. 30), de forma simplificada, “Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas.

5ª etapa: Modificação - No caso de não validação do modelo por algum fator, retoma-se os dados iniciais e reinicia-se o processo. Ou ainda, consiste na melhoria ou criação de novos modelos a partir de dados mais precisos ou da complexidade do problema real.

A Modelagem Matemática é uma importante estratégia de ensino aprendizagem uma vez que faz com que o estudante vivencie a matemática à sua volta, em problemas do cotidiano ou dentro da própria matemática. Segundo Bassanezi (2002, p. 38),

A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

5 Descrição das atividades

As folhas de atividades foram divididas em quatro momentos e podem ser obtidas em Almeida (2023). Cada um desses momentos foi dimensionado para realização em uma janela de tempo de acordo com a disponibilidade dos ambientes e grade horária da escola. A seguir, detalhamos cada uma das folhas de atividades, descrevendo a metodologia, recursos e tempo necessário para a realização como já comunicado em Almeida e Seixas (2024).

5.1 Atividade 1 - descrição do experimento e coleta de dados

A primeira parte da atividade foi realizada em uma sala com disponibilidade de bancadas (no caso, Laboratório de Ciências Físicas) e foi prevista uma duração de duas horas/aula (100 minutos). A Folha de Atividades 1 foi dividida em duas etapas. Nesta etapa apresentamos aos estudantes a dinâmica do experimento fornecendo as instruções de manipulação do material para a transferência do líquido do reservatório 1 para o reservatório 2. Os estudantes devem identificar as figuras geométricas em questão: o trapézio retângulo formado pela parte vazia e o triângulo formado pela parte preenchida. O objetivo das questões é provocar o estudante a refletir sobre o volume de líquido. Realizadas as medições, os estudantes devem observar o fato dos reservatórios possuírem a mesma largura, mesma altura e que a medida da base do retângulo da face do reservatório 2 é metade da medida da base do triângulo formado na face do reservatório 1 quando este está cheio. Devem então concluir que as medidas das áreas (faces) do triângulo do reservatório 1 e do retângulo do reservatório

2 são iguais e, dessa forma, que os volumes dos dois prismas também serão os mesmos. Logo, o líquido transferido deve acomodar-se preenchendo o reservatório 2 sem transbordar. Neste momento, o estudante deve reconhecer que a parte vazia do reservatório 1 é exatamente a quantidade de líquido transferida para o reservatório 2. Para finalizar, é proposto aos estudantes que relacionem as alturas do nível do líquido nos dois reservatórios. Questionamos a possibilidade de, fixando a altura no reservatório 1, conseguirmos alturas diferentes no reservatório 2. O objetivo é que os estudantes estabeleçam a definição de função e que possam discutir a noção de domínio e contradomínio da função.

Na segunda etapa da Atividade 1, iniciamos a execução do experimento. Os estudantes são orientados a liberar o líquido do reservatório 1 para o reservatório 2 utilizando o dispositivo que controla o fluxo, abrindo e fechando conforme a necessidade.

5.2 Atividade 2 - analisando dados e construção do gráfico

A atividade é feita em quatro itens que visam analisar as informações obtidas quando da realização do experimento. A duração da atividade é de 50 minutos. Um ponto importante é verificar se os estudantes dominam a construção de gráficos no plano cartesiano e reconhecem que os pontos provavelmente irão descrever uma curva. Os estudantes são estimulados a encontrar um modelo matemático que represente o comportamento observado. Para evitar impressões incorretas de que os pontos estão alinhados segundo uma linha reta, é solicitado o cálculo da taxa de variação em pelo menos quatro intervalos do gráfico, aproveitando um conhecimento prévio dos estudantes sobre o comportamento da função afim.

5.3 Atividade 3 - planilha eletrônica

Nesta atividade, o estudante fará uso de uma planilha eletrônica para construção do gráfico de dispersão e verificar as conjecturas formuladas nas atividades anteriores. Essa atividade pode ser realizada utilizando qualquer aplicativo de planilha eletrônica (pago ou de domínio público). O tempo previsto é de 100 minutos. Supõe-se que o estudante não tenha dificuldade na construção do gráfico e no uso da planilha eletrônica. É dado ao estudante a possibilidade de realizar uma autoavaliação, podendo verificar se o gráfico produzido com o uso de papel e lápis foi construído corretamente na atividade anterior. O estudante deverá analisar a posição dos pontos para reconhecer o gráfico obtido com o de funções conhecidas, possibilitando concluir que a curva obtida é parte de uma parábola. Utilizamos os recursos da planilha eletrônica para encontrar um modelo de equação que melhor representa o experimento, utilizando a ferramenta "Adicionar Linha de Tendência". É importante ressaltar para o estudante de que o software está fazendo um ajuste da linha que representa a tendência (o melhor ajuste) da curva que passa pelos pontos no plano no intervalo considerado. O estudante deve concluir que a equação quadrática será a melhor curva que irá modelar os dados inseridos na planilha eletrônica confirmando ou não suas conjecturas formuladas anteriormente. Para refinar ainda mais o modelo, chamamos a atenção para o fato de que, nas condições iniciais do experimento, quando a altura no reservatório 1 é zero, a altura no reservatório 2 também é zero. Logo, o par ordenado $(0,0)$ pertence ao gráfico da função. Conclui-se daí que, a intersecção do gráfico com os eixos coordenados se dará no ponto de coordenadas $(0,0)$, ou seja, o gráfico passa pela origem do sistema. Orientamos os estudantes a marcar a opção "Definir Intersecção" inserindo o valor "0,0", obrigando assim o gráfico a atender as condições iniciais do experimento.

5.4 Atividade 4 - encontrando a equação matemática

Nesta atividade iremos determinar a equação matemática que representa a relação entre as alturas. Utilizaremos do formalismo matemático e das dimensões físicas do experimento realizado pelos estudantes. Para a resolução, foram necessários alguns conhecimentos prévios como: razão entre áreas e perímetros de figuras planas e simplificação de expressões algébricas. Isso é muito importante do ponto de vista pedagógico, uma vez que retoma conceitos antes da aplicação desta atividade. A atividade é realizada de maneira expositiva com o acompanhamento dos estudantes com o tempo de 50 minutos dentro do ambiente de sala de aula e com o uso de projetor multimídia e lousa.

Consideramos a medida $x = \overline{CD}$ da altura do trapézio $BDCE$ (Ver Figura 8a) e $f(x) = \overline{KF}$ a medida da altura do retângulo $FGJK$ (Ver Figura 8b). As dimensões das faces do prisma quadrangular foram 10 cm de base e 25 cm de altura, fixando as faces laterais com 5 cm de largura.

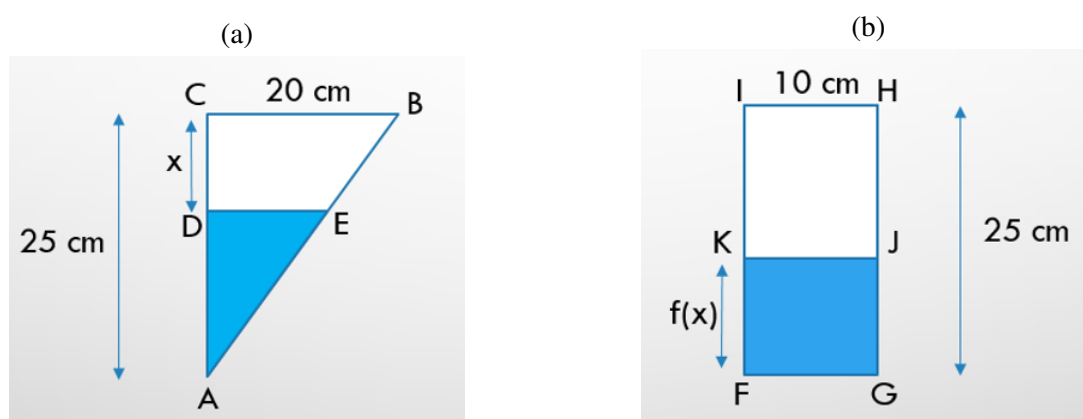


Figura 8: Dimensões físicas dos prismas.

Impondo a condição de ambas figuras possuírem mesma área, iremos concluir que $f(x) = 2x - \frac{1}{25}x^2$.

Em seguida, solicitamos aos estudantes que comparem a equação encontrada na planilha eletrônica com a equação $f(x) = 2x - \frac{1}{25}x^2$.

6 Aplicação e análise da proposta

A implementação da proposta pedagógica foi realizada com uma turma de 1º ano do ensino médio da escola da Rede SESI-SP na cidade de Barretos - SP. Utilizamos três ambientes da escola: Laboratório de Ciências Físicas, Laboratório de Informática Educacional e sala de aula para a realização das atividades.

Iniciamos a aplicação com uma roda de conversa em sala de aula onde explanamos um panorama geral da atividade que seria realizada, evidenciamos as expectativas de ensino e aprendizagem e explicamos o funcionamento do experimento. Foram formados grupos com os 30 estudantes presentes no dia. Dentro de cada grupo foram divididas as funções de realizar o controle do escoamento do líquido, medições e anotações além de um integrante para controlar o tempo de atividade atento à possíveis distrações do grupo.

6.1 Atividade 1 - o experimento

No início da atividade, dois grupos se dirigiram às estações de trabalho enquanto os demais observavam. Notou-se que uma atividade diferenciada pode alterar a postura e o comportamento dos estudantes, pois até aqueles que não estavam manipulando o experimento prestavam atenção e faziam conjecturas sobre o que observavam. Na questão 1, foram feitas perguntas sobre as formas e posições dos reservatórios, e alguns grupos deram respostas diretas, enquanto outros foram mais detalhistas, sugerindo que suas respostas foram influenciadas pela explicação prévia do experimento.

Nos itens 2 e 3, os estudantes mediram as dimensões dos reservatórios com uma régua graduada. Não foi dito se deveriam considerar as dimensões internas ou externas, o que levou a discussões sobre a diferença entre volume e capacidade, uma confusão comum entre os alunos.



Figura 9: Estudantes realizando as medições e registro na folha de atividades 1.

No item 3, os estudantes deveriam responder sobre o que ocorre com líquido quando é transferido completamente para o reservatório 2. Este era um ponto importante devido às estratégias adotadas pelos estudantes. Os grupos, de forma unânime, decidiram calcular os volumes dos dois reservatórios para compará-los. Em uma das resoluções, além de pequenos erros de medição, um grupo notou que havia realizado as medições de forma inconsistente, ora considerando as bordas, ora apenas o vão interno, mas não retornaram para corrigir as medições.

Ressaltamos que, dos seis grupos participantes da primeira etapa, três chegaram ao volume

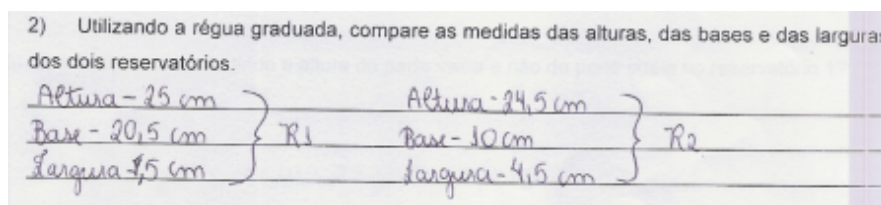


Figura 10: Resposta ao item 2 da folha de atividades 1 - erro nas medições

correto dos reservatórios, inclusive explicando a estratégia, explicitando os cálculos e evidenciando as observações com relação as medidas comuns dos dois reservatórios.

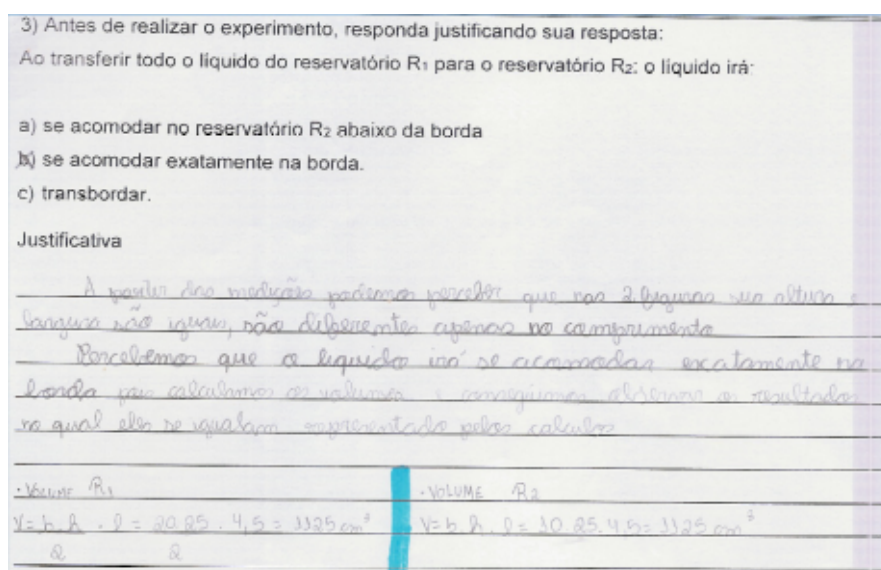


Figura 11: Resolução da questão 3 da folha de atividades 1

Como foram três respostas muito parecidas, pensamos na possibilidade da comunicação e compartilhamento entre os grupos. Em outra direção, os outros três grupos adotaram a estratégia correta. No entanto, utilizaram valores equivocados ou aproximações indevidas. Cabe ressaltar aqui a importância da natureza pedagógica de um experimento associado a Modelagem Matemática e é evidenciada na resposta de um dos grupos que, afirmou que o líquido irá se acomodar na borda justificando que a diferença entre os volumes é muito pequena, portanto desprezível.

Outra situação que merece destaque, é o fato de um dos grupos, mesmo que não apresentando a resposta esperada nem registrando os cálculos de volumes, afirmou que o volume do primeiro reservatório seria maior que o do segundo, fazendo menção a quantidade de líquido contido na mangueira de transferência.

Nos demais itens foi solicitado aos estudantes que posicionassem as réguas graduadas de forma a medir a altura do trapézio formado pela parte vazia na face do reservatório 1 e a altura do quadrilátero retângulo formado pela parte cheia na face do reservatório 2. Observamos que a maioria dos estudantes se preocupou em posicionar a régua da maneira mais precisa possível.

Concluindo a primeira etapa, abordamos o conhecimento mais formal dos estudantes sobre funções, definindo x como a altura do trapézio no reservatório 1 e y como a altura do retângulo no reservatório 2. Buscamos verificar se os estudantes reconheciam a relação de dependência entre

as grandezas, assim como os conjuntos de partida e chegada sob o ponto de vista da dinâmica do experimento.

Fizemos a socialização com toda a turma a respeito da tríade domínio, contradomínio e lei de formação. É importante observar que mesmo já tendo estudado as funções polinomiais, em particular a função afim, não estava claro para os estudantes. Alguns relataram que até entendiam a função de cada um desses elementos, mas não reconheciam pelo nome.

Encerramos a 1ª etapa com uma roda de conversa onde discutimos a possibilidade de, uma vez que definimos a existência de uma função que relaciona cada altura do trapézio com uma altura distinta no retângulo, determinar a lei de formação dessa função. Deixamos claro aos estudantes que as atividades seguintes seriam um caminho a ser percorrido para responder a essa questão.

6.2 Aplicação da 2ª etapa da folha de atividades 1 - tabela e construção do gráfico

Por uma questão didática, sugerimos aos estudantes a escolha de um espaçamento constante (por exemplo: 0,5 cm ou 1 cm) para a tomada das medidas das alturas no reservatório 1. Observamos que todos os grupos seguiram a orientação, em um dos casos, iniciaram com um espaçamento de 0,5 cm depois alternaram para 1 cm e por fim para 2 cm.

Altura do R ₁ (cm)	Altura do R ₂ (cm)
0,5	1
1	2,5
1,5	3,5
2	4,5
2,5	5,5
3	6,5
3,5	7,5
4	8,2
4,5	9
5	10
6	11,5
7	13
8	14,5
9	16
10	17
11	18,2
12	19,5
13	20,5
14	21,3
15	22
17	23,5
19	24,7

Figura 12: Coleta de medidas do estudante na 2ª etapa da folha de atividades 1

Durante o acompanhamento da atividade, observamos que os estudantes tendem a procurar padrões lineares nas relações entre as grandezas. Em um dos grupos, um estudante afirmou: “Observamos que, a cada 0,5 cm de aumento no reservatório 1, o nível sobe 1 cm no reservatório

2”. A intervenção do professor foi: “Continue com mais alguns valores e observe se a relação permanece constante”. Em seguida, o grupo percebeu que o comportamento não era linear e refletiu sobre como o formato dos reservatórios influenciava a velocidade de alteração do nível.

Em outro grupo, um estudante fez a mesma afirmação de que a altura no reservatório 2 seria sempre o dobro da altura no reservatório 1, mas não houve questionamento ou discussão; o grupo apenas preencheu a tabela sem realizar o experimento. Como resultado, eles construíram um gráfico linear. Exceto por esse caso, os outros grupos realizaram a atividade conforme o esperado

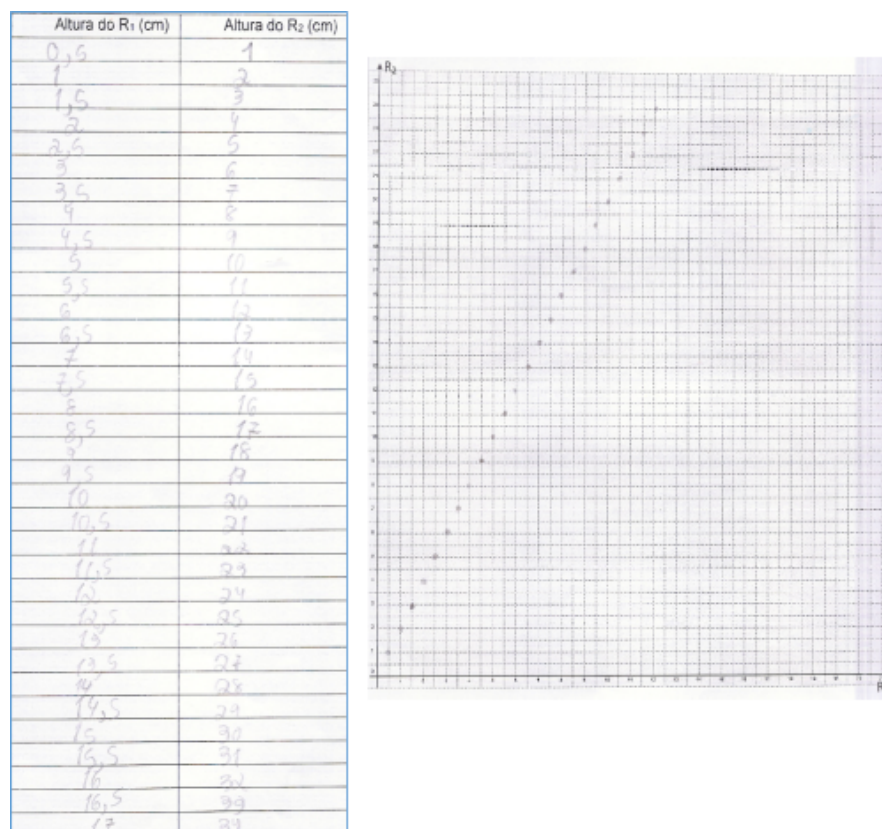


Figura 13: Resolução do estudante apenas com medições iniciais do experimento

6.3 Atividade 2 - analisando os dados

A Folha de atividades 2 – Analisando dados foi trabalhada em sala de aula conforme o tempo previsto 50 minutos. Com os estudantes organizados em grupos e de posse de suas produções na Folha de Atividades 1, iniciamos o momento da aula com a retomada da etapa anterior refletindo sobre as informações colhidas até o momento e rememorando que o produto final do trabalho é encontrar a modelo matemático que melhor representa a relação existente ente a altura do trapézio formado no reservatório 1 e a altura do retângulo formado no reservatório 2.

Assim, os estudantes analisaram o gráfico construído anteriormente observando a existência de algum padrão na posição dos pontos. A resposta esperada era de que a trajetória dos pontos parecia descrever uma curva. Todos os grupos reconheceram algum tipo de padrão e ainda fizeram conjecturas sobre gráfico de funções conhecidas como: a parábola da função quadrática, função logarítmica e função exponencial.

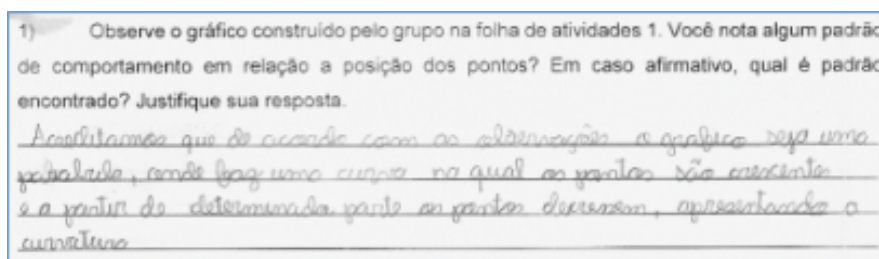


Figura 14: Resposta do grupo 1 da folha de atividades 2: estudantes conjecturam ser uma parábola

Neste momento, sobre a afirmação dos estudantes sobre o fato de os pontos decrescem a partir de determinado intervalo, fizemos uma intervenção propondo as seguintes reflexões: Em relação ao eixo y, os pontos decrescem ou crescem “mais devagar”? Será que existe uma maneira matemática de mostrar isso? Dessa forma os estudantes retomaram a discussão e concluíram ainda existe o crescimento. Deixamos aí uma porta aberta para a discussão do item 2.

No caso da afirmação de uma função logarítmica, a reflexão proposta foi acerca do par ordenado (0,0) ser um ponto pertencente a nossa função, pois quando a altura do trapézio é zero, a altura do retângulo também é zero, trata-se da condição inicial do experimento. Dessa forma, pela condição de existência de logaritmo, isso não seria possível. Vale salientar que essa discussão surge de conhecimentos que esses estudantes pesquisaram de forma autônoma após o início da nossa atividade, pois ainda estão iniciando os estudos sobre logaritmo nas aulas regulares.

Na atividade 2, utilizamos a taxa média de variação como ferramenta para verificar a condição de alinhamento dos pontos. A partir das afirmações dos estudantes no item anterior, isso se tornou bastante pertinente e uma ótima janela de oportunidade a realizar uma boa discussão. Os estudantes tiveram um pouco de dificuldade na interpretação da expressão matemática, porém após uma breve explicação o problema foi resolvido. Contudo, fizemos de forma coletiva a reflexão sobre o significado da taxa média de variação apresentada no gráfico. No enunciado do item, sugerimos ao estudante verificar se a taxa é constante, crescente ou decrescente, dessa forma teríamos uma boa noção do comportamento dos pontos. Após todos os grupos terminarem os cálculos, socializamos as resoluções e fizemos uma sistematização desse conhecimento observando que, funções lineares possuem taxa de variação constante. Logo, nosso gráfico não representa uma reta.

Ao final, levantamos uma questão sobre quais recursos poderiam ser utilizados para confirmar ou refutar o modelo de função sugerido. O ponto de atenção foi que alguns estudantes, mais convencidos, já acreditavam que o tipo de equação por eles proposto era o ideal. Por outro lado, outros, um pouco mais céticos, sugeriram o uso de recursos computacionais para verificar o modelo.

6.4 Atividade 3 - utilizando a planilha eletrônica

Nesta atividade utilizamos a planilha eletrônica como ferramenta para validar as conjecturas realizadas na atividade anterior. Para isso, fizemos uso de um projetor e do Laboratório de Informática Educacional com o tempo de 100 minutos. Realizamos a reprodução da tabela construída na Folha de Atividades 1 digitando os dados na planilha eletrônica.

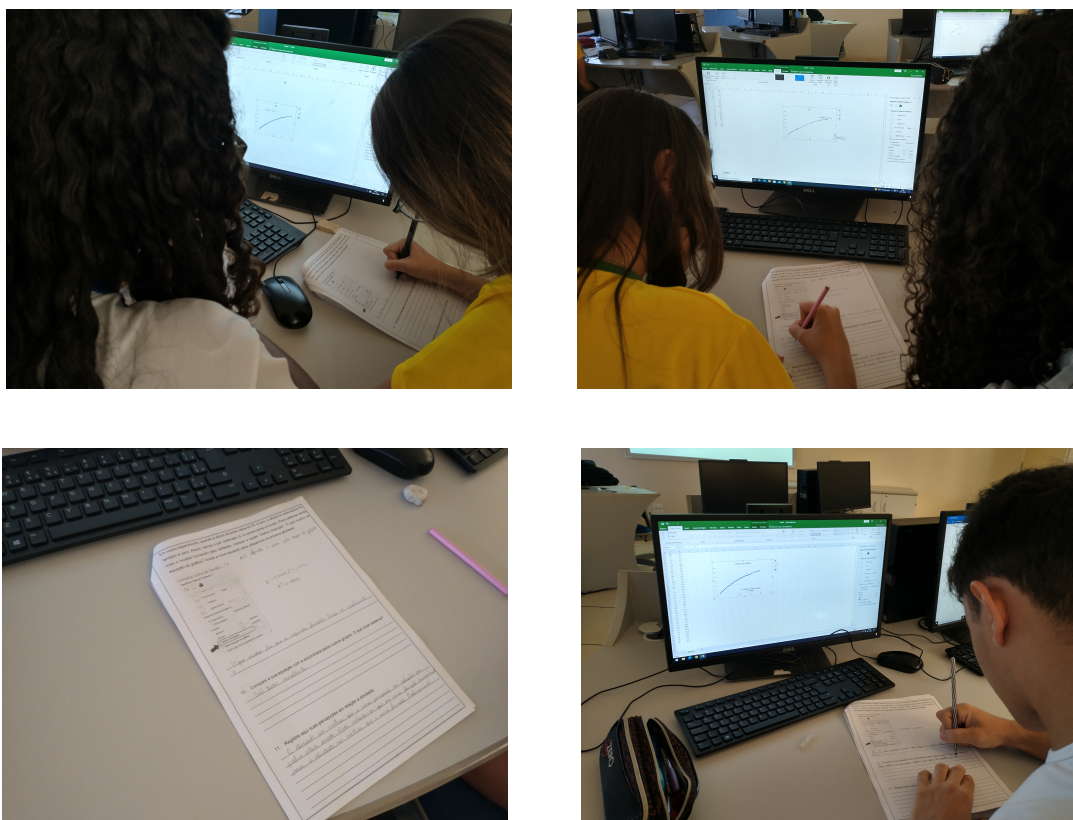


Figura 15: Estudantes utilizando a planilha eletrônica

Inseridas as informações, iniciamos a confecção do gráfico para comparar com o gráfico construído anteriormente no papel quadriculado. Assim, os estudantes puderam verificar a sua construção inicial, validando ou retomando para verificar erros. Isso foi observado na atividade do grupo que havia refeito a tabela na atividade 2, porém construído o gráfico com as informações erradas. Agora, digitaram a planilha com todos os valores inclusive os errados, no entanto, plotaram o gráfico corretamente.

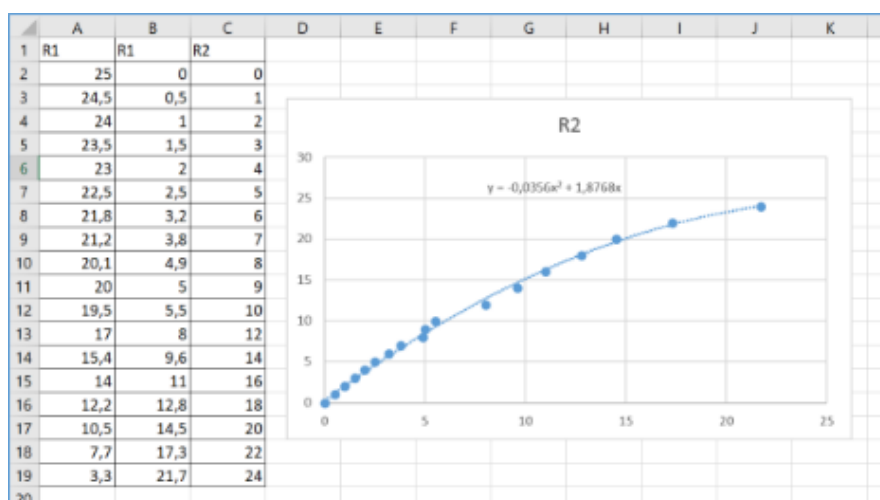


Figura 16: Gráfico obtido pelos estudantes com as informações da tabela

Em seguida, novamente mobilizamos os estudantes a realizar a comparação e observar o padrão de comportamento dos pontos.

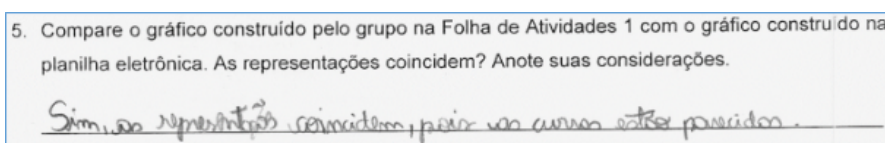


Figura 17: Resposta do estudante - folha de atividades 3

Na sequência, solicitamos aos estudantes para utilizar a ferramenta de linha de tendência da planilha. Instruímos a variar o curso dentre as opções Exponencial, Linear, Logarítmico, Polinomial, Potência e Média Móvel. A resposta esperada era “Polinomial” e, por padrão do software, já aparece de ordem 2. Neste momento, fizemos uma breve discussão sobre a constatação de o melhor ajuste para os pontos seria o gráfico de uma função polinomial de grau 2, ou seja, função quadrática. A partir daí, demos instruções para que encontrassem a expressão matemática utilizando a ferramenta “Exibir Equação no gráfico” e tomando nota da equação encontrada. Para refinar ainda mais essa equação, discutimos o pertencimento do ponto de coordenadas (0, 0) das condições iniciais do experimento no gráfico. Dessa forma, utilizamos a ferramenta “Definir interseção” atribuindo o valor 0,0. Pois assim, forçamos a passagem da parábola pela origem. Após essa ação os estudantes compararam as equações, percebendo a ausência do coeficiente c ($c = 0$).

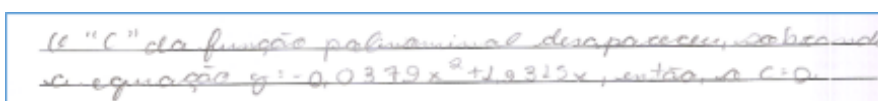


Figura 18: Resposta do estudante - folha de atividades 3

Por fim, cada um dos grupos apresentou a equação encontrada. Realizamos a comparação e constataram que os valores dos coeficientes eram muito próximos, mostrando que as equações são bons modelos para o experimento.

Como fechamento da Folha de Atividades 3 deixamos um espaço para que os estudantes registrassem suas percepções em relação à atividade. Nesse registro, percebemos que os estudantes aprovaram a proposta, percebendo a evolução do seu trabalho, reconhecendo erros e agindo sobre eles.

6.5 Atividade 4 - encontrando o modelo de equação para o experimento

Para o fechamento de nossa experiência com a Modelagem Matemática, aplicamos a Folha de Atividades 4. Em sala de aula, com o tempo de 1 hora/aula, fizemos a dedução da equação utilizando as medidas exatas do experimento. Vale salientar que, devido ao pouco tempo disponível para aplicação, escolhemos realizar a atividade de forma expositiva. Nossa preocupação foi de fazer a resolução de maneira organizada, comentando e justificando cada passo. Tivemos como ponto de atenção os conteúdos em que os estudantes não dominavam muito bem, mas foram trabalhados previamente mesmo que sem aprofundamento. O principal desses pontos foi a razão entre áreas. Ainda, os estudantes tiveram a oportunidade de comparar e validar a equação encontrada por eles no desenvolvimento das atividades anteriores.

7 Considerações finais

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido com o objetivo de oferecer aos estudantes uma abordagem diferente do método tradicional de lousa e giz, visando engajá-los e contribuir para uma aprendizagem mais significativa. Inspirados em uma questão do Banco de Questões da OBMEP 2012 e guiados pelos preceitos da Base Nacional Comum Curricular, elaboramos um experimento com diversas aplicações didáticas, incluindo o estudo de funções quadráticas. Escolhemos este tema por ser um conceito fundamental que, nos livros didáticos, costuma ser apresentado com exemplos de pouca relevância prática para os estudantes, o que pode levar à dificuldade de compreensão ou até mesmo ao desinteresse. Com isso em mente, adotamos a metodologia da Modelagem Matemática, utilizando como instrumentos o experimento, uma planilha eletrônica e folhas de atividades, onde os estudantes podem formular hipóteses, testá-las e validá-las.

Conceitualmente, a pesquisa não teve a intenção de um aprofundamento do conceito de função quadrática, concentrando-se em elementos básicos do estudo como: tabela, gráfico e lei de formação. Procuramos realizar uma análise qualitativa da observação do desenvolvimento e registros feitos pelos estudantes nas folhas de atividades e planilha eletrônica.

Por fim, a própria questão motivadora da OBMEP pode ser utilizada como fechamento da proposta didática na forma de avaliação diagnóstica, uma vez que o problema é apresentado de maneira diferente do experimento realizado.

Consideramos este trabalho de pesquisa ainda em aberto, pois nossa proposta didática é dinâmica, podendo ser melhorada, modificada e aproveitada por colegas interessados em agir sobre o fazer pedagógico, mudando o paradigma das aulas tradicionais. Em particular, acreditamos que nosso experimento pode ser aproveitado ou adaptado para outras práticas e metodologias. Como exemplos, o aprofundamento do estudo da função quadrática; o estudo da função inversa; a interdisciplinariedade com a Física no tema de vasos comunicantes, e por fim, a alteração do formato dos reservatórios para a investigação da aplicação de outros tipos de funções e estudo do volume de sólidos.

8 Bibliografia

ALMEIDA, C. A. de. **Uma proposta didática para o estudo da função quadrática no ensino médio por meio da modelagem matemática de um experimento**. 2023. 92 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2023.

ALMEIDA, C. A. de; SEIXAS, W. Uma proposta didática para o ensino da função quadrática. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 7., 2024, Bauru. **Caderno de trabalhos e resumo** [...]. Bauru: Unesp, 2024. p. 230-236. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2024/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 1 set. 2024.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.