

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

João Pedro Oliveira Pereira

Universidade Tecnológica Federal
do Paraná (UTFPR), Londrina

Ricardo de Sá Teles

Universidade Tecnológica Federal
do Paraná (UTFPR), Londrina,
ricardoteles@utfpr.edu.br

Aplicação de equações diferenciais em modelos presa-predador com fatores de inibição

Application of differential equations in prey-predator models
with inhibition factors

Resumo

Os modelos de interação do tipo presa-predador são amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento. Dentre eles, destaca-se o modelo de Lotka-Volterra. No entanto, tal modelo apresenta limitações em relação a representação realista dos sistemas ecológicos, exigindo modificações que considerem fatores adicionais. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo realizar a análise qualitativa dos problemas presa-predador com fatores de inibição, baseando-se nos modelos de Verhulst e Gompertz, além de uma análise numérica das aproximações correspondentes, implementadas por meio do *software* MATLAB. Na análise qualitativa estudou-se os pontos de equilíbrio dos sistemas localmente lineares e a estabilidade dos sistemas lineares associados, construindo-se trajetórias no plano de fase. Na análise numérica empregou-se o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.

Palavras-chave: presa-predador; inibição; análise qualitativa; análise numérica.

Abstract

Predator-prey interaction models are widely used in various fields of knowledge. Among them, the Lotka-Volterra model stands out. However, this model presents limitations regarding the realistic representation of ecological systems, requiring modifications that take additional factors into account. In this context, the present work aims to carry out a qualitative analysis of predator-prey problems with inhibition factors, based on the Verhulst and Gompertz models, in addition to a numerical analysis of the corresponding approximations, implemented using MATLAB software. The qualitative analysis focused on the equilibrium points of locally linear systems and the stability of the associated linear systems, with trajectories constructed in the phase plane. For the numerical analysis, the fourth-order Runge-Kutta algorithm was employed.

Keywords: predator-prey; inhibition; qualitative analysis; numerical analysis.



1 Introdução

Os modelos matemáticos que descrevem a interação entre espécies têm origem com os estudos de Lotka, Volterra e Kostitzin, formulados com base em sistemas não lineares de equações diferenciais. Dentre os modelos de interação entre duas espécies, destaca-se o clássico modelo presa-predador, que é composto do crescimento e decrescimento populacional, bem como os fatores de interação entre as espécies [1].

Atualmente esse modelo é amplamente utilizado no controle biológico de pragas, exemplificado pelo estudo da interação entre nematoides e ácaros nas raízes da soja [2]; na modelagem do avanço de doenças, como abordado na análise evolutiva de tumores em ratos [3]; e na descrição da captura e emissão de carbono, por meio da interação entre árvores e gás carbônico em cenários ambientais [4].

O modelo geral do tipo presa-predador, descrito por Lotka-Volterra, trata da interação entre duas espécies, em que uma delas dispõe de alimentos em abundância (presa) e a outra alimenta-se da primeira (predador). A população de presas é denotada por x e a de predadores por y , sendo ambas funções do tempo t e seus crescimentos dependentes das suas respectivas taxas de natalidade e mortalidade. É proposto que o encontro das duas espécies aconteça ao acaso, a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações, e que a causa principal da mortalidade das presas é o ataque dos predadores, enquanto o motivo da natalidade dos predadores é a quantidade de alimento disponível. Então a taxa de mortalidade das presas e a taxa de natalidade dos predadores será proporcional ao produto xy [5, 6].

Assim, as equações que regem o crescimento dessas espécies são

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \quad (1)$$

em que a , b , α e β são constantes positivas, sendo a a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e α e β as medidas de interação entre as duas espécies.

Observe a partir da primeira equação do sistema (1) que a população de presas cresce indefinidamente na ausência de predadores ($y = 0$), o que é incoerente com a realidade, já que os recursos utilizados pelas presas não são ilimitados. Além disso, dependendo da dinâmica representada, pode ser necessária a modificação da estrutura do modelo por meio da inclusão ou substituição de termos, a fim de representar de forma mais adequada as características de cada população e suas interações.

Este trabalho tem o propósito de contribuir com a literatura existente ao aprofundar a análise de modelos matemáticos que descrevem a interação entre espécies, com ênfase no modelo clássico presa-predador de Lotka-Volterra, incluindo modificações por meio de fatores de inibição que o tornem mais representativo da dinâmica ecológica real. Para isso, será explorada a aplicação de métodos de linearização, a fim de viabilizar a análise qualitativa da dinâmica dos sistemas não lineares, bem como métodos de aproximação numérica para investigar o comportamento das soluções ao longo do tempo.

Dessa forma, considera-se que a população de presas é limitada por fatores de inibição descritos pela equação de Verhulst (equação logística) e a equação de Gompertz. Esses e outros modelos de dinâmica populacional podem ser vistos em [1, 6, 7].

Ressalta-se que o sistema (1) é não linear. Diante disso, serão inicialmente considerados métodos de análise baseados em aproximações lineares, com o intuito de extrair informações que possam ser relacionadas ao sistema não linear.

2 Sistemas Localmente Lineares

Nesta seção discutiremos aproximações lineares de sistemas localmente lineares, segundo a obra [7], para viabilizar as análises no plano de fase realizadas na seções subsequentes.

Consideraremos um sistema autônomo bidimensional não linear

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

com o objetivo de investigar o comportamento das trajetórias próximas de um ponto crítico $\mathbf{x}^0$. É conveniente escolhermos o ponto crítico como a origem, o que não gera perda de generalidade, visto que se $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$ é sempre possível fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ em (2). Vamos definir o que significa o sistema não linear (2) ser aproximado por um sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$.

Suponha que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

e que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico isolado. Isso significa que existe uma bola aberta centrada na origem no interior da qual não existem outros pontos críticos. Também, vamos supor que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Para que o sistema (3) esteja próximo do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ deve ser pequeno. Em particular, vamos supor que as componentes de $\mathbf{g}$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que $\mathbf{g}$ satisfaz a condição

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (4)$$

ou seja, $\|\mathbf{g}\|$ é pequeno em comparação a $\|\mathbf{x}\|$ perto da origem. Tal sistema é chamado de localmente linear na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Em alguns casos, pode ser útil escrever a condição (4) em forma escalar. Se $\mathbf{x}^T = (x, y)$, então $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$. Analogamente, se $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, então $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{1/2}$. Segue então que a condição (4) é satisfeita se, e somente se,

$$\frac{g_1(x, y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{g_2(x, y)}{r} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0. \quad (5)$$

Voltando para o sistema não linear (2), ou em forma escalar

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y), \quad (6)$$

o sistema (6) será localmente linear na vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Para garantir isso, usaremos a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) para escrever $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y), \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y), \end{aligned}$$

em que $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ e analogamente para η_2 , o que satisfaz a condição (5). Note que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ e $dy/dt = d(y - y_0)/dt$, então o sistema (6) se reduz a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Esse resultado tem duas consequências, a primeira é que quando as funções F e G forem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (6) será localmente linear e não é necessário verificar o processo limite como nas condições (4) e (5). A segunda é que o sistema linear que aproxima o sistema não linear (6) perto de (x_0, y_0) é dado pela parte linear de (7):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (8)$$

onde $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$. A equação (8) fornece um método geral para encontrar o sistema linear correspondente a um sistema localmente linear perto de um ponto crítico.

A matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}$$

que aparece como matriz de coeficientes na equação (8) é chamada de matriz Jacobiana das funções F e G em relação a x e y . Precisamos supor que $\det(\mathbf{J})$ não se anule em (x_0, y_0) , de modo que este ponto também seja um ponto crítico isolado do sistema linear (8).

Obtido o sistema linearizado, o Teorema 1 garante que podemos obter informações de um sistema não linear a partir das informações do sistema linear correspondente [5].

Teorema 1 (Teorema da Linearização de Lyapunov-Poincaré) *Seja $f(x)$ um campo continuamente diferenciável em uma vizinhança da origem onde podemos escrever*

$$f(x) = Ax + \sigma(x)$$

1. Então, se a matriz A for assintoticamente estável, o ponto $x = 0$ será assintoticamente estável para o campo $f(x)$.
2. Se a matriz A tiver um de seus autovalores λ tal que $\operatorname{Re} \lambda > 0$ então o sistema será instável.
3. Se todos os autovalores λ de A forem tais que $\operatorname{Re} \lambda > 0$, o ponto crítico é repulsor, isto é, existe uma vizinhança da origem V tal que se $x(t)$ for uma órbita não nula, existirá t_0 , e para $t > t_0$ temos que $x(t) \notin V$.

Além disso, segundo [7, p. 368], “a solução de um problema de valor inicial é assintoticamente estável se soluções inicialmente próximas tendem a se aproximar da solução dada, e é assintoticamente instável se tendem a se afastar.” Em termos matemáticos, o Teorema 2 formaliza essa ideia.

Teorema 2 *O ponto crítico $x = 0$ do sistema linear $x' = Ax$ é: assintoticamente estável se os autovalores r_1 e r_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se r_1 e r_2 são imaginários puros; instável se r_1 e r_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.*

A seguir, será apresentado o estudo qualitativo dos modelos com fatores de inibição propostos, iniciando pela equação de Verhulst.

3 Presa-Predador com a Equação de Verhulst

Vamos considerar o modelo presa-predador geral (1), em que na ausência dos predadores a população das presas tem seu crescimento limitado por algum fator (espaço, comida ou outros recursos), regida pela equação de Verhulst [6].

$$\frac{dx}{dt} = (r - ax)x,$$

que também pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)x, \quad K = \frac{r}{a}$$

onde K , a e r são constantes positivas, sendo r a taxa de crescimento intrínseca e K a capacidade de sustentação ambiental da espécie.

Dessa forma, o sistema (1) se modifica em

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right)x - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (9)$$

sendo b , α e β as mesmas constantes do modelo originário.

Primeiro vamos identificar os pontos de equilíbrio do sistema (9), a saber:

$$\begin{cases} x \left[r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha y \right] = 0 \\ y(-b + \beta x) = 0. \end{cases}$$

Os pontos críticos são:

1. Origem $(0, 0)$, para $x = 0$ e $y = 0$;
2. $(K, 0)$, para $r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha y = 0$ e $y = 0$;
3. $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right)\right)$, para $r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha y = 0$ e $-b + \beta x = 0$.

O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ nos fornece o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \\ \frac{dy}{dt} = -by, \end{cases}$$

cujas raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = r > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$, assim, a origem sempre será um ponto de sela, independentemente dos valores dos coeficientes do sistema (9).

Para analisar o ponto de equilíbrio $(K, 0)$ é feito a mudança de variáveis $x = K + u$ e $y = v$ em (9), que nos fornece o sistema modificado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -ru - \frac{r}{K}u^2 - \alpha Kv - \alpha uv \\ \frac{dv}{dt} = -bv + \beta Kv + \beta uv \end{cases}$$

e admite o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -ru - \alpha Kv \\ \frac{dv}{dt} = (-b + \beta K)v. \end{cases} \quad (10)$$

O sistema (10) tem como raízes do polinômio característico, $\lambda_1 = -r$ e $\lambda_2 = -b + \beta K$. Como λ_1 é sempre negativo, se $K < \frac{b}{\beta}$, então $\lambda_2 < 0$ e o ponto crítico $(K, 0)$ será um nó assintoticamente estável e se $K > \frac{b}{\beta}$, então $\lambda_2 > 0$ e o ponto crítico será um ponto de sela.

Para que o ponto $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right)\right)$ esteja no primeiro quadrante, é necessário que $K > \frac{b}{\beta}$, pois as populações x e y são sempre positivas. Analogamente, para analisá-lo faremos a mudança de variáveis $x = x_e + u$ e $y = y_e + v$ em (9), sendo $x_e = \frac{b}{\beta}$ e $y_e = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right)$, fornecendo o sistema quase linear

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = x_e \left(r - 2\frac{r}{K}u - \frac{r}{K}x_e - \alpha y_e - \alpha v\right) + ru - \frac{r}{K}u^2 - \alpha y_e v - \alpha uv \\ \frac{dv}{dt} = y_e(-b + \beta x_e + \beta u) - bv + \beta x_e v + \beta uv, \end{cases}$$

cujo sistema linearizado correspondente é

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru - 2\frac{r}{K}x_e u - \alpha y_e u - \alpha x_e v \\ \frac{dv}{dt} = \beta y_e u - bv + \beta x_e v, \end{cases}$$

ou, substituindo os valores de x_e e y_e

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{rb}{\beta K}u - \frac{\alpha b}{\beta}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{r}{\alpha} \left(\beta - \frac{b}{K}\right)u. \end{cases} \quad (11)$$

O polinômio característico associado ao sistema (11) é dado por

$$\lambda^2 + \frac{rb}{\beta K}\lambda + rb \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right) = 0, \quad (12)$$

cujas raízes são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{rb}{\beta K} \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{rb}{\beta K}\right)^2 - 4rb \left(1 - \frac{b}{\beta K}\right) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Como as constantes r , b , β e K assumem apenas valores positivos, a condição

$$\left[\left(\frac{rb}{\beta K} \right)^2 - 4rb \left(1 - \frac{b}{\beta K} \right) \right]^{1/2} > \frac{rb}{\beta K}$$

não se verifica, de modo que ambas raízes apresentarão sempre sinal negativo. Assim, a equação (13) pode resultar em um dos três casos dependendo do sinal da expressão $\left(\frac{rb}{\beta K} \right)^2 - 4rb \left(1 - \frac{b}{\beta K} \right)$: (i) raízes reais e distintas, (ii) raízes imaginárias, ou (iii) raízes reais e iguais. No último caso, a estabilidade do ponto de equilíbrio (x_e, y_e) do sistema localmente linear (9) é determinada, porém seu comportamento não, podendo corresponder tanto a um nó quanto a um ponto espiral, ambos assintoticamente estáveis, conforme apresentado na Tabela 9.3.1 de Boyce [7]. Em razão disso serão analisados apenas os dois primeiros casos.

(i) Raízes reais e distintas: Para $\left(\frac{rb}{\beta K} \right)^2 > 4rb \left(1 - \frac{b}{\beta K} \right)$ ou $r > 4\beta K \left(\frac{\beta K}{b} - 1 \right)$, têm-se que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, assim o ponto de equilíbrio (x_e, y_e) será um nó assintoticamente estável.

(ii) Raízes imaginárias: Quando $r < 4\beta K \left(\frac{\beta K}{b} - 1 \right)$, as raízes λ_1 e λ_2 assumem valores imaginários, o que significa que o ponto (x_e, y_e) será um ponto espiral assintoticamente estável.

A equação (não separável)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-b + \beta x)}{x \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha y \right]}$$

não admite solução no plano de fase por meio de funções elementares. E as soluções isóclinas para o sistema (9) são

$$x = 0 \text{ e } r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha y = 0, \text{ para } \frac{dx}{dy} = 0$$

$$y = 0 \text{ e } -b + \beta x = 0, \text{ para } \frac{dy}{dx} = 0.$$

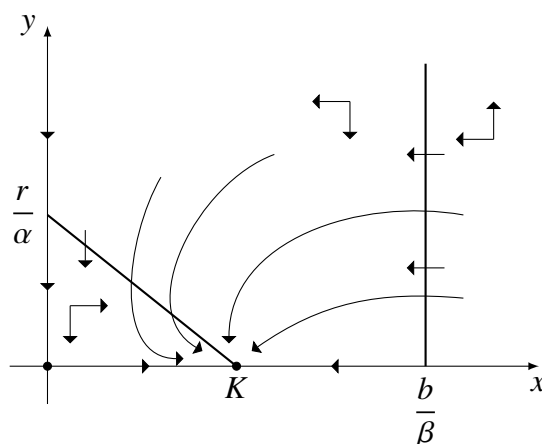
Analisando o sinal das derivadas do sistema (9) vemos que $\frac{dx}{dt} > 0$, quando $y < \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K} \right)$, ou seja, para valores abaixo da reta $r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha y = 0$, a trajetória no plano de fase cresce para x .

Analogamente, a trajetória decresce para valores acima da mesma reta. Também, se $y = 0$, $\frac{dx}{dt}$ é positivo para $x < K$ e negativo para $x > K$.

Em relação a $\frac{dy}{dt}$, a trajetória cresce para y no plano de fase quando $x > \frac{b}{\beta}$ e decresce quando $x < \frac{b}{\beta}$. No eixo y ($x = 0$), a trajetória sempre decresce, pois $\frac{dy}{dt} = -by < 0$.

As configurações possíveis para tal modelo são apresentadas nas Figuras 1 e 2.

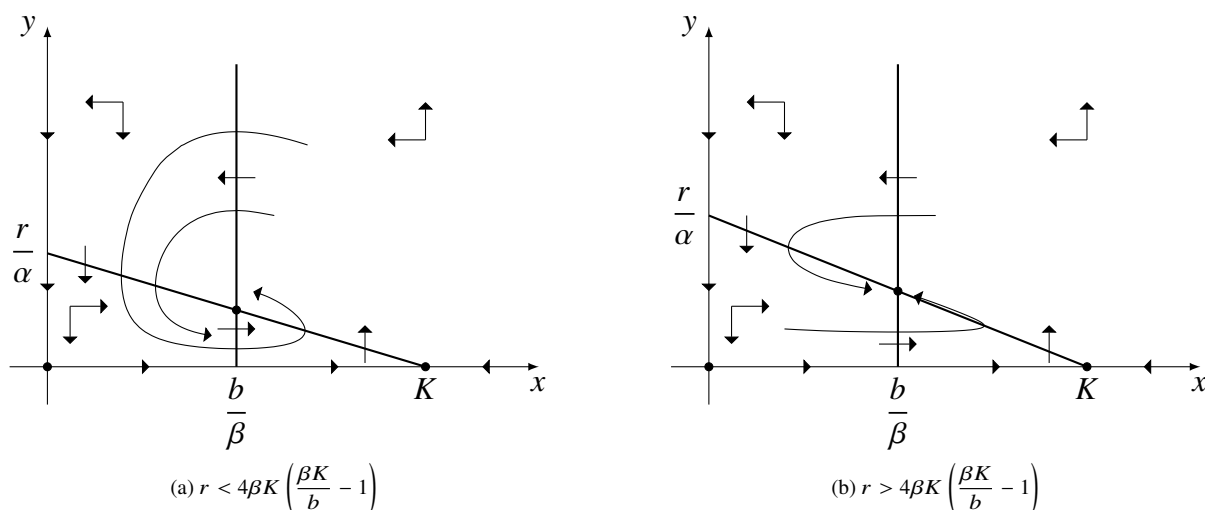
Figura 1: Plano de fase para $K < \frac{b}{\beta}$.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Na Figura 1, o ponto crítico $(K, 0)$ é um nó assintoticamente estável, e nesse caso, somente a população das presas sobrevive e tende ao seu valor máximo $x_{\infty} = K$. Um resultado esperado, já que K é o nível de saturação, enquanto a população de predadores é extinta.

Figura 2: Plano de fase para $K > \frac{b}{\beta}$.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Já na Figura 2, o ponto de equilíbrio $(K, 0)$ é um ponto de sela e o ponto $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K} \right) \right)$ é um ponto espiral estável (a) e um nó assintoticamente estável (b). Em ambas as configurações, as duas espécies sobrevivem e tendem às suas populações limites $x_{\infty} = \frac{b}{\beta}$ e $y_{\infty} = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{b}{\beta K} \right)$, com diferença apenas na forma e na velocidade que a trajetória tende ao ponto crítico. Na primeira configuração (a), a variação populacional das espécies é oscilatória, podendo demorar até atingir o equilíbrio, já no segundo caso (b), a variação é mais abrupta e a população limite é alcançada em menor tempo.

4 Presa-Predador com a Equação de Gompertz

Outro exemplo de modelo presa-predador com fator de inibição no crescimento das presas pode ser obtido considerando que na ausência dos predadores ($y = 0$), a taxa de crescimento das presas segue o modelo de Gompertz [6]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x \\ x(0) = x_0 \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0. \end{cases}$$

Este modelo tem como característica principal uma taxa de crescimento grande no início do processo, quando x é pequeno, que muda rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo muito utilizado para representar crescimentos celulares (plantas, bactérias, tumores, etc.) [1].

Dessa forma, o sistema (1) se modifica em

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x - pxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + qxy \end{cases} \quad (14)$$

para $x > 0$ e $y \geq 0$, além das demais constantes todas positivas.

Os pontos críticos do sistema (14) são $(e^{a/b}, 0)$ e $\left(\frac{c}{q}, \frac{1}{p} \left(a - b \ln \frac{c}{q}\right)\right)$, os quais satisfazem o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} x(a - b \ln x - py) = 0 \\ y(-c + qx) = 0. \end{cases}$$

Para analisar a estabilidade do ponto $(e^{a/b}, 0)$, faremos as mudanças de variáveis $x = e^{a/b} + u$ e $y = v$ em (14), que linearizado resulta no sistema linear correspondente

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -bu - pe^{a/b}v \\ \frac{dv}{dt} = (-c + qe^{a/b})v. \end{cases} \quad (15)$$

O sistema (15) tem o polinômio característico associado $(-b-\lambda)(-c+qe^{a/b}-\lambda) = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -b$ e $\lambda_2 = -c + qe^{a/b}$. Como λ_1 é sempre negativo, o ponto de equilíbrio $(e^{a/b}, 0)$ será um nó assintoticamente estável se $\frac{c}{q} > e^{a/b} \Rightarrow \lambda_2 < 0$, ou um ponto de sela se $\frac{c}{q} < e^{a/b} \Rightarrow \lambda_2 > 0$.

Para o ponto $\left(\frac{c}{q}, \frac{1}{p} \left(a - b \ln \frac{c}{q}\right)\right)$, realizam-se as mudanças de variáveis $x = \frac{c}{q} + u$ e $y = y^* + v$, em que $y^* = \frac{1}{p} \left(a - b \ln \frac{c}{q}\right)$. Além disso, temos que a condição $\frac{c}{q} < e^{a/b}$ deve ser satisfeita nesse caso, pois o valor de y^* deve ser positivo para ter significado físico na população de predadores.

Logo, o sistema linearizado correspondente a esse ponto é

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -bu - p\frac{c}{q}v \\ \frac{dv}{dt} = qy^*u \end{cases}$$

que admite o polinômio característico $\lambda^2 + b\lambda + pcy^* = 0$, cujas raízes são $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4pcy^*}}{2}$, de forma que se $b^2 > 4pcy^*$, o ponto crítico será um nó e se $b^2 < 4pcy^*$, um ponto espiral, ambos assintoticamente estáveis devido ao termo negativo no lado direito do sinal de igualdade. De forma análoga ao modelo estudado na Seção 3, não será analisado o caso em que $b^2 = 4pcy^*$ devido ao seu comportamento indeterminado, sendo possível apenas afirmar que o ponto crítico é assintoticamente estável, uma vez que resulta em raízes reais e iguais com sinal negativo, conforme estabelecido pelo Teorema 2.

Novamente, não é possível obter as trajetórias no plano de fase, uma vez que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + qx)}{x(a - b \ln x - py)} \quad (16)$$

não é separável e não admite solução envolvendo funções elementares. No entanto, de (16) podemos obter as isóclinas de (14)

$$y = 0 \text{ e } -c + qx = 0, \text{ para } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$a - b \ln x - py = 0, \text{ para } \frac{dx}{dy} = 0,$$

as quais dividem o plano de fase nas seguintes regiões:

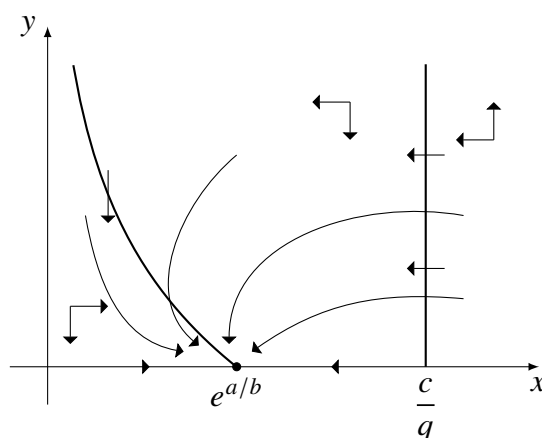
1. $\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow y < \frac{1}{p}(a - b \ln x) \text{ ou } x < e^{a/b} (y = 0);$
2. $\frac{dx}{dt} < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{p}(a - b \ln x) \text{ ou } x > e^{a/b} (y = 0);$
3. $\frac{dy}{dt} > 0 \Rightarrow x > \frac{c}{q};$
4. $\frac{dy}{dt} < 0 \Rightarrow x < \frac{c}{q}.$

Assim, as trajetórias contidas no eixo x crescem para valores à esquerda do ponto $x = e^{a/b}$ e decrescem para valores à direita. Já as demais trajetórias no plano de fase crescem para x em valores abaixo da curva $y < \frac{1}{p}(a - b \ln x)$, decrescem para x em valores acima da mesma curva, crescem para y em valores à direita da reta $x = \frac{c}{q}$ e decrescem para y em valores à esquerda da mesma reta.

O sistema (14) admite três configurações no plano de fase que dependem da posição da isóclina $-c + qx = 0$ e do tamanho de b^2 em relação a $4pcy^*$. Essas configurações são apresentadas nas Figuras 3 e 4.

Na Figura 3, o ponto crítico $(e^{a/b}, 0)$ é um nó assintoticamente estável, portanto, somente a população de presas sobrevive e tende a $x_\infty = e^{a/b}$, enquanto a população de predadores é extinta.

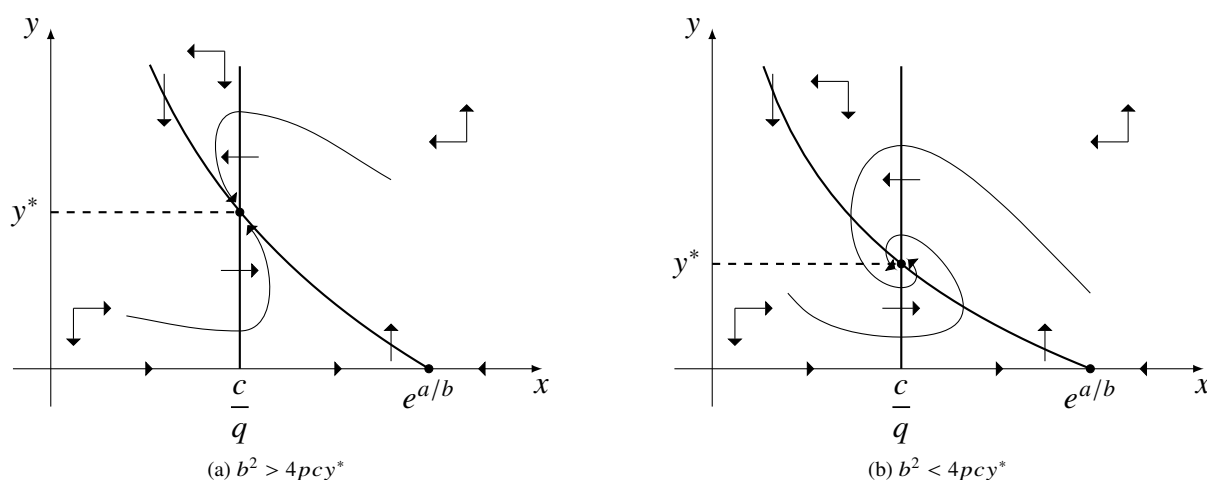
Figura 3: Plano de fase para $\frac{c}{q} > e^{a/b}$.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Na Figura 4-a, o ponto $(e^{a/b}, 0)$ é um ponto de sela e o ponto $\left(\frac{c}{q}, \frac{1}{p} \left(a - b \ln \frac{c}{q}\right)\right)$ é nó assintoticamente estável. Já na Figura 4-b o segundo ponto de equilíbrio é um ponto espiral assintoticamente estável. Nas duas configurações, ambas espécies sobrevivem e tendem às suas populações limite $x_{\infty} = \frac{c}{q}$ e $y_{\infty} = \frac{1}{p} \left(a - b \ln \frac{c}{q}\right)$, com a primeira tendo uma convergência mais rápida e a segunda mais lenta, pois apresenta oscilações em torno do ponto crítico antes de convergir.

Figura 4: Plano de fase para $\frac{c}{q} < e^{a/b}$.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

5 Análise Numérica

Para confirmar as informações obtidas no estudo qualitativo, foram realizadas aproximações numéricas das trajetórias no plano fase de ambos os modelos, por meio da implementação do algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Esse método é relativamente simples de implementar

e suficientemente preciso para lidar eficientemente com uma ampla variedade de problemas [6]. Em muitos ambientes computacionais existem rotinas pré-definidas com controle adaptativo de passo quando necessário. No *software* MATLAB, por exemplo, a rotina ODE45 utiliza os métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem, estimando o erro local e ajustando automaticamente o tamanho do passo.

A fórmula de Runge-Kutta envolve uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, dada por

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right),$$

sendo

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n), \\ k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right), \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned}$$

A soma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ também pode ser interpretada como um coeficiente angular médio. Cada termo k_{ni} está associado a um coeficiente angular em um ponto específico, por exemplo, k_{n1} ao coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} ao ponto médio utilizando-se a fórmula de Euler para ir de t_n a $t_n + h/2$, k_{n3} a segunda aproximação no ponto médio e k_{n4} ao fim do intervalo empregando-se a fórmula de Euler e o coeficiente k_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$ [6, 7].

A implementação do método numérico foi realizada no *software* MATLAB seguindo os procedimentos descritos a seguir:

1. **definir** $f(t, y)$;
2. **inserir** as condições iniciais t_0 e y_0 ;
3. **inserir** o número de pontos n e o tamanho do passo h ;
4. **para** i de 1 até $n - 1$ (número de passos) **calcular**

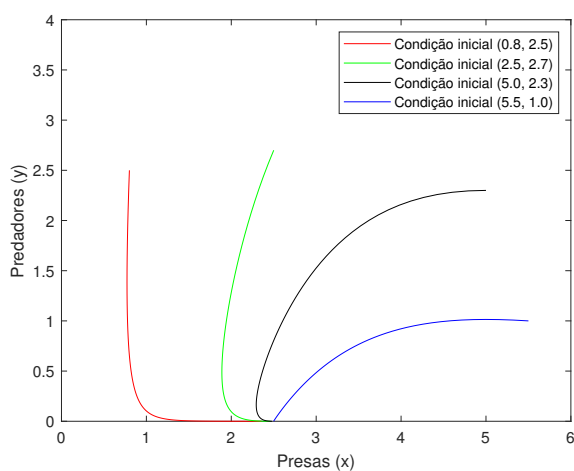
$$\begin{aligned} k1 &= f(t_i, y_i) \\ k2 &= f(t_i + h/2, y_i + h/2 * k1) \\ k3 &= f(t_i + h/2, y_i + h/2 * k2) \\ k4 &= f(t_i + h, y_i + h * k3) \\ y_{i+1} &= y_i + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6 \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

5. **escrever** t e y .

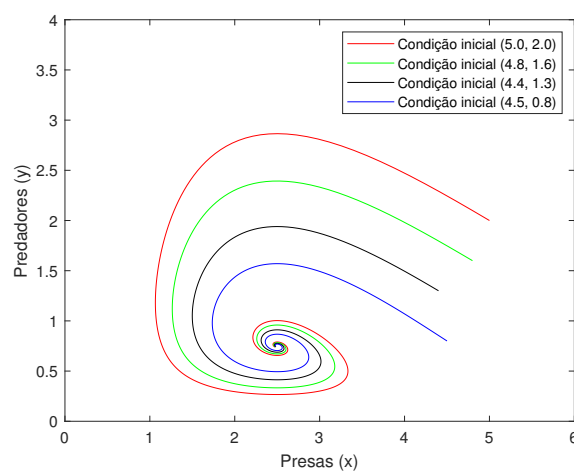
e podem ser utilizados em qualquer ambiente de programação, como descrito em [7].

As aproximações são apresentadas nas Figuras 5 e 6.

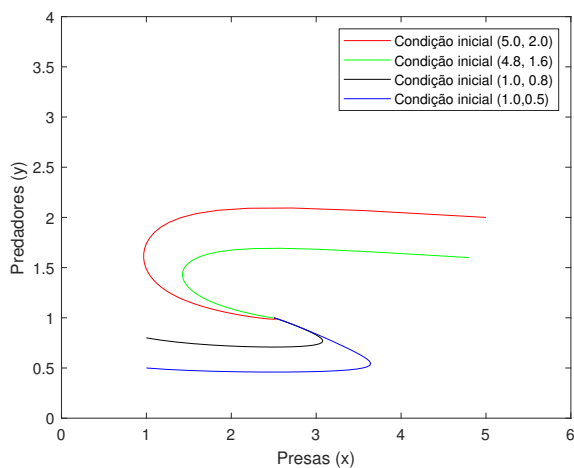
Figura 5: Plano de fase para as configurações do modelo presa-predador com a equação de Verhulst e o método RK4.



(a) $r = 2$, $K = 2.5$, $b = 10$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$



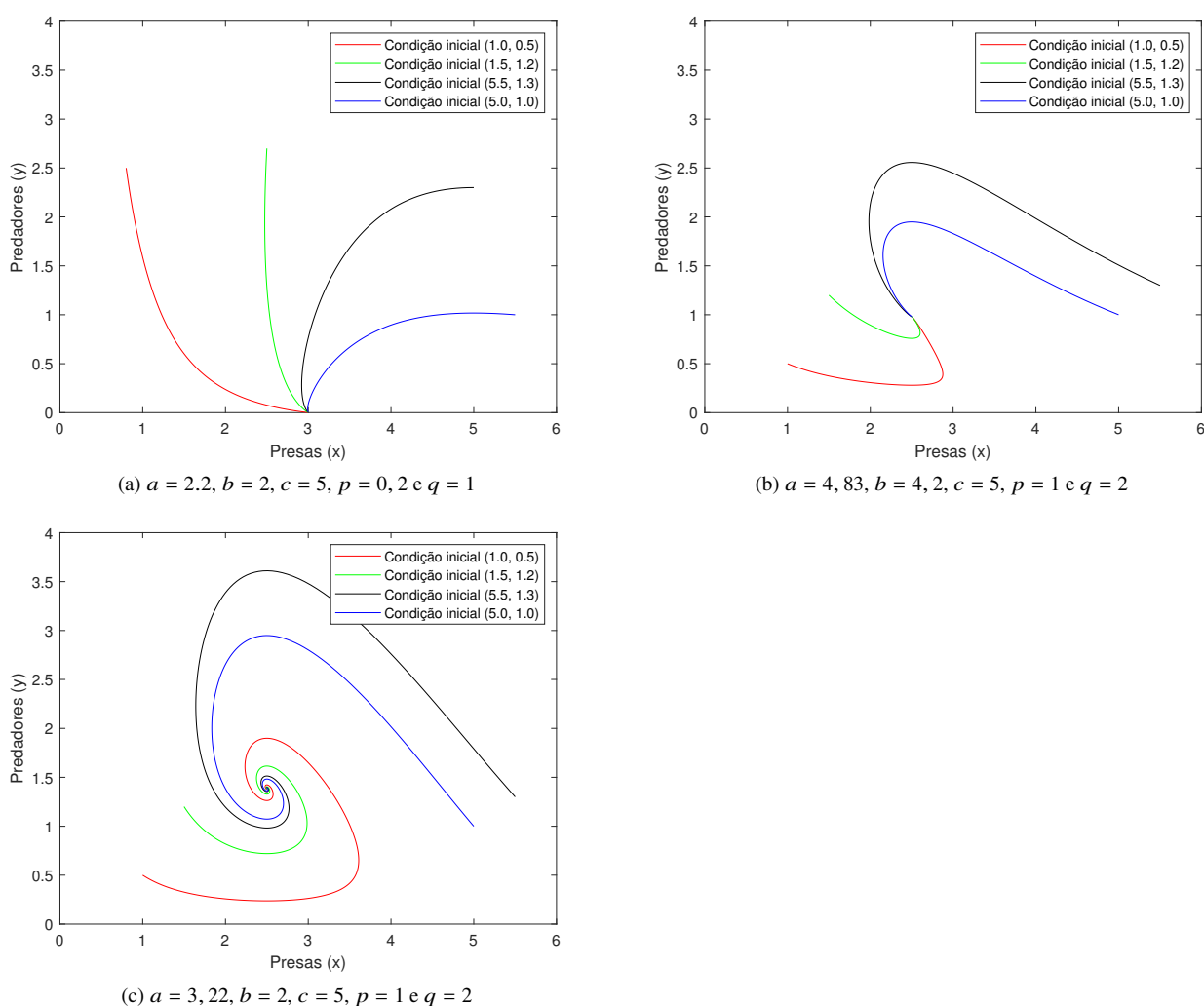
(b) $r = 3$, $K = 5$, $b = 5$, $\alpha = 2$ e $\beta = 2$



(c) $r = 40$, $K = 5$, $b = 5$, $\alpha = 20$ e $\beta = 2$

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Figura 6: Plano de fase para as configurações do modelo presa-predador com a equação de Gompertz e o método RK4.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

6 Conclusão

Para a maioria dos sistemas não lineares não é possível obter solução analítica e, quando possível, pode ser dada implicitamente, o que dificulta a análise dos fenômenos descritos por essas equações [7].

Dessa forma, a análise qualitativa constitui uma ferramenta eficaz para compreender o comportamento das soluções, por meio do estudo da estabilidade, dos sinais das derivadas, dos limites e das geometrias associadas ao sistema.

As informações obtidas qualitativamente foram confirmadas pelas aproximações numéricas, evidenciando a relevância e o potencial desse tipo de abordagem para a compreensão de sistemas complexos, mesmo na ausência de soluções analíticas.

Além disso, observou-se que nos dois modelos analisados as configurações dos planos de fase apresentaram características semelhantes. Em um dos casos, apenas a população de presas sobrevive, enquanto em outros dois casos ambas as espécies sobrevivem e tendem a um nível constante. No entanto, do ponto de vista ecológico, as interações do tipo presa-predador normalmente não resultam

na extinção de uma das espécies, como ocorre no primeiro cenário, mas sim na coexistência em equilíbrio dentro de um mesmo *habitat*.

Como proposta para trabalhos futuros, destaca-se a possibilidade de substituir o termo de interação entre as espécies, bem como incluir fatores ambientais que variam ao longo do tempo, tais como sazonalidade, disponibilidade de recursos, saciedade do predador e migração. Essas modificações visam tornar os modelos presa-predador mais representativos das condições ecológicas reais observadas. Outra linha de investigação consiste na adoção de modelos com variações em outras dimensões, utilizando equações diferenciais parciais, a fim de compreender os efeitos da dispersão espacial sobre a estabilidade e a coexistência das populações. Por fim, recomenda-se o aprofundamento da análise numérica por meio da implementação e comparação de métodos mais avançados de integração, como os métodos de Runge-Kutta de ordens superiores e modelos implícitos, com ênfase na avaliação da estabilidade, da convergência, da precisão e do desempenho computacional.

Referências

- [1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Campinas: Editora Contexto, 2002.
- [2] BARROS, A. S.; AMORIM, S. S.; PRADO, T. J. do. Um modelo matemático presa-predador aplicado ao nematoide *meloidogyne incognita* e ao ácaro *protogamasellopsis zaheri*. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, SBMAC, São Carlos, v. 11, n. 1, 2025. Disponível em: <https://proceedings.sbmec.emnuvens.com.br/sbmec/article/view/4658/4719>. Acesso em: 15 jul. 2025.
- [3] MACEDO, O. S.; SOUZA, G. R. Equação de Gompertz: um estudo sobre a evolução de tumores. **Biomatemática**, Campinas, v. 34, p. 69–80, 2024. Disponível em: https://ime.unicamp.br/~biomat/Bio34/_art5.pdf. Acesso em: 14 jul. 2025.
- [4] MIKOANSKI, M. H. T. **Modelagem ambiental**: revisão sistemática sobre a utilização de equações diferenciais ordinárias em sistemas ambientais. 2023. 100 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia Ambiental) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Francisco Beltrão, 2023.
- [5] BASSANEZI R. C.; FERREIRA JR, W. C. **Equações Diferenciais com aplicações**. São Paulo: HARBRA, 1988.
- [6] SALVADOR J. A.; ARENALES, S. H. V. **Modelagem matemática ambiental**. São Carlos: EdUFSCar - Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2021.
- [7] BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2010.