Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

# A sequência de Pell no anel tricomplexo

The Pell sequence in the tricomplex ring

**Eudes Antonio Costa**
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, eudes@uft.edu.br

**Francival Santos Monteiro**
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias

**Vitor Manoel Alves de Souza**
Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias

**Douglas Catulio dos Santos**
Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Barreiras

**Resumo**

Neste estudo definimos e investigamos uma nova sequência do tipo Pell, perpetrada por uma recorrência linear de segunda ordem a qual especifica a sequência de Horadam. Aqui, apresentamos, estudamos e analisamos resultados referentes a esta nova família de sequências de Pell. O principal objetivo deste artigo é exibir uma conexão entre os números Tricomplexos de Pell e os números do tipo Pell.
**Palavras-chave:** sequência de Pell; sequência tricomplexa de Pell; identidade de Tagiuri-Vajda; somas parciais.

**Abstract**

In this study we investigate a Pell-type sequence, perpetrated by a second-order linear recurrence which specifies the Horadam sequence. Here, we present, study and analyze results concerning this new family of Pell sequences. The main aim of this article is to show a connection between Pell's tricomplex numbers and Pell-type numbers.
**Keywords:** Pell sequence; tricomplex Pell sequence; Tagiuri-Vajda's identity; partial sums.

Artigo recebido em dez. 2024 e aceito em jul. 2025

# 1 Introdução

John Pell (1611-1685) foi um matemático inglês que fez contribuições significativas para a matemática, em especial no estudo das equações diofantinas da forma $x^2 - ny^2 = (\pm 1)^n$. De acordo com Koshy (2014) tal equação está associada ao conjunto de números $\{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots\}$, a qual pode ser definida pela relação de recorrência $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$. Esta sequência é conhecida como a sequência dos números de Pell, ou simplesmente, sequência de Pell.

Para todo número inteiro não negativo $n$ a sequência de Pell $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é definida como $P_{n+2} = P_n + P_{n+1}$ para $n \geq 0$, com valores iniciais $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, é a sequência *A001356* em OEIS (Sloane, 2024). Alterando os valores iniciais da recorrência de Pell, obtemos outras sequências numéricas. Por exemplo, seja $Q_n$ o $n$-ésimo termo de uma sequência com $Q_0 = 1, Q_1 = 1$ e $Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n$ para $n \geq 0$. A sequência resultante é dada pelos elementos $1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, \ldots$, e é denominada como a sequência de Pell–Lucas, a sequência *A001356* em OEIS (Sloane, 2024). Note que tanto $P_n$ quanto $Q_n$ satisfazem a mesma relação de recorrência. De acordo com Bicknell (1975), tanto os números de Pell quanto os de Pell–Lucas possuem propriedades similares às das sequências de Fibonacci e Fibonacci–Lucas, porém são menos difundidas e exploradas.

Neste artigo, introduzimos uma nova família de sequências associadas à Sequência de Pell; a qual nomeamos de *sequência Tricomplexa de Pell*. Diferentemente de outras variações, esta nova extensão depende de dois vetores reais com três coordenadas usados em uma relação de recorrência vetorial linear.

Este artigo explora a relação entre os números Tricomplexos de Pell e os números do tipo Pell (números de Pell ou Pell–Lucas) e está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2, faremos uma introdução ao anel tricomplexo $\mathbb{T}$ e uma retomada da sequência de Pell, com resultados relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 3 definimos uma extensão do conceito de números do tipo Pell, apresentando a *sequência Tricomplexa de Pell*, denotada por $TP_n^*$, no anel $(\mathbb{T}, +, \times)$. Além de estabelecermos uma relação de recorrência homogênea, exibimos a fórmula do tipo Binet e as funções geradora ordinária e exponencial para $TP_n^*$. Na Seção 4, exploraremos várias identidades clássicas para os números Tricomplexos de Pell, como Tagiuri-Vajda, d'Ocagene, Catalan e consequências. Finalmente, na Seção 5, analisamos algumas somas parciais de termos envolvendo os números Tricomplexos de Pell.

# 2 Antecedentes e resultados preliminares

Esta seção contém duas subseções bastante distintas, na primeira faremos uma pequena introdução ao anel tricomplexo $\mathbb{T}$ para estruturar o anel numérico que realizamos nossa investigação; estudos mais detalhados podem ser encontrados nas referências indicadas. Neste mesmo ínterim, na subseção posterior, retomamos a sequência de Pell e listamos alguns resultados que faremos uso no desenvolvimento deste.

## 2.1 O anel tricomplexo

Ao longo do tempo, muitos pesquisadores se interessaram pelo estudo de anéis[1] análogos ao anel dos números inteiros, nos quais possam também ser desenvolvidos conceitos aritméticos. Dentre eles, destacamos o anel dos inteiros gaussianos, cujo estudo tem origem nas investigações de Gauss

[1]Conjunto não vazio com duas operações binárias sujeito às leis básicas da aritmética.

sobre reciprocidade cúbica e biquadrática. O que torna esse anel interessante é o fato de que muitos resultados da aritmética em números inteiros gaussianos são análogos aos resultados da aritmética em números inteiros e, além disso, pode ser representado geometricamente como pontos discretos no plano cartesiano. Detalhes adicionais podem ser consultados em Merzbach e Boyer (2011), Domingues e Iezzi (2003), Milies (2004), entre outros.

Neste contexto, recentemente Olariu (2000, 2002) apresentou um anel imerso no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ e denominou de anel tricomplexo, como sendo uma extensão do conjunto dos números complexos. Posteriormente Mondal e Pramanik (2015) definiram uma função relacionada ao sistema de números tricomplexos para determinar o grau de semelhança entre conjuntos neutrosóficos aproximados. E exibem um exemplo numérico que demonstra a aplicabilidade da abordagem proposta. Em língua portuguesa, Deus, J. Ottoni e A. Ottoni (2024) fazem um estudo da estrutura algébrica do anel dos números tricomplexos $\mathbb{T}$, qual seja: o conjunto de triplas ordenadas de números reais $(x, y, z)$, com as operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\times)$ definidas por:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{1}$$

e

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2), \tag{2}$$

em que $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, para $i = 1, 2$ e 3.

Como sabemos, os números complexos $\mathbb{C}$ têm uma parte real e uma parte imaginária, visto que $\alpha \in \mathbb{C}$ é um elemento da forma $\alpha = x + yi$, sendo $i$ a unidade imaginária satisfazendo a condição que $i^2 = -1$. E mais, existe um isomorfismo entre os complexos $\mathbb{C}$ e e o plano bidimensional $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, de forma que $\alpha = x + yi$ pode ser identificado com o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como pode ser consultado em Merzbach e Boyer (2011) ou Domingues e Iezzi (2003), e em outras referências.

Um número tricomplexo pode ser entendido como uma extensão dos complexos, e é um elemento de um sistema numérico que estende os números complexos de forma que os números tricomplexos têm duas partes imaginárias e uma parte real. Olariu (2000, 2002) introduziu o conceito de números tricomplexos que é expresso na forma $(a, b, c) = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$, sendo $a$, $b$, e $c$ são números reais e $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são unidades imaginárias. De acordo com a regra de multiplicação para as unidades tricomplexas $1, \mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ dada pela Tabela 2.1:

Tabela 2.1: A tabela de multiplicação das unidades imaginárias do tricomplex

| $\times$ | 1 | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ |
| $\mathbf{i}$ | $\mathbf{i}$ | $\mathbf{j}$ | 1 |
| $\mathbf{j}$ | $\mathbf{j}$ | 1 | $\mathbf{i}$ |

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a Equação (1) a adição de dois números tricomplexos $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ é o número tricomplexo $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. E, segue da Equação (2), a multiplicação dos números tricomplexos $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ é o número tricomplexo $(x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2)$. Portanto, os números tricomplexos e suas operações podem ser representados por $\mathbb{T} = (\mathbb{T}, +, \times)$. Pode ser verificado por meio de cálculo direto que o zero tricomplexo é $(0, 0, 0)$, denotado simplesmente 0, e a unidade tricomplexa é $(1, 0, 0)$, denotada simplesmente 1. E mais, pode ser verificado que $\mathbb{T}$ é o anel comutativo e unitário; veja (Costa; Souza, 2025); (Olariu, 2000 ); (Olariu, 2002) ou (Deus; Ottoni, J.; Ottoni, A., 2024).

O anel tricomplexo, quando comparado aos quatérnios, ganha comutatividade na multiplicação; no entanto, perde a propriedade de divisibilidade em relação aos quatérnios. Ademais, os quatérnios têm aplicações em espaços tridimensionais, por exemplo, na representação de rotações e transformações geométricas, utilizadas em robótica, computação gráfica, mecânica celeste e outras áreas afins. Por fim, os números tricomplexos poderão ser úteis em certos contextos matemáticos, particularmente no estudo de sistemas tridimensionais, o que poderá levar à modelação de outros problemas em espaços tridimensionais. Eles também podem ter aplicações em física e engenharia, onde sistemas tridimensionais são comuns. Algumas aplicações podem ser encontradas em (Mondal; Pramanik, 2015) ou (Richter, 2022). Recentemente, Costa, Catarino, Monteiro, Sousa e Santos (2024) apresentaram um estudo acerca da sequência de Fibonacci tricomplexa, ou seja, uma sequência do tipo Fibonacci (mesma recorrência) no conjunto $\mathbb{T}$ dos números tricomplexos, obtendo propriedades similares à sequência de Fibonacci ordinária e outros resultados interessantes. Aquela extensão origina uma nova família de sequências vetoriais, ou seja, um elemento é um vetor com três coordenadas. E em Costa, Catarino e Santos (2025) os autores examinam as propriedades de simetria da sequência repunidade tricomplexa em relação às que conhecemos para a sequência repunidade clássica.

## 2.2 A sequência de Pell

Atualmente, a exploração de sequências numéricas clássicas em diversos conjuntos para além dos inteiros tem despertado o interesse dos entusiastas e diletantes da teoria dos números, descobrindo novas propriedades e potenciais aplicações. Em alguns deste trabalho encontramos algumas identidades interessantes para a sequência de Pell. Revisando a literatura, encontramos alguns trabalhos que estendem ou generalizam a sequência de Pell em diversos contextos. Uma generalização da sequência de Pell pode envolver a modificação da relação de recorrência, das condições iniciais ou a sua extensão a outros sistemas numéricos, como os números complexos, os quatérnios ou outras estruturas algébricas. Por exemplo, Kiliç (2009) define uma generalização designada por $(p, i)$-números de Pell, investiga suas propriedades e apresenta sua representação matricial. Mangueira e Alves (2020) estudam os números híbridos (de Fibonacci e) de Pell, algumas propriedades, bem como sua forma matricial. Soykan e Gocen (2020) apresentam um estudo acerca das propriedades dos números hiperbólicos de Pell generalizados. Os autores Bravo, Herrera e Luca (2021) definem e exploram propriedades da generalização da sequência de Pell denominada sequência de Pell $k$-generalizada que é gerada por uma relação de recorrência de ordem superior. Spreafico e Rachid (2021) investigam os números de Pell generalizados de ordem $r \geq 2$ por meio das propriedades do seu sistema fundamental. Em Çelik, Durukan e Özkan (2021) apresentam uma nova recorrência para os números de Pell, colocando-os no sentido dos ponteiros do relógio nos vértices dos polígonos com um número correspondente a cada vértice. Costa e Santos (2022) apresentam uma revisão bibliográfica acerca das propriedades desta sequência numérica, bem como caracterizam um divisor ímpar do termo $P_n$, sendo $n$ ímpar e $P_n$ composto.

Para simplificar a notação, utilizaremos $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ para representar $P_n$ ou $Q_n$. Assim, a sequência $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ é do tipo Pell, satisfazendo a relação de recorrência

$$P_{n+2}^* = 2P_{n+1}^* + P_n^*, \quad n \geq 0, \tag{3}$$

com termos iniciais $P_0^*$ e $P_1^*$. Quando $P_0^* = P_0 = 0$ e $P_1^* = P_1 = 1$, obtemos os números de Pell clássicos. Por outro lado, quando $P_0^* = Q_0 = 1$ e $P_1^* = Q_1 = 1$, obtemos os números de Pell–Lucas.

É importante destacar que não utilizamos $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ para designar a sequência de Pell generalizada.

A equação característica usual para a sequência de Pell é $r^2 = 2r - 1$. Ao resolvê-la para $r$, obtemos duas raízes distintas associadas, à saber $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Veja que $\alpha + \beta = 2$, $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$, e $\alpha \cdot \beta = -1$; utilizaremos adiante estes resultados.

Em Koshy (2014, p. 23), seção 1.11.1, encontra-se a fórmula que permite calcular o $n$-ésimo termo de $P_n^*$ sem a necessidade de interação recursiva, conhecendo apenas a posição do termo desejado. Esta fórmula é conhecida como a Fórmula do Tipo Binet, que apresentamos a seguir.

**Lema 1.** *(Fórmula do tipo Binet) Para todo natural n, temos que*

$$P_n^* = \frac{\alpha^n + \xi(P^*)\beta^n}{\alpha + \xi(P^*)\beta}\,, \tag{4}$$

*sendo* $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ *uma sequência do tipo Pell,* $\alpha$ *é* $1 + \sqrt{2}$ *, enquanto* $\beta$ *é o seu conjugado* $1 - \sqrt{2}$.

Em que fizemos $\xi(P^*) = P_0^* - P_1^*$. A Equação (4) fornece a Sequência de Pell $P_n$, por outro lado, se $\xi(P^*) = 0$ a Equação (4) exibe a Sequência de Pell–Lucas $Q_n$.

Na literatura, uma função geradora exponencial $E_{a_n}(x)$ é uma função definida por uma série de potências sob a forma

$$E_{a_n}(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\,. \tag{5}$$

Para simplificar o processo, no resultado adiante especificamos uma nova família de sequência, ao considerarmos $a_n = P_n^*$ e, utilizarmos a Equação (4), a fórmula do tipo Binet associada a sequência do tipo Pell, obtemos a função geradora exponencial da sequência do tipo Pell $\{P_n\}_{n\geq 0}$.

**Lema 2.** *Para todo natural n, a função geradora exponencial associada a sequência do tipo Pell é*

$$\mathcal{E}_{P_n^*}(x) = \frac{e^{\alpha x} + \xi(P^*)e^{\beta x}}{\alpha + \xi(P^*)\beta}\,,$$

*em que* $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência do tipo Pell,* $\xi(P^*) = P_0^* - P_1^*$ *e* $\alpha$ *e* $\beta$ *são as raízes da equação característica* $r^2 = 2r - 1$.

Por outro lado, a função $G_{a_n}(x)$ definida como

$$G_{a_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{6}$$

é conhecida como a função geradora ordinária para a sequência $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Funções geradoras fornecem uma ferramenta interessante para resolver recorrências lineares de segunda ordem, como expresso nas sequências de tipo Horadam ou Lucas. Nesse sentido, Koshy (2014, equação 11.1) apresenta a função geradora ordinária para a Sequência de tipo Pell, a qual pode ser vista no resultado adiante.

**Lema 3.** *A função geradora ordinária dos números de tipo Pell* $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$*, denotada por* $G_{P_n^*}(x)$*, possui a forma*

$$G_{P_n^*}(x) = \frac{P_0^* + (P_0^* - 2P_1^*)x}{1 - 2x - x^2}\,, \tag{7}$$

*em que* $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência do tipo Pell.*

A identidade Tagiuri-Vajda para sequência do tipo Pell pode ser encontrada em alguns trabalhos anteriores, por exemplo Koshy (2014, eq. 12 e 13, p. 154).

**Lema 4.** *[Identidade de Tagiuri-Vajda] Seja $m$, $s$, $k$ quaisquer números inteiros não negativos. Temos a seguinte identidade:*

$$P^*_{m+s}P^*_{m+k} - P^*_m P^*_{m+s+k} = (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot f_s f_k \ , \tag{8}$$

*em que $\{P^*_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência do tipo Pell, $\mu = P^*_0 + P^*_1$ e $\xi(P^*) = P^*_0 - P^*_1$.*

O resultado a seguir pode ser encontrado em Koshy (2014); a letra (a) segue das Equações 18 e 21, p. 148; e letra (b) deriva das Equações 14 e 15, p. 155.

**Lema 5.** *Seja $\{P^*_n\}_{n\geq 0}$ a sequência do tipo Pell. Para todo $m \geq 1$, temos*

$$\begin{aligned} &(a) \ \ (P^*_{m+1})^2 + (P^*_m)^2 &=& \ \ \mu P_{2m+1} \ , \\ &(b) \ \ (P^*_{m+3})^2 + (P^*_m)^2 &=& \ \ \mu 5 P_{2m+3} \ , \end{aligned}$$

*em que $\mu = P^*_0 + P^*_1$.*

Apresentamos a seguir outros resultados auxiliares que serão empregados no desenvolvimento deste trabalho.

**Lema 6.** *Para quaisquer inteiros $m$ e $n$, uma sequência do tipo Pell satisfaz*

$$P^*_m \cdot P^*_{n+1} + P^*_{m-1} \cdot P^*_n = \mu P_{m+n} \ ,$$

*em que $\mu = P^*_0 + P^*_1$. (Koshy, 2014, identidade 8.7, p. 158)*

**Lema 7.** *Para qualquer inteiro não negativo $n$, a sequência do tipo Pell satisfaz*

$$P^*_{n+1} - P^*_{n-1} = 2 \cdot P^*_n \ ,$$

*sendo $\{P^*_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de tipo Pell. (Koshy, 2014, equações 12 e 13, p. 148)*

**Lema 8.** *Para qualquer inteiro não negativo $n$, a sequência do tipo Pell satisfaz*

$$P^*_{n+2} + P^*_{n-2} = 6P^*_n \ ,$$

*sendo $\{P^*_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência do tipo Pell. (Koshy, 2014, equações 14 e 15, p. 148)*

**Lema 9.** *Para qualquer inteiro não negativo $n$, valem as seguintes identidades*

*(a)* $Q_n^2 - 2P_n^2 = (-1)^n$,

*(b)* $Q_n Q_{n+1} - 2P_n P_{n+1} = (-1)^n$, *sendo $P_n$ o n-ésimo termo da sequência de Pell e $Q_n$ o n-ésimo termo da sequência de Pell–Lucas. (Koshy, 2014, equações 30 e 39, p. 148)*

## 3 Os números de Pell tricomplexos e a função geradora

Aqui ao estendermos o conceito da sequência de Pell para o conjunto dos números tricomplexos $\mathbb{T}$, obtemos uma nova classe de sequências, as sequências de Tricomplexa de Pell s $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$. Essa generalização permite explorar propriedades e aplicações da Sequência de Pell em um contexto mais amplo, com potencial para novos estudos e resultados acerca deste tipo de sequência. Assim, estudamos a equação característica para os números Tricomplexos de Pell, fornecemos algumas de suas propriedades. Além disso, exibimos a fórmula de Binet, bem como algumas identidades estabelecidas como consequência de sua validade. Também mostraremos a função geradora exponencial e função geradora ordinária da sequência Tricomplexa de Pell.

**Definição 10.** *Para todo número natural n, a sequência Tricomplexa de Pell é definida por:*

$$TP_n^* = \left(P_n^*,\ P_{n+1}^*,\ P_{n+2}^*\right),$$

*em que* $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência do tipo Pell.*

Por exemplo $TP_0 = (0,1,2)$, $TP_1 = (1,2,5)$, e $TP_2 = (2,5,12)$. Enquanto que, $TQ_0 = (1,1,3)$, $TQ_1 = (1,3,7)$, e $TQ_2 = (3,7,17)$.

Agora mostraremos que $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ é uma sequência derivada da sequência de Pell, ou seja, é uma sequência do tipo Pell ao satisfazer uma relação de recorrência similar à dada na Equação (3), vejamos:

**Proposição 11.** *Para todo número natural* $n \geq 0$*, segue que*

$$TP_{n+2}^* = 2TP_{n+1}^* + TP_n^*, \tag{9}$$

*com valores iniciais* $TP_0^* = (0,1,2)$ *e* $TP_1^* = (1,2,5)$.

*Demonstração.* Veja que:

$$\begin{aligned} 2TP_{n+1}^* + TP_n^* &= 2(P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}) + (P_n, P_{n+1}, P_{n+2}) \\ &= (2P_{n+1} + P_n,\ 2P_{n+2} + P_{n+1},\ 2P_{n+3} + P_{n+2}) \\ &= (P_{n+2},\ P_{n+3},\ P_{n+4}) = TP_{n+2}^*, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Note que a Equação (9) é uma equação vetorial linear similar a Equação (3), visto que a recorrência da sequência do tipo Pell ocorre em cada coordenada do vetor associado. Por fim, veja que a Equação (9) está associada a uma equação característica de segunda ordem em cada uma de suas coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned} TP_{n+2}^* &= 2TP_{n+1}^* + TP_n^* \\ \left(P_{n+2}^*,\ P_{n+3}^*, P_{n+4}^*\right) &= \left(2P_{n+1}^* + P_n^*,\ 2P_{n+2}^* + P_{n+1}^*,\ 2P_{n+3}^* + P_{n+2}^*\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Logo, a equação característica vetorial associada à recorrência vetorial (10), é a seguinte:

$$\left(x^2 - 2x - 1, y^2 - 2y - 1, z^2 - 2z - 1\right) = \left(0,0,0\right). \tag{11}$$

Aplicando a fórmula do Tipo Binet associada a Sequência Pell, a Equação (4), em cada coordenada, exibimos por consequência a Fórmula de Binet para os números Tricomplexos de Pell.

**Teorema 12.** *(Fómula do Tipo Binet) Para todo natural n, temos que*

$$\left(P_n^*,\ P_{n+1}^*,\ P_{n+2}^*\right) = \left(\frac{\alpha^n + \xi(P^*)\beta^n}{\alpha + \xi(P^*)\beta},\ \frac{\alpha^{n+1} + \xi(P^*)\beta^{n+1}}{\alpha + \xi(P^*)\beta},\ \frac{\alpha^{n+2} + \xi(P^*)\beta^{n+2}}{\alpha + \xi(P^*)\beta}\right), \tag{12}$$

*em que $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ é uma sequência do tipo Pell, $\xi(P^*) = P_0^* - P_1^*$ e $\alpha$ e $\beta$ são as raízes da equação característica $r^2 = 2r - 1$.*

Seja $\mathcal{E}_{TP_n^*}(x)$ a função geradora exponencial associada à sequência de Tricomplexa de Pell $\{TP_n^*\}n \geq 0$, definida por $\mathcal{E}_{TP_n^*}(x) = \left(\mathcal{E}_{P_n^*}(x), \mathcal{E}_{P_{n+1}}(x), \mathcal{E}_{P_n^*}(x)\right)$. Ao combinarmos os resultados estabelecidos no Teorema 12 e no Lema 2, podemos concluir que:

**Teorema 13.** *Para todo inteiro não negativo n, a função exponencial geradora exponencial da Sequência Tricomplexa de Pell $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ é*

$$\mathcal{E}_{TP_n^*}(x) = \left(\frac{e^{\alpha x} + \xi(P^*)e^{\beta x}}{\alpha + \xi(P^*)\beta},\ \frac{\alpha e^{\alpha x} + \xi(P^*)\beta e^{\beta x}}{\alpha + \xi(P^*)\beta},\ \frac{\alpha^2 e^{\alpha x} + \xi(P^*)\beta^2 e^{\beta x}}{\alpha + \xi(P^*)\beta}\right),$$

*em que $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ é uma sequência do tipo Pell, e $\alpha$ e $\beta$ são as raízes da equação característica $r^2 = 2r - 1$.*

Seja $\mathcal{G}_{TP_n^*}(x) = (G_{P_n^*}(x), G_{P_{n+1}^*}(x), G_{P_{(n+2)^*}}(x))$ a função geradora relacionada com a sequência de Tricomplexa de Pell $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$. A seguir, exibimos a função geradora da *sequência Tricomplexa de Pell.*

**Proposição 14.** *A função geradora da sequência Tricomplexa de Pell $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$, denotada por $G_{TP_n^*}(x)$, possui a forma*

$$\mathcal{G}_{TP_n^*}(x) = \left(\frac{P_0^* + (P_0^* - 2P_1^*)x}{1 - 2x - x^2},\ \frac{P_0^* - 2P_1^*}{1 - 2x - x^2},\ \frac{(P_0^* - 2P_1^*) - 1}{x - 2x^2 - x^3}\right), \tag{13}$$

*em que $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$ é uma sequência do tipo Pell.*

*Demonstração.* A verificação da primeira coordenada da Equação (13) segue diretamente da aplicação do Lema (3).

Observe que $G_{P_{n+1}}^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}^* x^n$. Então, expandindo a equação $xGF_{n+1}^*(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} xG_{P_{n+1}^*}(x) &= P_1^* x + P_2^* x^2 + P_3^* x^3 + \ldots \\ xG_{P_{n+1}^*(x)} &= G_{P_n^*}(x) - P_0^* \\ G_{P_{n+1}^*(x)} &= \frac{G_{P_n^*}(x) - P_0^*}{x}; \end{aligned}$$

desde que $x \neq 0$, isso prova a segunda coordenada.

A prova da terceira coordenada segue com argumentos análogos. □

## 4 Propriedades elementares dos números de Pell tricomplexos

Nesta seção, estabelecemos algumas identidades clássicas para a sequência Tricomplexa de Pell $\{TP^*_n\}_{n\geq 2}$ em conexão com a sequência do tipo Pell, como exemplo, as identidades de Tagiuri-Vajda, Catalan, Cassini e d'Ocganes.

Lembramos que para a sequência de Pell temos que $\mu = 1$ e para a sequência de Pell–Lucas temos $\mu = 2$.

Agora apresentamos a Identidade de Tagiuri-Vajda para a sequência Tricomplexa de Pell $\{TP^*_n\}_{n\geq 2}$ é:

**Teorema 15.** *Sejam m, s, k quaisquer números inteiros não negativos. Nós temos a seguinte identidade*

$$TP^*_{m+s} \times TP^*_{m+k} - TP^*_m \times TP^*_{m+s+k} = (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot (\ P_sP_k,\ 3P_sP_k,\ 5P_sP_k) \ , \tag{14}$$

*em que $\{TP^*_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência Tricomplexa de Pell, e $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência de Pell.*

*Demonstração.* Veja que

$$\begin{aligned}
(TP^*_{m+s}) \times (TP^*_{m+k}) &= (P^*_{m+s}, P^*_{m+s+1}, P^*_{m+s+2}) \times (P^*_{m+k}, P^*_{m+k+1}, P^*_{m+k+2}) \\
&= (P^*_{m+s} \cdot P^*_{m+k} + P^*_{m+s+1} \cdot P^*_{m+k+2} + P^*_{m+s+2} \cdot P^*_{m+k+1}, \\
&\quad P^*_{m+s+2} \cdot P^*_{m+k+2} + P^*_{m+s} \cdot P^*_{m+k+1} + P^*_{m+s+1} \cdot P^*_{m+k}, \\
&\quad P^*_{m+s+1} \cdot P^*_{m+k+1} + P^*_{m+s} \cdot P^*_{m+k+2} + P^*_{m+s+2} \cdot P^*_{m+k}),
\end{aligned} \tag{15}$$

e,

$$\begin{aligned}
(TP^*_{m}) \times (TP^*_{m+s+k}) &= (P^*_{m}, P^*_{m+1}, P^*_{m+2}) \times (P^*_{m+s+k}, P^*_{m+s+k+1}, P^*_{m+s+k+2}) \\
&= (P^*_{m} \cdot P^*_{m+s+k} + P^*_{m+1} \cdot P^*_{m+s+k+2} + P^*_{m+2} \cdot P^*_{m+s+k+1}, \\
&\quad P^*_{m+2} \cdot P^*_{m+s+k+2} + P^*_{m} \cdot P^*_{m+s+k+1} + P^*_{m+1} \cdot P^*_{m+s+k}, \\
&\quad P^*_{m+1} \cdot P^*_{m+s+k+1} + P^*_{m} \cdot P^*_{m+s+k+2} + P^*_{m+2} \cdot P^*_{m+s+k}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Para obter a primeira coordenada da Equação (14), fazemos a diferença entre as Equações (15) e (16), e posteriormente usamos o Lema 4. Assim

$$\begin{aligned}
&(P^*_{m+s} \cdot P^*_{m+k} - P^*_m \cdot P^*_{m+s+k}) + (P^*_{m+s+1} \cdot P^*_{m+k+2} - P^*_{m+1} \cdot P^*_{m+s+k+2}) \\
&+(P^*_{m+s+2} \cdot P^*_{m+k+1} - P^*_{m+2} \cdot P^*_{m+s+k+1}) \\
=\ &\big(P^*_{m+s} \cdot P^*_{m+k} - P^*_m \cdot P^*_{m+s+k}\big)+\big(P^*_{(m+1)+s} \cdot P^*_{(m+1)+(k+1)} - P^*_{(m+1)} \cdot P^*_{(m+1)+s+(k+1)}\big) \\
&+\big(P^*_{(m+2)+s} \cdot P^*_{(m+2)+(k-1)} - P^*_{(m+2)} \cdot P^*_{(m+2)+s+(k-1)}\big) \\
=\ &\big((-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_s \cdot P_k\big)+\big((-1)^{m-\xi(P^*)+1} \cdot \mu \cdot P_s \cdot P_{k+1}\big)+\big((-1)^{m-\xi(P^*)+2} \cdot \mu \cdot P_s \cdot P_{k-1}\big) \\
=\ &(-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_s \cdot (P_k - P_{k+1} + P_{k-1}) \\
=\ &(-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_s \cdot (P_k - 2P_k) \\
=\ &(-1)^{m-\xi(P^*)+1} \cdot \mu \cdot P_s \cdot P_k \ .
\end{aligned}$$

Isso prova a primeira coordenada. A verificação da validade da segunda e terceira coordenada é realizada da mesma forma, usando o Lema 4, a identidade Tagiuri-Vajda para a sequência de Pell. □

Os números de Pell e Pell–Lucas com subscritos negativos, de acordo com Horadam (1971, Equações 2 e 3), são dados pelas relações $P_n = (-1)^{n-1}P_n$ e $Q_n = (-1)^n Q_n$.

Veremos que outras identidades seguirão como consequência da Identidade de Tagiuri-Vajda, Teorema 15, como veremos a seguir.

**Proposição 16.** *(Identidade de d'Ocagne) Sejam $m, n$ quaisquer inteiros não negativos. Para $m \geq n$, vale a seguinte identidade:*

$$TP_m^* \times TP_{n+1}^* - TP_{m+1}^* \times TP_n^* = (-1)^{2m-n-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot \left(P_{(m-n)}, 3 \cdot P_{(m-n)}, 5 \cdot P_{(m-n)}\right) ,$$

*em que $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ é a sequência Tricomplexa de Pell, e $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência de Pell.*

*Demonstração.* Façamos $k = n - m$ e $s = 1$ em Teorema 15, assim

$$\begin{aligned} TP_m^* \times TP_{n+1}^* - TP_{m+1}^* \times TP_n^* &= (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot 3 \cdot P_s \cdot P_k \\ &= (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot 3 \cdot P_1 \cdot P_{(n-m)} \\ &= (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot 3 \cdot P_1 \cdot P_{-(m-n)} \\ &= (-1)^{m-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot 3 \cdot P_1 \cdot (-1)^{m-n-1} \cdot P_{(m-n)} \\ &= (-1)^{2m-n-\xi(P^*)-1} \cdot \mu \cdot 3 \cdot P_{(m-n)}, \end{aligned}$$

desde que $P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$ para todo $n$ , e como $P_1 = 1$ , obtemos o resultado. □

**Exemplo 17.** *Observe que*

$$TP_4 \times TP_3 - TP_5 \times TP_2 = (-2, 6, 10) ,$$

*e*

$$TQ_4 \times TQ_3 - TQ_5 \times TQ_2 = (4, -12, -20) .$$

De modo semelhante à Proposição 16 temos a Identidade de Catalan.

**Proposição 18.** *(Identidade de Catalan) Sejam $m, n$ quaisquer inteiros não negativos. Para $m \geq n$, vale a seguinte identidade:*

$$(TP_m^*)^2 - TP_{m-n}^* \times TP_{m+n}^* = (-1)^{m+n+\xi(P^*)-1} \cdot (\mu \cdot (P_n)^2, \mu \cdot 3 \cdot (P_n)^2, \mu \cdot 5 \cdot (P_n)^2) ,$$

*em que $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ é a sequência Tricomplexa de Pell, e $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência de Pell.*

*Demonstração.* Façamos $k = -n$ e $s = n$ no Teorema 15,

$$\begin{aligned} (TP_m^*)^2 - TP_{m-n}^* \times TP_{m+n}^* &= (-1)^{m+1-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_s \cdot P_k \\ &= (-1)^{m+1-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_n \cdot P_{-n} \\ &= (-1)^{m+1-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_n \cdot (-1)^{n-1} \cdot P_n \\ &= (-1)^{m+n-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot P_n \cdot P_n \\ &= (-1)^{m+n-\xi(P^*)} \cdot \mu \cdot (P_n)^2 , \end{aligned}$$

o que garante o resultado. □

Para o caso em que $n = 1$, a conclusão é imediata a partir da Proposição 18, sem a necessidade de maiores esforços.

**Proposição 19.** ***(Identidade de Cassini)*** *Para todo inteiro não negativo $m \geq 1$, temos a seguinte identidade*

$$(TP^*_m)^2 - TP^*_{m-1} \times TP^*_{m+1} = (-1)^{m+\xi(P^*)} \cdot (\ \mu,\ 3\mu,\ 5\mu),$$

*em que $\{TP^*_n\}_{n\geq 0}$ é a sequência Tricomplexa de Pell.*

Usando a mesma técnica (e procedimentos) empregada no Teorema 15 obtemos o próximo resultado. Omitimos a prova no interesse da brevidade.

**Proposição 20.** *Seja $\{TP^*_n\}_{n\geq 0}$ a sequência Tricomplexa de Pell. Para todo inteiro $m \geq 1$, temos as seguintes identidades:*

(a) $$(TP^*_{m+1})^2 + (TP^*_m)^2 = \mu\big((P^*_{2m+1} + P^*_{m+2}(P^*_{m+1} + P^*_{m+3}),\\ (P^*_{2m+5} + P^*_{m+1}(P^*_m + P^*_{m+2}),\ (P^*_{2m+3} + (P^*_m.P^*_{m+2} + P^*_{m+1} \cdot P^*_{m+3})\big)\ ,$$

( b) $$(TP^*_{m+3})^2 + (TP^*_m)^2 = \mu\big((5 \cdot P^*_{2m+3} + 2(P^*_{m+4} \cdot P^*_{m+5} + P^*_{m+1}.P^*_{m+2}),\\ (5 \cdot P^*_{2m+5} + 2(P^*_{m+3} \cdot P^*_{m+4} + P^*_m.P^*_{m+1}), (5 \cdot P^*_{2m+4} + 2(P^*_{m+3} \cdot P^*_{m+5} + P^*_m.P^*_{m+2})\big)\ .$$

Na demonstração da Proposição 20 faz-se uso do Lema 5.

Agora, utilizando o Lema 6 obtemos o resultado seguinte para a sequência Tricomplexa de Pell.

**Proposição 21.** *Para quaisquer inteiros m e n não negativos, a sequência Tricomplexa de Pell satisfaz a identidade:*

$$TP^*_m \times TP^*_{n+1} + TP^*_{m-1} \times TP^*_n = \mu(\ P_{m+n} + 2P_{m+n+3},\ P_{m+n+4} + 2P_{m+n+1},\ P_{m+n+2} + 2P_{m+n+2}), \tag{17}$$

*sendo $P_n$ o n-ésimo termo da sequência de Pell.*

*Demonstração.* Veja isso,

$$\begin{aligned} TP_m \times TP_{n+1} &= (P_m, P_{m+1}, P_{m+2}) \cdot (P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}) \\ &= (P_m \cdot P_{n+1} + P_{m+1} \cdot P_{n+3} + P_{m+2} \cdot P_{n+2}) \\ &= (P_{m+2} \cdot P_{n+3} + P_m \cdot P_{n+2} + P_{m+1} \cdot P_{n+1}) \\ &= (P_{m+1} \cdot P_{n+2} + P_m \cdot P_{n+3} + P_{m+2} \cdot P_{n+1}), \end{aligned} \tag{18}$$

e,

$$\begin{aligned} TP_{m-1} \times TP_n &= (P_{m-1}, P_m, P_{m+1}) \times (P_n, P_{n+1}, P_{n+2}) \\ &= (P_{m-1} \cdot P_n + P_m \cdot P_{n+2} + P_{m+1} \cdot P_{n+1}, \\ &= P_{m+1} \cdot P_{n+2} + P_{m-1} \cdot P_{n+1} + P_m \cdot P_n \\ &= P_m \cdot P_{n+1} + P_{m-1} \cdot P_{n+2} + P_{m+1} \cdot P_n). \end{aligned} \tag{19}$$

Para obter a primeira coordenada da Equação (17), fazemos a adição entre as Equações (18) e (19), ou seja,

$$\begin{aligned}
& (P_m \cdot P_{n+1} + P_{m+1} \cdot P_{n+3} + P_{m+2} \cdot P_{n+2}) + (P_{m-1} \cdot P_n + P_m \cdot P_{n+2} + P_{m+1} \cdot P_{n+1}) \\
= \; & (P_m \cdot P_{n+1} + P_{m-1} \cdot P_n) + (P_{m+1} \cdot P_{n+3} + P_m \cdot P_{n+2}) + (P_{m+2} \cdot P_{n+2} + P_{m+1} \cdot P_{n+1}) \\
= \; & (P_m \cdot P_{n+1} + P_{m-1} \cdot P_n) + (P_{m+1} \cdot P_{(n+2)+1} + P_{(m+1)-1} \cdot P_{n+2}) + (P_{(m+1)+1} \cdot P_{(n+2)} + P_{m+1} \cdot P_{(n+2)-1}) \\
= \; & \mu P_{m+n} + P_{(m+1)+(n+2)} + P_{(m+1)+(n+2)} \\
= \; & \mu P_{m+n} + P_{m+n+3} + P_{m+n+3} \\
= \; & \mu P_{m+n} + 2P_{m+n+3} \, ,
\end{aligned}$$

isto garante a validade na primeira coordenada da Equação (17).

A verificação da validade na segunda e terceira coordenada da Equação (17) é feita da mesma forma. □

Fazendo uso do Lema 7 obtemos, e por brevidade omitimos a prova.

**Proposição 22.** *Para qualquer inteiro não negativo n, a sequência Tricomplexa de Pell satisfaz a identidade:*

$$TP^*_{n+1} - TP^*_{n-1} = (\, 2 \cdot P^*_n, \; 2 \cdot P^*_{n+1}, \; 2 \cdot P^*_{n+2}).$$

Fazendo uso do Lema 8 obtemos

**Proposição 23.** *Para qualquer inteiro não negativo n, a sequência Tricomplexa de Pell satisfaz*

$$TP^*_{n+2} + TP^*_{n-2} = (\, 6 \cdot P^*_n, \; 6 \cdot P^*_{n+1}, \; 6 \cdot P^*_{n+2}).$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned}
TP^*_{n+2} + TP^*_{n-2} &= (P^*_{n+2}, P^*_{n+3}, P^*_{n+4}) + (P^*_{n-2}, P^*_{n-1}, P^*_n) \\
&= (P^*_{n+2} + P^*_{n-2}, P^*_{n+3} + P^*_{n-1}, P^*_{n+4} + P^*_n) \\
&= (\, 6 \cdot P^*_n, \; 6 \cdot P^*_{n+1}, \; 6 \cdot P^*_{n+2}).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 24.** *Para qualquer inteiro não negativo n, a sequência Tricomplexa de Pell satisfaz*

$$TQ_n^2 - 2TP_n^2 = (\, (-1)^{n+1}, \; 3 \cdot (-1)^n, \; 5 \cdot (-1)^n \,). \tag{20}$$

*Demonstração.* Veja que,

$$\begin{aligned}
TQ_n \times TQ_n &= (Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}) \times (Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}) \\
&= (Q_n.Q_n + Q_{n+1}.Q_{n+2} + Q_{n+2}.Q_{n+1}, \\
&\quad Q_{n+2}.Q_{n+2} + Q_n.Q_{n+1} + Q_{n+1}.Q_n, \\
&\quad Q_{n+1}.Q_{n+1} + Q_n.Q_{n+2} + Q_{n+2}.Q_n) \\
&= (Q_n^2 + 2Q_{n+1}Q_{n+2}, Q_{n+2}^2 + 2Q_nQ_{n+1} \\
&\quad Q_{n+1}^2 + 2Q_nQ_{n+2}) \, ,
\end{aligned} \tag{21}$$

e,

$$
\begin{aligned}
2\cdot TP_n^*\times TP_n^* &= 2(P_n,P_{n+1},P_{n+2})\times(P_n,P_{n+1},P_{n+2})\\
&= 2(P_n.P_n+P_{n+1}.P_{n+2}+P_{n+2}.P_{n+1},\\
&\quad P_{n+2}.P_{n+2}+P_n.P_{n+1}+P_{n+1}.P_n,\\
&\quad P_{n+1}.P_{n+1}+P_n.P_{n+2}+P_{n+2}.P_n)\\
&= 2\cdot(P_n^2+2P_{n+1}P_{n+2},P_{n+2}^2+2P_nP_{n+1}\\
&\quad P_{n+1}^2+2P_nP_{n+2})\\
&=(2P_n^2+4P_{n+1}P_{n+2},\ 2P_{n+2}^2+4P_nP_{n+1}\\
&\quad 2P_{n+1}^2+4P_nP_{n+2}).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Para obter a segunda coordenada da Equação (20), fazemos a subtração entre as Equações (21) e (22), ou seja,

$$
\begin{aligned}
& (Q_{n+2}^2+2Q_nQ_{n+1})-(2P_{n+2}^2+4P_nP_{n+1})\\
= \; & (Q_{n+2}^2-2P_{n+2}^2)+(2Q_nQ_{n+1}-4P_nP_{n+1})\\
\overset{\text{Lema } 9.a}{=} \; & (-1)^{n+2}+2(Q_nQ_{n+1}-2P_nP_{n+1})\\
\overset{\text{Lema } 9.b}{=} \; & (-1)^{n+2}+2((-1)^n)\\
= \; & 3\cdot(-1)^n\,,
\end{aligned}
$$

o que garante a validade na primeira coordenada da Equação (20).

A verificação nas demais coordenadas da Equação (20), ocorre de modo análogo. □

# 5 Soma dos termos envolvendo os números Tricomplexos de Pell

Nesta seção, apresentamos resultados acerca das somas parciais de $n$-termos dos números Tricomplexos de Pell, sendo $n$ um inteiro não negativo. Inicialmente, considere a sequência de somas parciais $\sum_{k=0}^{n} P_k^* = P_0^*+P_1^*+P_2^*+\cdots+P_n^*$, para $n\geq 0$, sendo $P_n^*$ o $n$-ésimo termo da sequência do tipo Pell.

Consideremos as somas parciais $TP_n^* = \sum_{k=0}^{n} TP_k^* = TP_0^*+TP_1^*+TP_2^*+\cdots+TP_n^*$, para todo inteiro $n\geq 0$, em que $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ é a sequência Tricomplexa de Pell.

O resultado seguinte mostra a soma parcial dos números Tricomplexos de Pell, a soma parcial com índices pares e a soma parcial com índices ímpares dos números Tricomplexos de Pell.

**Proposição 25.** *Seja $\{TP_n^*\}_{n\geq 0}$ a sequência Tricomplexa de Pell , temos as seguintes expressões para somas parciais:*

$$(a)\quad 2\sum_{k=0}^{n} TP_k^* = (P_{n+2}^*,P_{n+3}^*,P_{n+4}^*)-\big((P_0^*,P_1^*,P_2^*)+(P_1^*,P_2^*,P_3^*)\big),$$

$$(b)\quad 2\sum_{k=0}^{n} TP_{2k}^* = (P_{2n+1}^*,P_{2n+2}^*,P_{2n+3}^*)+(P_0^*,P_1^*,P_2^*)-(P_1^*,P_2^*,P_3^*),$$

$$(c)\quad 2\sum_{k=0}^{n} TP_{2k+1}^* = (P_{2n+2}^*,P_{2n+3}^*,P_{2n+4}^*)-(P_0^*,P_1^*,P_2^*)\,,$$

*sendo $P_n^*$ o n-ésimo termo da sequência do tipo Pell.*

*Demonstração.* (a) De acordo com a Proposição 11, temos que

$$2 \cdot TP_n^* = TP_{n+1}^* - TP_{n-1}^*.$$

Então,

$$\begin{aligned} 2 \cdot TP_1^* &= TP_2^* - TP_0^* \\ 2 \cdot TP_2^* &= TP_3^* - TP_1^* \\ 2 \cdot TP_3^* &= TP_4^* - TP_2^* \\ &\vdots \\ 2 \cdot TP_n^* &= TP_{n+1}^* - TP_{n-1}^*. \end{aligned}$$

Disto obtemos,

$$\begin{aligned} 2 \cdot TP_n^* &= TP_0^* + TP_1^* + TP_2^* + \cdots + TP_{n-1}^* + TP_n^* \\ &= (TP_2^* - TP_0^*) + (TP_3^* - TP_1^*) + (TP_4^* - TP_2^*) + \cdots + (TP_n^* - TP_{n-2}^*) + (TP_{n+1}^* - TP_{n-1}^*) \\ &= (TP_{n+1}^* + TP_n^*) - (TP_0^* + TP_1^*), \end{aligned}$$

e obtemos o resultado.

(b) Novamente, fazendo uso da Proposição 11 temos que

$$2 \cdot TP_n^* = TP_{n+1}^* - TP_{n-1}^* \ .$$

Então,

$$\begin{aligned} 2 \cdot TP_2^* &= TP_3^* - TP_1^* \\ 2 \cdot TP_4^* &= TP_5^* - TP_3^* \\ 2 \cdot TP_6^* &= TP_7^* - TP_5^* \\ &\vdots \\ 2 \cdot TP_{2n}^* &= TP_{2n+1}^* - TP_{2n-1}^* \ . \end{aligned}$$

Disto obtemos,

$$\begin{aligned} 2 \cdot TP_{2n}^* &= TP_0^* + TP_2^* + TP_4^* + \cdots + TP_{2n}^* \\ &= (TP_0^*) + (TP_3^* - TP_1^*) + (TP_5^* - TP_3^*) + (TP_7^* - TP_5^*) + \cdots + (TP_{2n+1}^* - TP_{2n-1}^*) \\ &= TP_{2n+1}^* + TP_0^* - TP_1^*, \end{aligned}$$

e obtemos o resultado.

(c) Outra vez, pela Proposição 11 segue que

$$\begin{aligned} 2 \cdot TP_1^* &= TP_2^* - TP_0^* \\ 2 \cdot TP_3^* &= TP_4^* - TP_2^* \\ 2 \cdot TP_5^* &= TP_6^* - TP_4^* \\ &\vdots \\ 2 \cdot TP_{2n+1}^* &= TP_{2n+2}^* - TP_{2n}^* \ . \end{aligned}$$

Disto obtemos,

$$
\begin{aligned}
2 \cdot TP^*_{2n+1} &= TP^*_1 + TP^*_3 + TP^*_5 + \cdots + TP^*_{2n+2} + TP^*_{2n} \\
&= (TP^*_2 - TP^*_0) + (TP^*_4 - TP^*_2) + (TP^*_6 - TP^*_4) + \cdots + (TP^*_{2n+2} - TP^*_{2n}) \\
&= TP^*_{2n+2} - TP^*_0 \,,
\end{aligned}
$$

e obtemos o resultado. □

Para finalizar a seção, uma consequência direta da Proposição 25, é a soma parcial alternada com índices pares e a soma parcial alternada com índices pares dos números Tricomplexos de Pell.

**Proposição 26.** *Seja $\{TP^*_n\}_{n\geq 0}$ a sequência Tricomplexa de Pell , temos as seguintes expressões para somas parciais:*

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad 2\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k TP^*_k = TP^*_{2n+1} - TP^*_{2n+2} - TP^*_1, && \textit{para k ímpar},\\
&(b) \quad 2\sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k TP^*_k = \sum_{k=0}^{n+1} TP^*_{2k} - \sum_{k=0}^{n} TP^*_{(2k+1)}, && \textit{para k par},
\end{aligned}
$$

*sendo $P^*_n$ o n-ésimo termo da sequência do tipo Pell.*

*Demonstração.* (a) Caso $k = 2n + 1$ então o último termo é negativo, assim

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k TP^*_k &= TP^*_0 - TP^*_1 + TP^*_2 - TP^*_3 + \cdots + TP^*_{2n} - TP^*_{2n+1} \\
&= (TP^*_0 + TP^*_2 + \cdots + TP^*_{2n}) - (TP^*_1 + TP^*_3 + \cdots + TP^*_{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} TP^*_{2k} - \sum_{k=0}^{n} TP^*_{(2k+1)}.
\end{aligned}
$$

De acordo com a Proposição 25, itens (b) e (c), segue-se que:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k TP^*_k &= TP^*_{2n+1} + TP^*_0 - TP^*_1 - (TP^*_{2n+2} + TP^*_0) \\
&= TP^*_{2n+1} - TP^*_{2n+2} - TP^*_1 \,,
\end{aligned}
$$

e obtemos o resultado.

(b) Nesse caso $k = 2n$, e o último termo é positivo, então

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{2(n+1)}(-1)^k TP^*_k &= TP^*_0 - TP^*_1 + TP^*_2 - TP^*_3 + \cdots + TP^*_{2n} - TP^*_{2n+1} + TP^*_{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} TP^*_{2k} - \sum_{k=0}^{n} TP^*_{(2k+1)}.
\end{aligned}
$$

□

## 6 Considerações finais

Neste, apresentamos parte do nosso estudo relacionada a uma nova família de sequências associadas aos números de Pell. Nesse sentido, investigamos uma sequência do tipo Pell, introduzindo-a no anel Tricomplexo $\mathbb{T}$. Assim, exibimos alguns resultados inovadores acerca dos números tricomplexos; em especial, destacamos aquele que relaciona a Sequência de Pell e suas propriedades no anel $\mathbb{T}$. Acreditamos que ao mudar as condições iniciais na recorrência de Pell, obteremos novas sequências que merecem estudo. Deixamos em aberto para o leitor interessado um estudo mais aprofundado dessas extensões. Além disso, para futuras pesquisas, visamos generalizar a sequência de Pell nesse anel, expandindo assim as fronteiras do conhecimento matemático a novas aplicações.

## Referências

BICKNELL, M. A primer on the Pell sequence and related sequences. **The Fibonacci Quarterly**, Sun City, v. 13, n. 4, p. 345-349, 1975. Disponível em: https://www.fq.math.ca/Scanned/13-4/bicknell.pdf. Acesso em: 28 jun. 2025.

BRAVO, J. J.; HERRERA, J. L.; LUCA, F. On a generalization of the Pell sequence. **Mathematica Bohemica**, Praga, v. 146, n. 2, p. 199-213, 2021.

ÇELIK, S.; DURUKAN, I.; ÖZKAN, E. New recurrences on Pell numbers, Pell–Lucas numbers, Jacobsthal numbers, and Jacobsthal-Lucas numbers. **Chaos, Solitons** & **Fractals**, Oxford, v. 150, Article Number 111173, 2021.

COSTA, E. A.; CATARINO, P. M. M. C.; MONTEIRO, F. S.; SOUSA, V. M. A.; SANTOS, D. C. Tricomplex Fibonacci numbers: a new family of Fibonacci-type sequences. **Mathematics**, Basel, v. 12, n. 23, Article Number 3723, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.3390/math12233723. Acesso em: 28 jun. 2025.

COSTA, E. A.; CATARINO, P. M. M. C.; SANTOS, D. C. A study of the symmetry of the tricomplex repunit sequence with repunit sequence. **Symmetry**, Basel, v. 17, n. 1, Article Number 28, 2025. Disponível em: https://doi.org/10.3390/sym17010028. Acesso em: 28 jun. 2025.

COSTA, E. A.; SANTOS, D. C. Algumas propriedades da sequência de Pell. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 25-36, 2022. Disponível em: https://doi.org/10.21167/cqdv22n32022025036.2022. Acesso em: 28 jun. 2025.

COSTA, E. A.; SOUZA, K. C. O. Tricomplex ring with complex coefficients. **Revista de Matemática da UFOP**, Ouro Preto, v. 1, n. 1, 2025. Disponível em: https://doi.org/10.63801/rmat.v1i.7773. Acesso em: 28 jun. 2025.

DEUS, N. C. L.; OTTONI, J. E.; OTTONI, A. G. S. A álgebra dos números ternários. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, n. 1, 2024.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. reform. São Paulo: Atual, 2003.

HORADAM, A. F. Pell identities. **The Fibonacci Quarterly**, Sun City, v. 9, n. 3, p. 245-263, 1971. Disponível em: `https://www.fq.math.ca/Scanned/9-3/horadam-a.pdf`. Acesso em: 28 jun. 2025.

KILIÇ, E. The generalized Pell $(p,i)$-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums. **Chaos, Solitons & Fractals**, Oxford, v. 40, n. 4, p. 2047-2063, 2009.

KOSHY, T. **Pell and Pell–Lucas numbers with applications**. New York: Springer, 2014.

MANGUEIRA, M. C. S.; ALVES, F. R. V. Números híbridos de Fibonacci e Pell. **Revista Thema**, Pelotas, v. 17, n. 3, p. 831-842, 2020.

MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A history of mathematics**. 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2011.

MILIES, C. P. Breve história da álgebra abstrata. *In*: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2., 2004, Salvador, **Textos**. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2004.

MONDAL, K.; PRAMANIK, S.. Tri-complex rough neutrosophic similarity measure and its application in multi-attribute decision making. **Critical Review**, Nova Iorque, v. 11, p. 26-40, 2015.

OLARIU, S. **Complex numbers in *n* dimensions.** Amsterdam: Elsevier Science, 2002. (North-Holland mathematics studies, 190).

OLARIU, S. Complex numbers in three dimensions. **arXiv:math/0008120 [math.CV]**, 2000. Disponível em: `https://arxiv.org/pdf/math/0008120`. Acesso em: 28 jun. 2025.

RICHTER, W.-D. On complex numbers in higher dimensions. **Axioms**, Basel, v. 11, n. 1, Article Number 22, 2022. Disponível em: `https://doi.org/10.3390/axioms11010022`. Acesso em: 28 jun. 2025.

SLOANE, N. J. A. Sequence A002275. **The on-line encyclopedia of integer sequences.** [*S. l.*]: The OEIS Foundation Inc., 2024. Disponível em: `http://oeis.org/A002275`. Acesso em: 28 jun. 2025.

SOYKAN, Y.; GOCEN, M. Properties of hyperbolic generalized Pell numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, Sofia, v. 26, n. 4, p. 136-153, 2020.

SPREAFICO, E. V. P.; RACHIDI, M. On generalized Pell numbers of order $r \geq 2$. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, São Carlos, v. 22, p. 125-138, 2021.