

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Luan Lima da Silva

Universidade Federal do Goiás
(UFG), Instituto de Matemática
e Estatística (IME), Goiânia,
luan.lima.lemann@gmail.com

Durval José Tonon

Universidade Federal do Goiás
(UFG), Instituto de Matemática e
Estatística (IME), Goiânia

Estrutura topológica do retrato de fase para campos vetoriais lineares em $\mathbb{R}^3$ e aplicações

Topological structure of the phase portrait for linear vector
fields in $\mathbb{R}^3$ and applications

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma análise do sinal da parte real das raízes de um polinômio de grau 3 em função de seus coeficientes. O problema será abordado do ponto de vista analítico, sabendo que do ponto de vista algébrico o problema já vem sendo tratado na literatura sem avanços significativos. Como aplicação dos resultados obtidos, caracterizamos completamente a dinâmica e a estrutura topológica do retrato de fase para campos lineares em $\mathbb{R}^3$. Além disso, apresentamos aplicações no estudo qualitativo local de pontos de equilíbrio para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ definidos a partir de um ou mais parâmetros.

Palavras-chave: campos de vetores lineares tridimensionais; raízes de polinômios cúbicos; dinâmica local próximo de pontos de equilíbrio; diagrama de bifurcações.

Abstract

In this paper, we present an analysis of the sign of the real part of the roots of a polynomial of degree 3 as a function of its coefficients. The problem will be approached from an analytical point of view, knowing that from an algebraic point of view the problem has already been dealt with in the literature without significant advances. As an application of the results obtained, we fully characterize the dynamics and topological structure of the phase portrait for linear fields in $\mathbb{R}^3$. In addition, we present applications in the local qualitative study of equilibrium points for vector fields in $\mathbb{R}^3$ defined from one or more parameters.

Keywords: three-dimensional linear vector fields; roots of cubic polynomials; local dynamics near to equilibrium points; bifurcation diagram.



1 Introdução

Obter informações das raízes de uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

em função dos coeficientes a_i , é um problema que aparece em muitos contextos da matemática. Em algumas situações existe o interesse no valor numérico das soluções de (1), em outras, estamos interessados em descrever o comportamento qualitativo dessas soluções. O objetivo do estudo apresentado neste trabalho é contribuir para o avanço da teoria qualitativa de campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$, mais especificadamente, descrever a natureza de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Para isto, como constatamos no Teorema de Hartman-Grobman (ver [1]) e no Teorema da Variedade Estável e Instável (ver [2]), se faz necessário descrever o comportamento qualitativo e/ou quantitativo das soluções de (1). No contexto deste trabalho fixamos $n = 3$.

Um campo vetorial linear G em $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Denote por A a matriz associada a G . O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{tr}(A)\lambda^2 - s(A)\lambda + \det(A), \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ s(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Denotemos os autovalores de A por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ou $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ e λ_3 , com $\alpha, \beta, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $i^2 = -1$. Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan (ver [3]), temos as seguintes possibilidades de forma canônica real para A :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$. Um ponto $p \in U$ é um *ponto de equilíbrio* de F se $F(p) = 0$. Além disso, p é um *ponto de equilíbrio hiperbólico* de F se a matriz jacobiana de F em p , denotada por $J(F)(p)$, tem todos os seus autovalores com parte real não-nula. Dizemos que p é um *ponto de equilíbrio degenerado* de F se a matriz jacobiana $J(F)(p)$ possui pelo menos um autovalor igual a zero, caso contrário ele é dito ser *não-degenerado*.

Como $J(F)(p)$ determina um sistema linear para aplicar o Teorema de Hartman-Grobman e o Teorema da Variedade Estável e Instável, no caso $n = 3$, é suficiente descrevermos a natureza da origem para o campo G , dado em (2), em função dos coeficientes a_{ij} . Para isso, precisamos estudar

as raízes do polinômio característico (3), mais precisamente determinar seu tipo e o sinal da parte real. A Tabela 1 apresenta as possíveis classificações da estrutura topológica próximo a origem do campo de vetores G .

Tabela 1: Classificação do tipo topológico da origem para o campo vetorial G

Classificação	Autovalores de A
Atrator (estável)	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha < 0$) e $\lambda_3 < 0$ ou $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$
Ponto de Sela	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$ (> 0) e $\lambda_3 > 0$ (< 0) ou $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (> 0) e $\lambda_3 > 0$ (< 0)
Repulsor (instável)	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha > 0$) e $\lambda_3 > 0$ ou $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$
Degenerado	$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$
Não-hiperbólico e não-degenerado	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ ($\alpha = 0$) e $\lambda_3 \neq 0$

Fonte: elaborado pelos próprios autores

Como pode ser visto em [4], existe uma análise algébrica que nos permite determinar quais são os possíveis tipos de raízes que um polinômio cúbico pode ter em função dos seus coeficientes. Também em [4], encontramos a expressão algébrica das raízes de um polinômio cúbico. No entanto, esses resultados não permitem responder de forma prática e objetiva qual é o sinal da parte real dessas raízes, o que, por sua vez, possui grande importância na aplicação do Teorema de Hartman-Grobman e do Teorema da Variedade Estável e Instável, com o intuito de estudar a dinâmica na vizinhança de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Diante deste cenário, esse trabalho apresenta outra abordagem para caracterizar os tipos de raízes de um polinômio cúbico, a qual também nos permite dizer quando as raízes possuem parte real positiva, negativa ou nula.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2 apresentamos os principais resultados, os Teoremas A e B. Na Seção 3, aplicamos os resultados obtidos para estudar a dinâmica local próxima aos pontos de equilíbrio dos sistemas de Rössler e Lorenz, apresentando a decomposição do espaço de parâmetros em regiões com distintas dinâmicas. Na Seção 4, desenvolvemos a teoria básica e conceitos preliminares para a demonstração dos Teoremas A e B, que é apresentada na Seção 5. Por fim, na Seção 6, fazemos algumas considerações finais.

2 Resultados Principais

Considere o polinômio

$$p(x) = x^3 + cx^2 + bx + a, \quad (4)$$

com coeficientes em $\mathbb{R}$ cujas raízes são $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$. Denotemos por $\Delta = c^2 - 3b$, $F(c, b, a) = [9(bc - 3a) - 2c^3]^2 - 4\Delta^3$, $x_1 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{3}$ e $x_2 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{3}$. O seguinte teorema fornece a caracterização das possíveis raízes de $p(x)$, assim como os possíveis sinais da parte real de suas raízes em função dos parâmetros a , b e c .

Teorema A Considere $p(x)$ dado em (4). As afirmações apresentadas nas Tabelas 2 e 3 são verdadeiras.

Tabela 2: Classificação dos tipos de raízes de um polinômio cúbico.

Espaço de parâmetros $(c, b, a) \in \mathbb{R}^3$	Raízes de p
$\Delta < 0$	$r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$
$\Delta = 0$ e $a = \left(\frac{c}{3}\right)^3$	$r_1 = r_2 = r_3 = -\frac{c}{3}$
$\Delta = 0$ e $a \neq \left(\frac{c}{3}\right)^3$	$r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$
$\Delta > 0$ e $F(c, b, a) < 0$	$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_i \neq r_j, \forall i \neq j$
$\Delta > 0$ e $F(c, b, a) = 0$	$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ com $r_1 = r_2 = x_1$ e $r_3 \neq x_1$, ou $r_1 = r_2 = x_2$ e $r_3 \neq x_2$
$\Delta > 0$ e $F(c, b, a) > 0$	$r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$

Fonte: elaborada pelos próprios autores

Tabela 3: Sinal da parte real das raízes de p em função dos parâmetros $c, b, a \in \mathbb{R}$.

$F(c, b, a) \leq 0$				$F(c, b, a) > 0$				
c	b	a	Sinal	c	b	a	$a - bc$	Sinal
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	-	$r_1 < 0, r_2 < 0$ e $r_3 > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	-	x	$\alpha < 0$ e $r_3 > 0$
$\mathbb{R}$	-	0	$r_1 < 0, r_2 = 0$ e $r_3 > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	+	x	$\alpha > 0$ e $r_3 < 0$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	+	$r_1 < 0, r_2 > 0$ e $r_3 > 0$	-	+	-	-	$\alpha < 0$ e $r_3 > 0$
-	0	0	$r_1 > 0$ e $r_2 = r_3 = 0$	-	+	-	0	$\alpha = 0$ e $r_3 > 0$
-	+	-	$r_1 > 0, r_2 > 0$ e $r_3 > 0$	-	+	-	+	$\alpha > 0$ e $r_3 > 0$
-	+	0	$r_1 > 0, r_2 > 0$ e $r_3 = 0$	-	+	0	x	$\alpha > 0$ e $r_3 = 0$
-	+	+	$r_1 < 0, r_2 > 0$ e $r_3 > 0$	$\mathbb{R}_-$	+	+	x	$\alpha > 0$ e $r_3 < 0$
+	0	0	$r_1 < 0$ e $r_2 = r_3 = 0$	0	+	0	x	$\alpha = r_3 = 0$
+	+	-	$r_1 < 0, r_2 < 0$ e $r_3 > 0$	$\mathbb{R}_+$	+	-	x	$\alpha < 0$ e $r_3 > 0$
+	+	0	$r_1 < 0, r_2 < 0$ e $r_3 = 0$	+	+	0	x	$\alpha < 0$ e $r_3 = 0$
+	+	+	$r_1 < 0, r_2 < 0$ e $r_3 < 0$	+	+	+	-	$\alpha < 0$ e $r_3 < 0$
0	0	0	$r_1 = r_2 = r_3 = 0$	+	+	+	0	$\alpha = 0$ e $r_3 < 0$
x	x	x	x	+	+	+	+	$\alpha > 0$ e $r_3 < 0$

Fonte: elaborada pelos próprios autores

Observação 1 Os símbolos -, 0 e + indicam que o parâmetro correspondente (ou $a - bc$) pode ser, respectivamente, negativo, nulo ou positivo. O símbolo x significa que não é necessário especificar. $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}^*$ denotam conjuntos no sentido usual: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$. A mesma notação se aplica às tabelas seguintes.

Observação 2 Se $(c, b, a) \in \mathbb{R}^3$ é tal que $\Delta < 0$ ou, $\Delta = 0$ e $a \neq \left(\frac{c}{3}\right)^3$, então $F(c, b, a) > 0$. Se $\Delta = 0$ e $a = \left(\frac{c}{3}\right)^3$ então $F(c, b, a) = 0$. Desta forma, podemos estender a função F em todo espaço de parâmetros de modo a classificar todos os tipos de raízes de p . Nesse sentido, a função F corresponde ao discriminante para classificar as raízes de um polinômio cúbico qualquer.

Observação 3 Na região do espaço de parâmetros onde $b < 0$, a conclusão que obtemos é que o sinal da parte real das raízes de p não depende da escolha do parâmetro c (ver Tabela 3). Em todos os casos, o sinal de uma raiz real de p é totalmente determinado pelo sinal de a ; enfatizamos este

fato nos casos em que $F(c, b, a) > 0$. Observamos que os octantes $c > 0, b > 0$ e $a > 0$ ou, $c < 0, b > 0$ e $a < 0$, são aqueles que apresentam maior dificuldade para determinar o sinal da parte real das raízes, já que precisamos recorrer ao sinal de $a - bc$ (ver Tabela 3). É importante notar que algumas regiões dos planos $a = 0, b = 0$ ou $c = 0$ não foram consideradas na Tabela 3; isto ocorre porque nessas regiões a restrição sob F não é satisfeita; por exemplo, quando $c = 0, b > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que $F(c, b, a) > 0$ então não faz sentido considerar essa região do espaço de parâmetros sob a hipótese de $F(c, b, a) \leq 0$.

Teorema B Considere o campo vetorial linear

$$\dot{X} = AX \quad (5)$$

dado em (2), com polinômio característico $p(\lambda) = -\lambda^3 + \tau\lambda^2 - s\lambda + d$, onde $\tau = \text{tr}(A)$, $s = s(A)$ e $d = \det(A)$ como em (3). A Tabela 4 apresenta os possíveis casos de estabilidade de $\vec{0} = (0, 0, 0)$ para (5) em função dos parâmetros $\tau, s, d \in \mathbb{R}$.

Tabela 4: Classificação de $\vec{0}$ para o campo vetorial linear (5) em função dos parâmetros $\tau, s, d \in \mathbb{R}$.

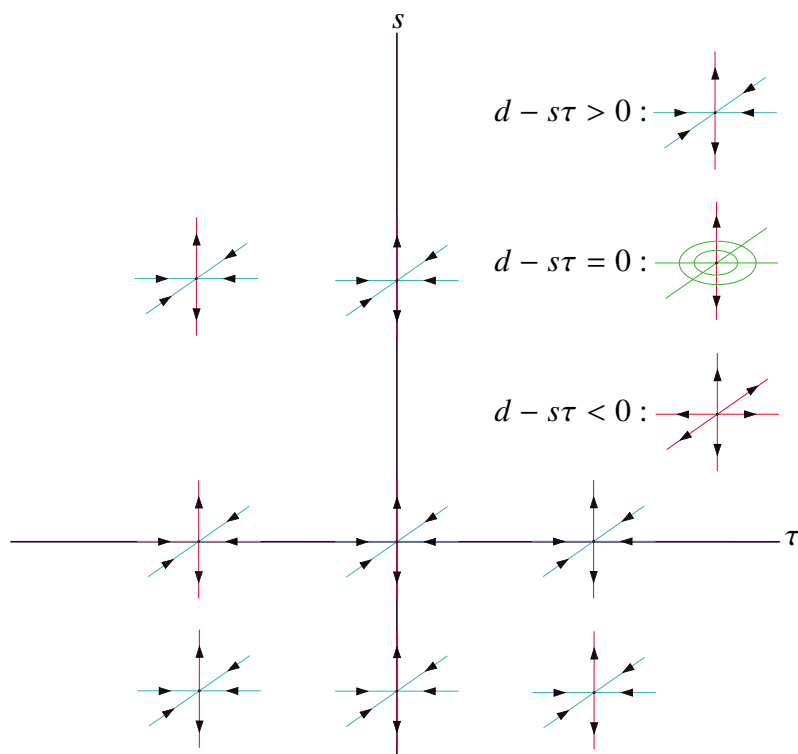
Classificação	τ	s	d	$d - s\tau$	N_-	N_+
Ponto de sela	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	+	x	2	1
Ponto de sela	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-$	-	x	1	2
Ponto de sela	$\mathbb{R}_-$	+	+	x	2	1
Ponto de sela	$\mathbb{R}_+$	+	-	x	1	2
Atrator	$\mathbb{R}_-$	+	-	+	3	0
Ponto de sela	$\mathbb{R}_-$	+	-	-	1	2
Ponto de sela	$\mathbb{R}_+$	+	+	+	2	1
Repulsor	$\mathbb{R}_+$	+	+	-	0	3
Degenerado	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	x	x	x
Não-hiperbólico e não-degenerado	$\mathbb{R}^*$	+	$\mathbb{R}^*$	0	x	x

Fonte: elaborada pelos próprios autores

Observação 4 Na tabela acima, N_- denota o número de raízes com parte real negativa e N_+ o número de raízes com parte real positiva.

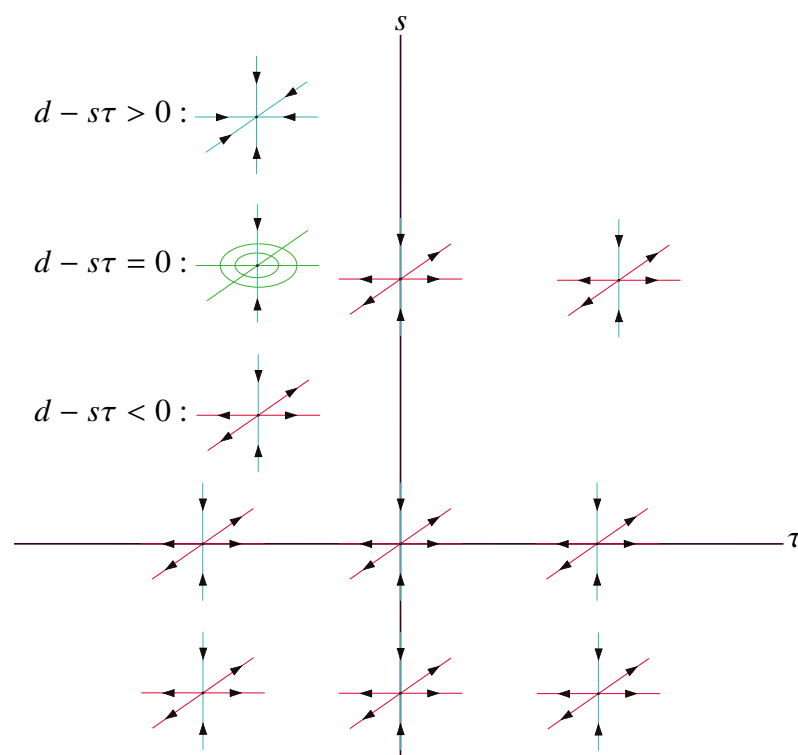
As Figuras 1 e 2 ilustram os dados da Tabela 4. Não consideramos o tipo das raízes nas ilustrações, sendo essa informação dada pela Tabela 2. Os Teoremas A e B são provados na Seção 5.

Figura 1: Ilustração geométrica dos dados da Tabela 4 - caso $d > 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Figura 2: Ilustração geométrica dos dados da Tabela 4 - caso $d < 0$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

3 Aplicações

Nesta seção, serão apresentados alguns exemplos que ilustram a aplicação do Teorema B.

Exemplo 1 Considere o Sistema de Rössler (ver [5]):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = \alpha y(1 - y) - \beta z, \end{cases} \quad (6)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Denote por F o campo vetorial associado ao sistema (6). Vamos estudar a natureza dos pontos de equilíbrio de F . No caso em que $\alpha = \beta = 0$, F possui uma reta de pontos de equilíbrio. Assim, não consideramos este caso na análise. Nos demais casos, os pontos de equilíbrio de F são: $q_1 = (0, 0, 0)$ se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ e $q_2 = \left(0, \frac{\beta+\alpha}{\alpha}, \frac{-\beta-\alpha}{\alpha}\right)$ se $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. A matriz Jacobiana do sistema é dada por:

$$J(F)|_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 2\alpha y & -\beta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

com $q \in \mathbb{R}^3$. Avaliando $J(F)$ no ponto de equilíbrio q_1 , obtemos

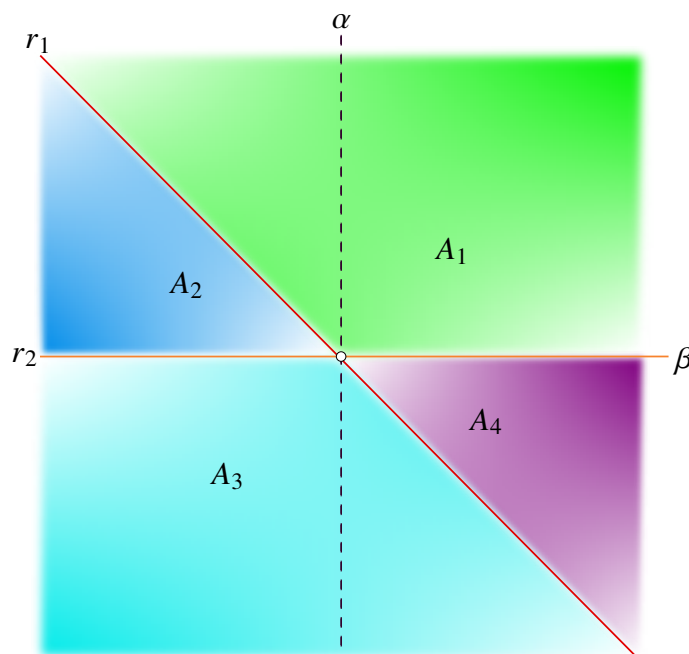
$$J(F)|_{q_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

onde $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. O polinômio característico de (8) é dado por $\tilde{p}_1(\lambda) = -\lambda^3 - \beta\lambda^2 - \lambda - (\beta + \alpha)$. Além disso,

$$\tilde{p}_1(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_1(\lambda) := \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda + (\beta + \alpha) = 0.$$

Vamos estudar o comportamento das raízes de p_1 a partir dos dados da Tabela 4. Considerando a notação utilizada nessa tabela, identificamos os seguintes parâmetros: $\tau = -\beta$, $s = 1$ e $d = -(\beta + \alpha)$. A partir dos dados da Tabela 4, obtemos quatro regiões no espaço de parâmetros de F onde há distinção na natureza de q_1 , mais a reta vermelha r_1 dada por $\alpha = -\beta$ e a reta laranja r_2 dada por $\alpha = 0$. A Figura 3 ilustra as retas e as quatro regiões do espaço de parâmetros de F . A seguir fazemos uma breve descrição de cada região e das retas do espaço de parâmetros de F considerando os dados da Tabela 4: A reta r_1 corresponde aos pontos do espaço de parâmetros que satisfazem $d = 0$, ou seja, nesses pontos q_1 é degenerado; a reta r_2 corresponde aos pontos do espaço de parâmetros que satisfazem $d - s\tau = -\alpha = 0$ e também cumpre as demais condições para que em seus pontos q_1 seja não-hiperbólico e não-degenerado; na região A_1 constatamos que q_1 é um ponto de sela com $N_- = 1$ e $N_+ = 2$; na região A_2 verificamos que q_1 é repulsor; na região A_3 constatamos que q_1 é um ponto de sela com $N_- = 2$ e $N_+ = 1$; na região A_4 verificamos que q_1 é atrator.

Figura 3: Regiões do espaço de parâmetros de F para a descrição da natureza de q_1 .



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Avaliando $J(F)$ em $q = q_2$, obtemos a seguinte matriz Jacobiana:

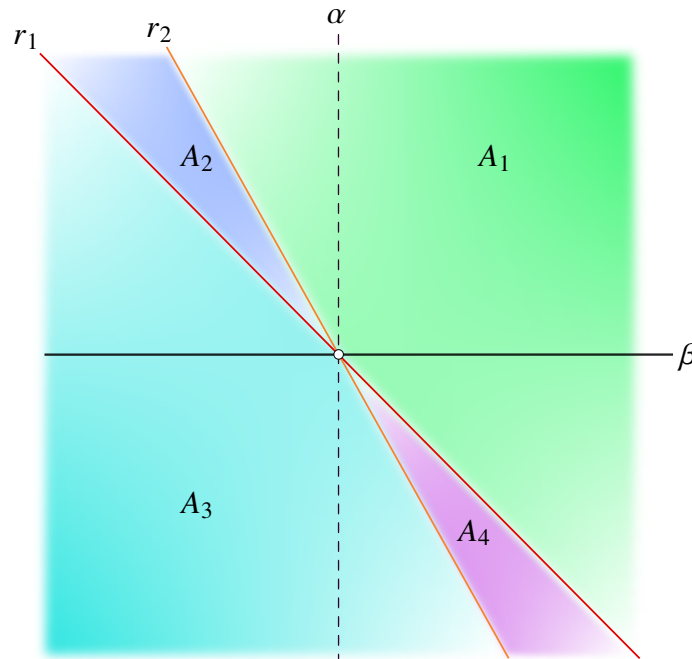
$$J(F)\big|_{q_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - 2\beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

onde $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. O polinômio característico de (9) é dado por $\tilde{p}_2(\lambda) = -\lambda^3 - \beta\lambda^2 - \lambda + (\beta + \alpha)$. Além disso,

$$\tilde{p}_2(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_2(\lambda) := \lambda^3 + \beta\lambda^2 + \lambda - (\beta + \alpha) = 0.$$

Agora, estudamos o comportamento das raízes de p_2 a partir dos dados da Tabela 4. Utilizando a mesma notação, temos que $\tau = -\beta$, $s = 1$ e $d = \beta + \alpha$. Assim como para q_1 , obtemos quatro regiões no espaço de parâmetros de F em que há distinção na natureza de q_2 , mais a reta vermelha r_1 dada por $\alpha = -\beta$ e a reta laranja r_2 dada por $\alpha = -2\beta$. A Figura 4, ilustra as retas e as quatro regiões do espaço de parâmetros de F . A seguir, descrevemos cada região e as retas do espaço de parâmetros de F considerando os dados da Tabela 4: a reta r_1 corresponde aos pontos do espaço de parâmetros que satisfazem $d = 0$, ou seja, nesses pontos q_2 é degenerado; a reta r_2 corresponde aos pontos do espaço de parâmetros que satisfazem $d - s\tau = \alpha + 2\beta = 0$ e também cumpre as demais condições para que em seus pontos q_2 seja não-hiperbólico e não-degenerado; na região A_1 constatamos que q_2 é um ponto de sela com $N_- = 2$ e $N_+ = 1$; na região A_2 verificamos que q_2 é repulsor; na região A_3 constatamos que q_2 é um ponto de sela com $N_- = 1$ e $N_+ = 2$; na região A_4 verificamos que q_2 é atrator. Para finalizar, observamos que o ponto q_2 não existe nos pontos $(\beta, 0) \in \mathbb{R}^2$, do espaço de parâmetros de F .

Figura 4: Regiões do espaço de parâmetros de F para a descrição da natureza de q_2 .



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Exemplo 2 Considere o Sistema de Lorenz (ver [6]):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y - \alpha x, \\ \dot{y} = \beta x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \theta z, \end{cases} \quad (10)$$

onde α, β e θ são constantes reais positivas.

Denote por F o campo vetorial associado ao sistema (10). Os pontos de equilíbrio de F são: $q_1 = (0, 0, 0)$, para todo $\alpha > 0, \beta > 0$ e $\theta > 0$ e, $q_2 = (\sqrt{\theta(\beta - 1)}, \sqrt{\theta(\beta - 1)}, \beta - 1)$ e $q_3 = (-\sqrt{\theta(\beta - 1)}, -\sqrt{\theta(\beta - 1)}, \beta - 1)$, se $\alpha > 0, \beta > 1$ e $\theta > 0$. A matriz Jacobiana de F é:

$$J(F)|_q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta - z & -1 & -x \\ y & x & -\theta \end{pmatrix}, \quad (11)$$

com $q \in \mathbb{R}^3$. Avaliando $J(F)$ em $q = q_1$, obtemos

$$J(F)|_{q_1} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

onde $\alpha > 0, \beta > 0$ e $\theta > 0$. O polinômio característico de (12) é dado por $p_1(\lambda) = (\theta + \lambda)[\alpha\beta - (\alpha + \lambda)(1 + \lambda)]$. As raízes de p_1 são $\lambda_{1,2} = \frac{-(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 + 4\alpha(\beta-1)}}{2}$ e $\lambda_3 = -\theta$. Note que se $0 < \beta < 1$,

então q_1 é um atrator; se $\beta > 1$, então q_1 é um ponto de sela com $N_- = 2$ e $N_+ = 1$. Avaliando $J(F)$ em $q = q_2$, obtemos

$$J(F)|_{q_2} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\theta(\beta-1)} \\ \sqrt{\theta(\beta-1)} & \sqrt{\theta(\beta-1)} & -\theta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

onde $\alpha > 0, \beta > 1$ e $\theta > 0$. O polinômio característico de (13) é dado por $\tilde{p}_2(\lambda) = -\lambda^3 - (\alpha + \theta + 1)\lambda^2 - \theta(\alpha + \beta)\lambda - 2\alpha\theta(\beta - 1)$. Além disso,

$$\tilde{p}_2(\lambda) = 0 \Leftrightarrow p_2(\lambda) := \lambda^3 + (\alpha + \theta + 1)\lambda^2 + \theta(\alpha + \beta)\lambda + 2\alpha\theta(\beta - 1) = 0.$$

Vamos estudar o comportamento das raízes de p_2 a partir dos dados da Tabela 4. Considerando a notação utilizada na Tabela 4, identificamos que $\tau = -(\alpha + \theta + 1)$, $s = \theta(\alpha + \beta)$ e $d = -2\alpha\theta(\beta - 1)$. Note que, independentemente da escolha feita para os parâmetros do campo, temos $\tau < 0$, $s > 0$ e $d < 0$. Pela Tabela 4, verificamos que:

- q_2 é um atrator se

$$d - s\tau = -2\alpha\theta(\beta - 1) + \theta(\alpha + \beta)(\alpha + \theta + 1) > 0 \Leftrightarrow 2\alpha(\beta - 1) - (\alpha + \beta)(\alpha + \theta + 1) < 0;$$

- q_2 é não-hiperbólico e não-degenerado se

$$2\alpha(\beta - 1) - (\alpha + \beta)(\alpha + \theta + 1) = 0;$$

- q_2 é ponto de sela com $N_+ = 2$ e $N_- = 1$ se

$$2\alpha(\beta - 1) - (\alpha + \beta)(\alpha + \theta + 1) > 0.$$

Note que q_3 possui a mesma natureza de q_2 , visto que seus polinômios característicos são iguais.

4 Preliminares

Nesta seção, são apresentados resultados essenciais para a demonstração dos Teoremas A e B.

Teorema 1 Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. O polinômio p tem exatamente n raízes $r_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, e pode ser escrito na forma fatorada como $p(x) = a_n(x - r_n)(x - r_{n-1}) \dots (x - r_2)(x - r_1)$.

Proposição 1 Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $r = \alpha + i\beta$ (com $\beta \neq 0$) é uma raiz de p , então $\bar{r} = \alpha - i\beta$ também é raiz de p .

O Teorema 1 e a Proposição 1 podem ser encontrados em [4].

Definição 1 Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Dizemos que $r \in \mathbb{C}$ é raiz de p com multiplicidade m se podemos escrever $p(x) = (x - r)^m q(x)$, onde q é um polinômio de grau $n - m$ e satisfaz $q(r) \neq 0$.

Proposição 2 Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Temos que r é raiz de p com multiplicidade $m \geq 2$ se, e somente se, r é raiz de p e raiz de p' com multiplicidade $m - 1$.

Demonstração. Se r é raiz de p com multiplicidade $m \geq 2$, do Teorema 1, segue que $p(x) = (x - r)^m q(x)$, onde q é um polinômio de grau $n - m$ e $q(r) \neq 0$. Derivando p , obtemos

$$p'(x) = (x - r)^{m-1} [mq(x) + (x - r)q'(x)]. \quad (14)$$

De (14), decorre que r é raiz de p' com multiplicidade $m - 1$. Reciprocamente, supomos que r é raiz de p e raiz de p' com multiplicidade $m - 1$. Temos que $p(x) = (x - r)q_1(x)$ e $p'(x) = (x - r)^{m-1}v(x)$, com $v(r) \neq 0$. Note que $p'(x) = q_1(x) + (x - r)q'_1(x)$, logo

$$q_1(x) + (x - r)q'_1(x) = (x - r)^{m-1}v(x), \quad (15)$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Tomando $x = r$, de (15), segue que $q_1(r) = 0$. Então podemos escrever $p(x) = (x - r)^2 q_2(x)$. Derivando p novamente, obtemos $p'(x) = (x - r)[2q_2(x) + (x - r)q'_2(x)]$. Assim,

$$(x - r)[2q_2(x) + (x - r)q'_2(x)] = (x - r)^{m-1}v(x) \Leftrightarrow (x - r)[2q_2(x) + (x - r)q'_2(x) - (x - r)^{m-2}v(x)] = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Então

$$2q_2(x) + (x - r)q'_2(x) - (x - r)^{m-2}v(x) = 0, \quad (16)$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Tomando $x = r$, de (16), segue que $q_2(r) = 0$. Então podemos escrever $p(x) = (x - r)^3 q_3(x)$. Repetindo esses argumentos mais $m - 3$ vezes, vamos concluir que $p(x) = (x - r)^m q_m(x)$, e por isso (como em (16))

$$mq_m(x) + (x - r)q'_m(x) - v(x) = 0, \quad (17)$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Tomando $x = r$, de (17), segue que $mq_m(r) = v(r) \neq 0$, logo $q_m(r) \neq 0$ e portanto r é raiz de p com multiplicidade m . $\square$

Corolário 1 Considere o polinômio $p(x) = x^3 + cx^2 + bx + a$, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Temos que r é raiz de p com multiplicidade 3 se, e somente se, $b = \frac{c^2}{3}$ e $a = \left(\frac{c}{3}\right)^3$. Além disso, a raiz com multiplicidade 3 é dada por $r = -\frac{c}{3}$.

Demonstração. Pela Proposição 2, r é raiz de p com multiplicidade 3 se, e somente se, $p(r) = 0$ e r é raiz de p' com multiplicidade 2. Mas, ainda pela Proposição 2, r é raiz de p' com multiplicidade 2 se, e somente se, $p'(r) = 0$ e r é raiz de p'' com multiplicidade 1. Portanto, r é raiz de p com multiplicidade 3 se, e somente se, $p(r) = p'(r) = p''(r) = 0$. Temos que $p'(x) = 3x^2 + 2cx + b$ e $p''(x) = 6x + 2c$. Logo,

$$\begin{aligned} p''(r) = 0 & \Leftrightarrow r = -\frac{c}{3}, \\ p'(r) = 0 & \Leftrightarrow b = \frac{c^2}{3}, \\ p(r) = 0 & \Leftrightarrow a = \left(\frac{c}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 3 Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 1$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente e portanto bijetiva na sua imagem. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente e portanto bijetiva na sua imagem.

A Proposição 3 é uma consequência imediata do Teorema do Valor Médio, que pode ser encontrado em [7].

Proposição 4 Considere os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $h(x, y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} x + a_{n-2} y^{n-2} x^2 + \cdots + a_1 y x^{n-1} + a_0 x^n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$. Temos que $r \in \mathbb{C}$ é raiz de p se, e somente se, h se anula nos pontos da reta $y = rx$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} h(x, rx) &= a_n x^n r^n + a_{n-1} x^n r^{n-1} + a_{n-2} x^n r^{n-2} + \cdots + a_1 x^n r + a_0 x^n \\ &= x^n (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_1 r + a_0) \\ &= x^n p(r). \end{aligned}$$

Logo, $p(r) = 0$ se, e somente se, $h(x, rx) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$. □

Corolário 2 Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com coeficientes em $\mathbb{C}$. Se $r \in \mathbb{C}$, $r \neq 0$, é raiz de p , então $\frac{1}{r}$ é raiz do polinômio $q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

Demonstração. Da proposição anterior sabemos que $h(x, rx) = x^n p(r)$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Então, podemos tomar $x = \frac{t}{r}$, com $t \in \mathbb{C}$, logo

$$h\left(\frac{t}{r}, t\right) = \frac{t^n}{r^n} p(r) = t^n \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{r} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{r^2} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{r^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{r^n} \right) = t^n q\left(\frac{1}{r}\right),$$

para todo $t \in \mathbb{C}$. Portanto, $q\left(\frac{1}{r}\right) = 0$. □

Corolário 3 Considere o polinômio

$$p(x) = x^3 + cx^2 + bx + a, \quad (18)$$

com coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $a = cb$ então as raízes de p são $r_{1,2} = \pm\sqrt{-b}$ e $r_3 = -c$.

Demonstração. Pela Proposição 4, segue que $r \in \mathbb{C}$ é raiz de p se, e somente se, $h(x, y) = y^3 + cy^2x + byx^2 + ax^3$ se anula nos pontos da reta $y = rx$, qualquer que seja $x \in \mathbb{C}$. Temos que $h(x, y) = \langle M \cdot v, u \rangle$, onde

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Pela hipótese, segue que $\det(M) = a - bc = 0$. Dessa forma, temos que 0 é autovalor de M e o auto-espaço associado é dado pela equação $cx + y = 0$, que nos leva a $y = -cx$. Assim, constatamos que $h(x, -cx) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$ e portanto $-c$ é raiz de p . Usando o operador adjunto de M , temos ainda que

$$h(x, y) = \langle v, M^T \cdot u \rangle := \langle f(x, y), g(x, y) \rangle.$$

De maneira similar ao que foi feito anteriormente, temos que $\det(M^T) = 0$, então 0 é autovalor de M^T e o auto-espaço associado é dado por $y = -bx$. Observamos que g não é linear, mas constatamos que seus zeros são obtidos a partir do auto-espaço de 0 associado a M^T . De fato, para cada $x \in \mathbb{C}$ devemos ter $y^2 = -bx^2$, logo $y = \pm\sqrt{-b}x$. Assim, temos que $h(x, \pm\sqrt{-b}x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}$ e portanto $r_{1,2} = \pm\sqrt{-b}$ são raízes de p . $\square$

Salientamos que existem várias formas de se provar o Corolário 3. A demonstração apresentada neste trabalho elucida a origem da hipótese $a = bc$, no contexto em que investigamos as soluções explícitas das raízes de p por um determinado ponto de vista algébrico.

5 Demonstração dos Teoremas A e B

5.1 Demonstração do Teorema A

Temos que:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) := x^3 + cx^2 + bx = -a.$$

Assim, obter as raízes de p é equivalente a determinar para quais valores $x \in \mathbb{C}$, a equação $f(x) = -a$ é satisfeita. Para essa equivalência, damos uma atenção especial aos valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem $f(x) = -a$. Temos que $f'(x) = 3x^2 + 2cx + b$. Note que $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3b}}{3}$. Denote por $\Delta = c^2 - 3b$. Vamos dividir a análise em casos:

I - Caso $\Delta < 0$.

Se $\Delta < 0$, então $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, pela Proposição 3, decorre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva, então existe um único número real r_3 tal que $f(r_3) = -a$. Afirmamos que r_3 é raiz de p com multiplicidade 1. De fato, se r_3 for raiz de p com multiplicidade 2, então p deve ter duas raízes reais distintas e portanto deve existir $u \in \mathbb{R}$ ($u \neq r_3$) tal que $f(u) = -a$, o que não pode ocorrer, pois f é estritamente crescente. Por outro lado, se r_3 for raiz de p com multiplicidade 3, então pelo Corolário 1, deveríamos ter

$$b = \frac{c^2}{3} \Leftrightarrow \Delta = c^2 - 3b = 0,$$

o que contradiz a hipótese de $\Delta < 0$. Portanto, as raízes de p são r_3 e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

II - Caso $\Delta = 0$.

Se $\Delta = 0$, então f' tem uma única raiz $\tilde{x} = -\frac{c}{3}$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \neq -\frac{c}{3}$. Note que $\tilde{x}$ é ponto crítico de f e também ponto de inflexão, pois $f''(\tilde{x}) = 0$ e f'' muda de sinal em $\tilde{x}$. Pela Proposição 3, segue que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva. Portanto, existe um único número real r_3 que satisfaz $f(r_3) = -a$. Neste caso, e com base no que foi discutido no caso anterior, r_3 tem multiplicidade 1 ou 3. Como foi mostrado no item anterior, a condição $\Delta = 0$ é equivalente a $b = \frac{c^2}{3}$, porém $b = \frac{c^2}{3}$ é uma condição necessária mas não suficiente para garantir que r_3 tem multiplicidade 3. Pelo Corolário 1, temos que r_3 é raiz de p com multiplicidade 3 se, e somente se, $\Delta = 0$ e $a = \left(\frac{c}{3}\right)^3$. Sabemos ainda que, neste caso, $r_1 = r_2 = r_3 = -\frac{c}{3}$. Nos casos em que $a \neq \left(\frac{c}{3}\right)^3$, segue que r_3 tem multiplicidade 1 e as demais raízes de p , r_1 e r_2 , são dadas por $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.

III - Caso $\Delta > 0$.

Se $\Delta > 0$, então f' tem duas raízes reais distintas

$$x_1 = \frac{-c - \sqrt{\Delta}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{\Delta}}{3}, \quad (20)$$

com $x_1 < x_2$.

Como f' é uma parábola, notamos que $f'(x) > 0$ para todo $x < x_1$ ou $x > x_2$; e $f'(x) < 0$ desde que $x_1 < x < x_2$. Assim, podemos concluir que x_1 é ponto de máximo local e x_2 é ponto de mínimo local para f . Além disso, observamos que a função f restrita nos conjuntos $I_1 = (-\infty, x_1)$, $I_2 = [x_1, x_2]$ e $I_3 = (x_2, \infty)$ é bijetiva na sua imagem correspondente, ou seja, $f_i : I_i \rightarrow f(I_i)$ dada por $f_i(x) = f(x)$ é bijetiva para todo $i = 1, 2, 3$. Temos que:

$$f(x_1) = \frac{2(c^3 + \omega^3) - 9bc}{27} \quad \text{e} \quad f(x_2) = \frac{2(c^3 - \omega^3) - 9bc}{27},$$

onde $\omega = \sqrt{\Delta}$. Note que $f(x_1) > f(x_2)$. Temos que $f(I_1) = (-\infty, f(x_1))$, $f(I_2) = [f(x_2), f(x_1)]$ e $f(I_3) = (f(x_2), \infty)$. Vamos analisar as possíveis relações de ordem entre $-a$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

III₁ - Caso $f(x_2) < -a < f(x_1)$.

Temos que:

$$\begin{aligned} f(x_2) < -a < f(x_1) &\Leftrightarrow \left| \frac{9bc - 27a}{2} - c^3 \right| < \omega^3 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{9bc - 27a}{2} - c^3 \right)^2 < \omega^6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{9bc - 27a}{2} - c^3 \right)^2 - \omega^6 < 0 \\ &\Leftrightarrow F(c, b, a) := [9(bc - 3a) - 2c^3]^2 - 4\Delta^3 < 0. \end{aligned}$$

Neste caso, observamos que $-a \in f(I_1) \cap f(I_2) \cap f(I_3)$. Logo, existem únicos $r_1 \in I_1$, $r_2 \in I_2$ e $r_3 \in I_3$ tais que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = -a$. Portanto, neste caso, p tem três raízes reais distintas: r_1 , r_2 e r_3 .

III₂ - Caso $f(x_1) = -a$ ou $f(x_2) = -a$.

Note que:

$$f(x_1) = -a \quad \text{ou} \quad f(x_2) = -a \quad \Leftrightarrow \quad F(c, b, a) = 0.$$

Neste caso, se $f(x_1) = -a$, então $r_1 = x_1$ é raiz de p . Sabendo que $f'(r_1) = p'(r_1) = 0$ e observando que r_1 é raiz de p' com multiplicidade 1 (pois $r_1 \neq r_2$), segue da Proposição 2 que r_1 é raiz de p com multiplicidade 2. Então $r_1 = r_2 = x_1$ e, pela Proposição 1, necessariamente r_3 é uma raiz real. Portanto, neste caso p tem três raízes reais r_1 , r_2 e r_3 , com $r_1 = r_2 = x_1 \in I_2$ e $r_3 \in I_3$. Se $f(x_2) = -a$, as conclusões são similares: obtemos $r_1 = r_2 = x_2 \in I_2$ e $r_3 \in I_1$.

III₃ - Caso $f(x_1) < -a$ ou $f(x_2) > -a$.

Note que:

$$f(x_1) < -a \text{ ou } f(x_2) > -a \Leftrightarrow F(c, b, a) > 0.$$

Se $f(x_1) < -a$, então $-a \in f(I_3)$ e $-a \notin f(I_1) \cup f(I_2)$, logo existe um único $r_3 \in I_3$ tal que $f(r_3) = -a$. Note que r_3 não pode ser uma raiz de p com multiplicidade 3, pois estamos no caso $\Delta > 0$. Além disso, r_3 também não pode ser raiz de p com multiplicidade 2, pois se fosse, teríamos $p'(r_3) = f'(r_3) = 0$, logo $r_3 = x_1$ ou $r_3 = x_2$, o que contradiz a hipótese. Portanto, as raízes de p são r_3 e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Se $f(x_2) > -a$, então $-a \in f(I_1)$ e $-a \notin f(I_2) \cup f(I_3)$, logo existe um único $r_3 \in I_1$ tal que $f(r_3) = -a$. Como na situação anterior, concluímos que r_3 é raiz de p com multiplicidade 1, e sendo a única raiz real, segue que r_1 e r_2 são necessariamente não reais. Portanto, as raízes de p são r_3 e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.

Com isso, finalizamos a classificação das possíveis raízes de um polinômio cúbico qualquer em função dos seus parâmetros, conforme compilado na Tabela 2 e na Observação 2. O próximo passo é analisar o sinal da parte real das raízes de p em cada uma das situações apresentadas na Tabela 2. Faremos então uma análise de casos:

A - Caso $F(c, b, a) < 0$.

Da Observação 2 segue que $\Delta > 0$. Note que $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{3}$. Logo,

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow b < 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow f' \text{ possui duas raízes distintas } x = 0 \text{ e } x = \tilde{x} \neq 0$$

e

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Leftrightarrow b > 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 \text{ e } x_2 < 0 \text{ ou } x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0.$$

Considerando o caso $b > 0$, observamos que

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{c^2 - 3b} < |c|,$$

então, de (20), segue que

$$c < 0 \Leftrightarrow x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0$$

e

$$c > 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 \text{ e } x_2 < 0.$$

Neste caso, como foi discutido anteriormente no caso III₁, sabemos que p possui três raízes reais distintas r_1, r_2 e r_3 tais que $r_1 \in I_1 = (-\infty, x_1)$, $r_2 \in I_2 = [x_1, x_2]$ e $r_3 \in I_3 = (x_2, \infty)$. Segue do Teorema 1, que p pode ser escrito como $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_3r_1 + r_3r_2 + r_1r_2)x - r_1r_2r_3$. Dessa forma, obtemos que $a = -r_1r_2r_3$.

Passamos então para uma análise de subcasos:

A₁ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a < 0$.

Como $b < 0$, então $x_1 < 0 < x_2$, logo $r_1 < 0$ e $r_3 > 0$. Por outro lado, $r_2 \in [x_1, x_2]$, então pode ser negativo, positivo ou zero. Mas neste caso

$$a < 0 \Leftrightarrow -r_1r_2r_3 < 0,$$

logo $r_2 < 0$. Portanto $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ e $r_3 > 0$.

A₂ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a > 0$.

Analogamente ao que foi feito no subcaso A₁, vamos concluir que $r_1 < 0$, $r_2 > 0$ e $r_3 > 0$.

A₃ - Subcaso $c < 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Como $b > 0$, então $x_1 x_2 > 0$, e como $c < 0$, segue que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Assim, $r_2 > 0$ e $r_3 > 0$. Sabendo que $a = -r_1 r_2 r_3$, segue que $r_1 > 0$.

A₄ - Subcaso $c < 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Análogo ao subcaso A₃. Obtemos $r_1 < 0$, $r_2 > 0$ e $r_3 > 0$.

A₅ - Subcaso $c > 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Como $b > 0$, então $x_1 x_2 > 0$, e como $c > 0$, segue que $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$. Assim, $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$. Sabendo que $a = -r_1 r_2 r_3$, segue que $r_3 > 0$.

A₆ - Subcaso $c > 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Análogo ao subcaso A₅. Obtemos $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ e $r_3 < 0$.

B - Caso $F(c, b, a) = 0$.

Segue da Observação 2 segue que $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$. Neste caso e nos casos seguintes, diferentemente do caso A, para a finalidade da análise não precisamos identificar em qual dos conjuntos I_1 , I_2 e I_3 estão as raízes de p . No caso $\Delta > 0$, como podemos verificar na Tabela 2, p possui duas raízes reais $r_1 = r_2 = r$ e r_3 , onde $r = x_1$ ou $r = x_2$. Pelo Teorema 1, podemos escrever $p(x) = (x - r)^2(x - r_3) = x^3 - (r_3 + 2r)x^2 + (r^2 + 2rr_3)x - r_3r^2$. Então, observamos que $a = -r_3r^2$ e $b = r^2 + 2rr_3$. Faremos uma análise de subcasos para $\Delta > 0$:

B₁ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a < 0$.

Como $a < 0$, segue que $r_3 > 0$. Sabendo que $r_3 > 0$ e $b < 0$, concluímos que $r < 0$.

B₂ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a > 0$.

Como $a > 0$, segue que $r_3 < 0$. Sabendo que $r_3 < 0$ e $b < 0$, concluímos que $r > 0$.

B₃ - Subcaso $c < 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Como $a < 0$, segue que $r_3 > 0$. Sabemos que $r = x_1$ ou $r = x_2$, onde

$$x_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 3b}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 3b}}{3}.$$

Como $c < 0$ e $b > 0$, segue que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Portanto $r > 0$.

B₄ - Subcaso $c < 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Análogo ao subcaso B₃. Vamos concluir que $r_3 < 0$, $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, portanto $r > 0$.

B₅ - Subcaso $c > 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Análogo ao subcaso B₃. Vamos concluir que $r_3 > 0$, $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, portanto $r < 0$.

B₆ - Subcaso $c > 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Análogo ao subcaso B₃. Vamos concluir que $r_3 < 0$, $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, portanto $r < 0$.

Para $\Delta = 0$, sabendo que $F(c, b, a) = 0$, segue que $a = \left(\frac{c}{3}\right)^3$. Da Tabela 2, verificamos que p tem somente uma raiz real r com multiplicidade 3. Sabemos também que $r = -\frac{c}{3}$. Portanto, $r > 0$ se $c < 0$ e, $r < 0$ se $c > 0$.

C - Caso $F(c, b, a) > 0$.

Neste caso, pela Tabela 2 e a Observação 2, segue que p possui raízes $r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Então podemos escrever p como

$$p(x) = (x - r_3)(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = x^3 - (r_3 + 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha r_3)x - r_3(\alpha^2 + \beta^2).$$

Observamos que $c = -(r_3 + 2\alpha)$, $b = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha r_3$ e $a = -r_3(\alpha^2 + \beta^2)$. Faremos uma análise de subcasos:

C₁ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a < 0$.

Como $a < 0$ e $b < 0$, respectivamente, concluimos que $r_3 > 0$ e $\alpha < 0$.

C₂ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$, $b < 0$ e $a > 0$.

Como $a > 0$ e $b < 0$, respectivamente, concluimos que $r_3 < 0$ e $\alpha > 0$.

C₃ - Subcaso $b > 0$ e $c, a \in \mathbb{R}$.

Este subcaso é diferente dos demais, pois não conseguimos resolvê-lo apenas usando os dados da Tabela 2 e o Teorema 1. Note que se $a < 0$, então $r_3 > 0$; se $a > 0$, $r_3 < 0$ e se $a = 0$, $r_3 = 0$. Para determinarmos o sinal de α , que corresponde às raízes r_1 e r_2 , vamos recorrer ao Corolário 3. A família de polinômios p satisfazendo $a = bc$ possui uma propriedade de destaque: todo polinômio cúbico com raízes não reais e parte real nula pertence a esta família. Mais especificadamente, esses polinômios são caracterizados por $a = bc$, com $b > 0$. Esta propriedade nos motiva a definir uma função auxiliar $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\xi(c, b, a) = a - bc. \quad (21)$$

Como estamos no caso $F(c, b, a) > 0$, podemos escrever $\xi(c, b, a) = 2\alpha[(\alpha + r_3)^2 + \beta^2]$. Logo,

$$\xi(c, b, a) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0 \Leftrightarrow a > bc;$$

$$\xi(c, b, a) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow a = bc;$$

e

$$\xi(c, b, a) < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0 \Leftrightarrow a < bc.$$

Com isto, obtemos uma caracterização completa do sinal de α na região do espaço de parâmetros onde $b > 0$. Observamos ainda, que se $c < 0$, $b > 0$ e $a > 0$ então $\alpha > 0$. E se $c > 0$, $b > 0$ e $a < 0$ então $\alpha < 0$.

Nos casos a seguir analisamos o que ocorre em cada um dos planos coordenados do espaço de parâmetros de p .

D - Caso $b = 0$ e $a, c \in \mathbb{R}$.

Neste caso vamos analisar todas as possíveis configurações para nosso problema no plano $b = 0$ do espaço de parâmetros. Temos que $F(c, 0, a) = (27a + 2c^3)^2 - (2c^3)^2 = 27a(27a + 4c^3)$. Então, $F(c, 0, a) < 0$ se

$$27a < 0 \text{ e } 27a + 4c^3 > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } a > -\frac{4c^3}{27} \Rightarrow c > 0$$

ou

$$27a > 0 \text{ e } 27a + 4c^3 < 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } a < -\frac{4c^3}{27} \Rightarrow c < 0;$$

$$F(c, 0, a) = 0 \text{ se } a = 0 \text{ ou } a = -\frac{4c^3}{27};$$

e $F(c, 0, a) > 0$ se

$$a > 0 \text{ e } c \geq 0,$$

$$a < 0 \text{ e } c \leq 0,$$

$$27a < 0 \text{ e } 27a + 4c^3 < 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } a < -\frac{4c^3}{27} \Rightarrow c > 0$$

ou

$$27a > 0 \text{ e } 27a + 4c^3 > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } a > -\frac{4c^3}{27} \Rightarrow c < 0.$$

Faremos uma análise de subcasos no plano $b = 0$:

D₁ - Subcaso $a < 0, c > 0$ e $F(c, 0, a) < 0$ ou $a > 0, c < 0$ e $F(c, 0, a) < 0$.

Se $a < 0$ e $c > 0$ vamos ter que $x_1 = -\frac{2c}{3} < 0$ e $x_2 = 0$. Assim, $r_1 < 0$ e $r_3 > 0$. Por outro lado, $r_2 = 0$ ou $r_2 < 0$. Como $a < 0$ e $a = -r_1 r_2 r_3$, segue que $r_2 < 0$. Se $a > 0$ e $c < 0$ vamos ter que $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{2c}{3} > 0$. Assim, $r_1 < 0$ e $r_3 > 0$. Por outro lado, $r_2 = 0$ ou $r_2 > 0$. Como $a > 0$ e $a = -r_1 r_2 r_3$, segue que $r_2 > 0$.

D₂ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$ e $a = 0$ ou $c \in \mathbb{R}^*$ e $a = -\frac{4c^3}{27}$.

Se $c \in \mathbb{R}$ e $b = a = 0$, escrevemos p como $p(x) = x^3 + cx^2$, logo $r_1 = r_2 = 0$ e $r_3 = -c$. Então se $c > 0, r_3 < 0$; se $c < 0, r_3 > 0$; se $c = 0, r_3 = 0$.

Se $c \in \mathbb{R}^*$ e $a = -\frac{4c^3}{27}$ então $F(c, 0, a) = 0$, pela Tabela 2 segue que $r = x_1$ ou $r = x_2$ é raiz de p com multiplicidade 2. Se $c < 0$, então $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{2c}{3} > 0$, logo $r = x_2$ (pois $a \neq 0$); como $a > 0$, então $r_3 < 0$ (pois $a = -r_3 r^2$). Analogamente, se $c > 0$, então $x_1 = -\frac{2c}{3} < 0$ e $x_2 = 0$, logo $r = x_1$; como $a < 0$, então $r_3 > 0$.

D₃ - Subcaso $c \in \mathbb{R}, a < 0$ e $F(c, 0, a) > 0$ ou $c \in \mathbb{R}, a > 0$ e $F(c, 0, a) > 0$.

Como $F(c, 0, a) > 0$, pela Tabela 2 e a Observação 2, verificamos que $r_3 \in \mathbb{R}$ e $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Então podemos recorrer à função ξ dada em (21). Temos que $\xi(c, 0, a) = a = 2\alpha[(\alpha + r_3)^2 + \beta^2]$. Como consequência da análise apresentada no subcaso C₃, segue que

$$a < 0 \Rightarrow r_3 > 0 \text{ e } \alpha < 0$$

e

$$a > 0 \Rightarrow r_3 < 0 \text{ e } \alpha > 0.$$

E - Caso $a = 0$ e $c, b \in \mathbb{R}$.

Restringindo F nos pontos do plano $a = 0$, obtemos $F(c, b, 0) = 27b^2(4b - c^2)$. Então, $F(c, b, 0) < 0$ se $b < 0$ e $c \in \mathbb{R}$ ou, $b > 0$ e $b < \frac{c^2}{4}$. Além disso, $F(c, b, 0) = 0$ se $b = 0$ ou $b = \frac{c^2}{4}$ e $F(c, b, 0) > 0$ se $b > \frac{c^2}{4}$.

Faremos uma análise de subcasos no plano $a = 0$:

E₁ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$ e $b < 0$.

Análogo ao subcaso A₁. Concluimos que $r_1 < 0$, $r_2 = 0$ e $r_3 > 0$.

E₂ - Subcaso $c < 0$, $b > 0$ e $b < \frac{c^2}{4}$.

Análogo ao subcaso A₃. Concluimos que $r_1 = 0$ e $r_2, r_3 > 0$.

E₃ - Subcaso $c > 0$, $b > 0$ e $b < \frac{c^2}{4}$.

Análogo ao subcaso A₅. Concluimos que $r_1, r_2 < 0$ e $r_3 = 0$.

E₄ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$ e $b = 0$.

Este subcaso foi analisado em D₂.

E₅ - Subcaso $c \in \mathbb{R}^*$ e $b = \frac{c^2}{4}$.

Se $c \in \mathbb{R}^*$ e $b = \frac{c^2}{4}$ então $F(c, b, 0) = 0$, pela Tabela 2, segue que $r = x_1$ ou $r = x_2$ é raiz de p com multiplicidade 2. Se $c < 0$, então $x_1 = -\frac{c}{6} > 0$ e $x_2 = -\frac{c}{2} > 0$, logo $r > 0$; como $a = 0$, então $r_3 = 0$ (pois $a = -r_3 r^2$). Analogamente, se $c > 0$, então $x_1 = -\frac{c}{2} < 0$ e $x_2 = -\frac{c}{6} < 0$, logo $r < 0$; como $a = 0$, então $r_3 = 0$.

E₆ - Subcaso $c \in \mathbb{R}$ e $b > \frac{c^2}{4}$.

Este subcaso foi analisado implicitamente em C₃.

F - Caso $c = 0$ e $b, a \in \mathbb{R}$.

Restringindo F nos pontos do plano $c = 0$, obtemos $F(0, b, a) = 729a^2 + 108b^3$.

Faremos uma análise de subcasos no plano $c = 0$:

F₁ - Subcaso $b > 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Este subcaso é analisado implicitamente em C₃, visto que $F(0, b, a) > 0$.

F₂ - Subcaso $b < 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Este subcaso foi analisado implicitamente em A₁, A₂, B₁, B₂, C₁ e C₂; com exceção do caso $c = 0$, $b < 0$ e $a = 0$, que é analisado implicitamente em E₁.

F_3 - Subcaso $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Este subcaso foi analisado implicitamente em D_3 .

A Tabela 3 e a Observação 3 apresentam os resultados obtidos na análise dos casos A, B, C, D, E e F. $\square$

5.2 Demonstração do Teorema B

A seguir, enunciamos e provamos uma proposição fundamental para a demonstração do Teorema B, que é apresentada logo a seguir.

Proposição 5 Considere o polinômio $p(x) = x^3 + cx^2 + bx + a$, com coeficientes em $\mathbb{R}$ e $F(c, b, a) = [9(bc - 3a) - 2c^3]^2 - 4\Delta^3$, onde $\Delta = c^2 - 3b$. Seja $(c, b, a) \in \mathbb{R}^3$ um ponto do espaço de parâmetros de p . Se $c \leq 0$, $b > 0$ e $a - bc < 0$ ou, $c \geq 0$, $b > 0$ e $a - bc > 0$ então $F(c, b, a) > 0$.

Demonstração. Podemos reescrever F como $F(c, b, a) = 729a^2 - 486abc + 108(ac^3 + b^3) - 27b^2c^2$. No primeiro caso temos $c \leq 0$, $b > 0$ e $a - bc < 0$. Assim,

$$a < bc \leq 0 \Rightarrow a < 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq -bc < -a &\Leftrightarrow (bc)^2 < a^2 \\ &\Leftrightarrow -27(bc)^2 > -27a^2 \\ &\Leftrightarrow F(c, b, a) > a(702a - 486bc) + 108(ac^3 + b^3). \end{aligned}$$

Note que $702a < 702bc \leq 486bc$, pois $bc \leq 0$. Logo,

$$702a - 486bc < 0 \Leftrightarrow a(702a - 486bc) > 0,$$

pois $a < 0$. Além disso, como $a < 0$, $c \leq 0$ e $b > 0$ segue que $ac^3 \geq 0$ e $b^3 > 0$. Assim, $108(ac^3 + b^3) > 0$. Portanto, $F(c, b, a) > a(702a - 486bc) + 108(ac^3 + b^3) > 0$.

O outro caso é totalmente análogo. $\square$

Demonstração do Teorema B.

Temos que:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \tau\lambda^2 + s\lambda - d = 0.$$

Considerando a notação utilizada no Teorema A, identificamos que $c = -\tau$, $b = s$ e $a = -d$. A partir das Tabelas 1 e 3, faremos uma análise de casos para determinar a natureza de $\vec{0}$ para (5):

X_1 - Caso $c \in \mathbb{R}$, $b \leq 0$ e $a \neq 0$.

Pela Tabela 3, independentemente do valor de $F(c, b, a)$, segue que $\vec{0}$ é ponto de sela.

X_2 - Caso $c \geq 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Pela Tabela 3, independentemente do valor de $F(c, b, a)$, segue que $\vec{0}$ é ponto de sela.

X_3 - Caso $c \leq 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Pela Tabela 3, independentemente do valor de $F(c, b, a)$, segue que $\vec{0}$ é ponto de sela.

X_4 - Caso $c \geq 0$, $b > 0$ e $a > 0$.

Pela Proposição 5, se $a - bc > 0$, então $F(c, b, a) > 0$. Assim, pela Tabela 3, concluímos que $\vec{0}$ é ponto de sela. Por outro lado se $a - bc < 0$, independentemente do valor de $F(c, b, a)$, concluímos que $\vec{0}$ é atrator.

X_5 - Caso $c \leq 0$, $b > 0$ e $a < 0$.

Pela Proposição 5, se $a - bc < 0$, então $F(c, b, a) > 0$. Assim, pela Tabela 3, concluímos que $\vec{0}$ é ponto de sela. Por outro lado se $a - bc > 0$, independentemente do valor de $F(c, b, a)$, concluímos que $\vec{0}$ é repulsor.

X_6 - Caso $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a = 0$.

Como $a = 0$, então zero é raiz de p e portanto $\vec{0}$ é degenerado.

X_7 - Caso $c \in \mathbb{R}^*$, $b > 0$, $a \in \mathbb{R}^*$ e $a - bc = 0$.

Pelo Corolário 3, as raízes de p são: $r_3 = -c \neq 0$ e $r_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$. Portanto, $\vec{0}$ é não-degenerado e não-hiperbólico.

A Tabela 4 fornece as possíveis classificações de $\vec{0}$ para a equação (5) em função de $\tau, s, d \in \mathbb{R}$. Além disso, utilizando os dados da Tabela 3, identificamos o número de raízes com parte real negativa e o número de raízes com parte real positiva. $\square$

6 Considerações finais

Os resultados apresentados neste trabalho contribuem para o estudo de bifurcações de campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$. As Tabelas 2 e 4 fornecem uma descrição completa do diagrama de bifurcações para campos vetoriais lineares no $\mathbb{R}^3$. Além disso, as aplicações mostram como é possível utilizar os dados da Tabela 4 para estudar a natureza dos pontos de equilíbrio de campos vetoriais definidos a partir de um ou mais parâmetros, em função dos seus parâmetros.

Como motivação para trabalhos futuros, incentivamos um estudo análogo para campos vetoriais em $\mathbb{R}^4$ e talvez uma generalização ainda maior, para o caso n -dimensional. Salientamos que uma tentativa de generalização dos resultados obtidos para $\mathbb{R}^4$ foi considerada. No entanto, a análise não pôde ser reproduzida de forma imediatamente análoga, visto que seria necessário um conhecimento completo e claro sobre o comportamento das raízes de um polinômio cúbico qualquer. Nesse sentido, seria fundamental uma boa expressão algébrica para as raízes de um polinômio cúbico genérico, assim como temos para as raízes de polinômios quadráticos.

Acknowledgments. Durval José Tonon is partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq Grant 310362/2021-0). Luan Lima da Silva is partially supported by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES [Finance Code 001].

Referências

- [1] SOTOMAYOR, J. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [2] KUEHN, C. **Multiple time scale dynamics**. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [3] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra linear**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [4] BURNSIDE, W. S.; PANTON, A. W. **The theory of equations**: with an introduction to the theory of binary algebraic forms. Dublin: Hodges Figgis, 1892.
- [5] GARCIA, I. A.; LLIBRE, J.; MAZA, S. Periodic orbits and their stability in the rössler prototype-4 system. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 376, n. 33, p. 2234–2237, mai. 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960112006159>. Acesso em: 03 jul. 2025.
- [6] KAPER, H.; ENGLER, H. **Mathematics and climate**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
- [7] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2022. v. 1.