

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Luis Antonio Ponce Alonso
Colégio Anglo São Paulo, São Paulo

Francisco Nery de Souza Campos
Colégio São Conrado, Campinas

Edmundo Capelas de Oliveira
Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP), Instituto de Ma-
temática, Estatística e Computação
Científica (Imecc), Campinas,
capelas@unicamp.br

Propriedades interessantes relacionando áreas de dois triângulos

Interesting properties relating areas of two triangles

Resumo

Este artigo explora uma relação geométrica singular entre as áreas de dois triângulos, na qual cada vértice do triângulo menor está localizado sobre os lados distintos do triângulo maior. Apresentamos e demonstramos três proposições pouco usuais, utilizando exemplos práticos com pontos notáveis, como o baricentro, o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o ponto de Gergonne. Os resultados obtidos abrem caminhos para futuras investigações geométricas, destacando conceitos clássicos e modernos, como o teorema de Euler aplicado a triângulos pedal, que relaciona a área de triângulos com projeções ortogonais de um ponto sobre os lados de um triângulo.

Palavras-chave: triângulo órtico; pontos notáveis; mediana; baricentro; bissetriz.

Abstract

This article explores an interesting geometric relationship between the areas of two triangles, in which each vertex of the smaller triangle is located on distinct sides of the larger triangle. We present and demonstrate three unusual propositions, using practical examples with notable points, such as the barycenter, incenter, circumcenter, orthocenter and Gergonne point. The results obtained open paths for future geometric investigations, highlighting classical and modern concepts, such as Euler's theorem applied to pedal triangles, which relates the area of triangles to orthogonal projections of a point on the sides of a triangle.

Keywords: orthic triangle; remarkable points; median; barycenter; bisector.



1 Introdução

O estudo das relações entre áreas de triângulos, particularmente daqueles inscritos em outros triângulos, evidencia propriedades fundamentais da geometria plana. Apesar de sua relevância recorrente no contexto didático e teórico, verifica-se uma relativa escassez de tratamentos aprofundados na literatura especializada.

Neste trabalho, são apresentadas e demonstradas três propriedades formuladas sob a forma de proposições. Duas delas são exemplificadas por meio de pontos notáveis clássicos [1], ao passo que a terceira relaciona-se ao teorema de Euler para triângulos [2], sendo ilustrada pelo ponto notável denominado circuncentro.

Entendemos que esta abordagem contribui para uma compreensão mais rigorosa das interações geométricas envolvidas. Ademais, ao estabelecer vínculos entre tais propriedades e configurações menos convencionais, este estudo oferece uma perspectiva teórica e prática mais abrangente sobre problemas geométricos clássicos e avançados.

Vamos apresentar o desenvolvimento deste trabalho da seguinte forma: na segunda seção, após introduzirmos a notação a ser utilizada, discutimos duas proposições que envolvem o conceito de área de um triângulo cujos vértices se encontram sobre os lados de outro triângulo, estabelecendo a relação entre as duas áreas. Na terceira seção, são apresentados exemplos com triângulos específicos, abordando alguns dos chamados pontos notáveis do triângulo, entre os quais se destacam o baricentro (G), o incentro (I), o ortocentro (H) e o ponto de Gergonne.

Na quarta seção, discutimos a terceira proposição, relacionada ao triângulo pedal — em especial, um caso particular do teorema de Euler, em que os vértices correspondem aos pés das perpendiculares. Nessa abordagem, também é contemplado o ponto notável circuncentro (C), complementando o conjunto de pontos destacados nas seções anteriores, como o baricentro, o incentro, o ortocentro e o ponto de Gergonne. Por fim, apresentamos nossas conclusões.

2 Área de triângulos e resultados não usuais

Como é amplamente conhecido, existem diversas maneiras de calcular a área de um triângulo, cada uma com características específicas que dependem dos dados disponíveis no problema em questão. Neste contexto, destacamos a fórmula que determina a área por meio do semiproduto de dois lados, multiplicado pelo seno do ângulo formado entre seus lados [3]. Ao longo deste artigo, adotamos a notação $[XYZ]$ para representar a área do triângulo de vértices X , Y e Z .

Nesta seção vamos apresentar e demonstrar duas proposições envolvendo as áreas de dois triângulos, sendo que cada vértice do triângulo menor está localizado sobre os lados distintos do triângulo maior.

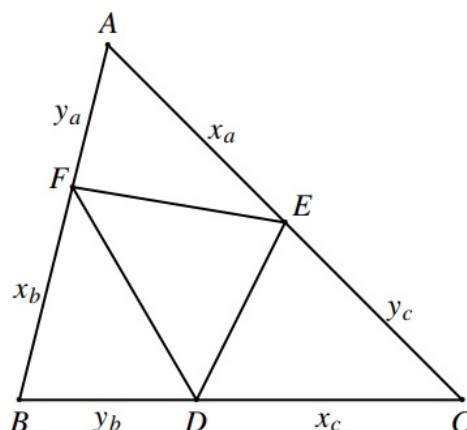
Proposição 1 *Se ABC é um triângulo e DEF um triângulo de vértices $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{CA}$ e $F \in \overline{AB}$, então*

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{EA \cdot FB \cdot DC + AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Demonstração. Iniciamos com o esboço da Figura 1, na qual destacamos os vértices dos respectivos triângulos ABC e DEF , assim como as medidas dos lados do triângulo ABC : $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Esses lados são divididos em dois segmentos, de forma que:

$$a = y_b + x_c, \quad b = y_c + x_a \quad \text{e} \quad c = y_a + x_b.$$

Figura 1: Triângulos ABC , DEF e a sua nomenclatura



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Com base na Figura 1 e utilizando a fórmula que fornece a área de um triângulo como o semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo formado por esses lados, estabelecemos a relação entre as áreas dos triângulos EAF e ABC , da seguinte forma:

$$\frac{[EAF]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{2}x_a y_a \widehat{\text{sen } A}}{\frac{1}{2}c b \widehat{\text{sen } A}}.$$

Simplificando e, em seguida, multiplicando o numerador e o denominador da expressão anterior por a , reescrevemos a relação anterior como:

$$\frac{[EAF]}{[ABC]} = \frac{a \cdot x_a \cdot y_a}{a b c}. \quad (1)$$

De maneira similar, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{[FBD]}{[ABC]} = \frac{b \cdot x_b \cdot y_b}{a b c} \quad \text{e} \quad \frac{[DCE]}{[ABC]} = \frac{c \cdot x_c \cdot y_c}{a b c}. \quad (2)$$

Por outro lado, com base na Figura 1, verifica-se que as áreas dos triângulos DEF e ABC , podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{[ABC] - [EAF] - [FBD] - [DCE]}{[ABC]},$$

ou seja,

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = 1 - \frac{[EAF]}{[ABC]} - \frac{[FBD]}{[ABC]} - \frac{[DCE]}{[ABC]}.$$

Substituindo as Eq.(1) e Eq.(2) na precedente e reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{a b c - a x_a y_a - b x_b y_b - c x_c y_c}{a b c} \quad (3)$$

Utilizando as relações $a = y_b + x_c$, $b = y_c + x_a$ e $c = y_a + x_b$ no numerador da Eq.(3) e simplificando, chegamos em

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{x_a \cdot x_b \cdot x_c + y_a \cdot y_b \cdot y_c}{a \cdot b \cdot c},$$

ou, equivalentemente, na relação

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{EA \cdot FB \cdot DC + AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB},$$

que é o resultado desejado. $\square$

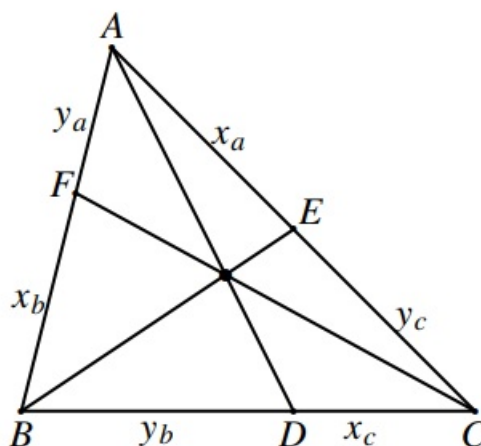
Proposição 2 Se ABC é um triângulo com cevianas concorrentes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, então:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB} \quad \text{ou} \quad \frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Demonstração. Como $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são cevianas concorrentes que dividem os lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, conforme Figura 2, temos do teorema de Ceva [4]:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad EA \cdot FB \cdot DC = AF \cdot BD \cdot CE, \quad (4)$$

Figura 2: Triângulos ABC , DEF e cevianas concorrentes.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Portanto, da Proposição 1 segue:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{EA \cdot FB \cdot DC + AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Utilizando a igualdade obtida na Eq.(4), temos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot x_a \cdot x_b \cdot x_c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB}$$

ou

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot y_a \cdot y_b \cdot y_c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

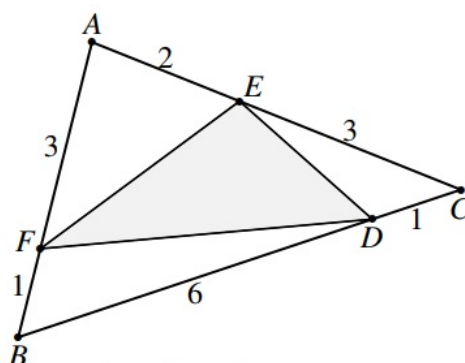
que é o resultado desejado. $\square$

3 Exemplos com pontos notáveis de um triângulo

Nesta seção, após uma aplicação numérica simples, utilizando a Proposição 1, faremos uso da Proposição 2 em triângulos específicos, abordando pontos notáveis clássicos, a saber, o baricentro (G), o incentro (I), o ortocentro (H) e o ponto de Gergonne.

Exemplo 3 Sejam D , E e F pontos sobre os lados de um triângulo ABC , conforme Figura 3, tais que $EA = 2$, $FB = 1$, $DC = 1$, $AF = 3$, $BD = 6$ e $CE = 3$. Calcule o valor da razão: $\frac{[DEF]}{[ABC]}$.

Figura 3: Triângulos ABC e DEF .



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Solução. Observando que os vértices do triângulo DEF estão posicionados sobre os lados distintos do triângulo ABC , temos pela Proposição 1

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{EA \cdot FB \cdot DC + AF \cdot BD \cdot CE}{AB \cdot BC \cdot CA}.$$

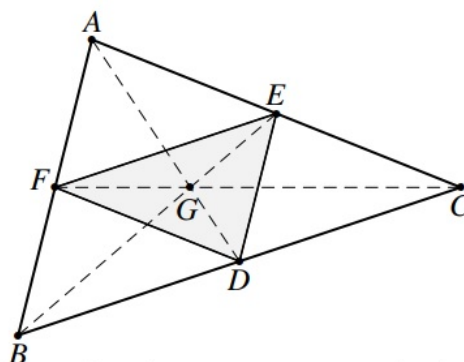
Substituindo os valores fornecidos no enunciado e, em seguida, simplificando, temos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 3}{(3 + 1) \cdot (6 + 1) \cdot (3 + 2)} = \frac{56}{140} = \frac{2}{5},$$

que é o resultado procurado. Note que, como $EA \cdot FB \cdot DC = 2 \neq AF \cdot BD \cdot CE = 54$, conclui-se que as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ não são concorrentes.

Exemplo 4 Considere a Figura 4, na qual G representa o baricentro do triângulo ABC . Calcule o valor da razão: $\frac{[DEF]}{[ABC]}$.

Figura 4: Triângulos ABC , DEF e o baricentro.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Solução. Como G é o baricentro do triângulo ABC , as cevianas $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ correspondem às medianas. Consequentemente, os pontos D , E e F são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Assim, introduzimos a notação:

$$CE = EA = x, \quad AF = FB = y \quad \text{e} \quad BD = DC = z. \quad (5)$$

Nessas condições, aplicando a Proposição 1, temos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{EA \cdot FB \cdot DC + AF \cdot BD \cdot CE}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Substituindo as relações obtidas na Eq.(5) e, em seguida, simplificando, obtemos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{x \cdot y \cdot z + y \cdot z \cdot x}{(z + z) \cdot (x + x) \cdot (y + y)} = \frac{2 \cdot x \cdot y \cdot z}{8 \cdot x \cdot y \cdot z} = \frac{1}{4},$$

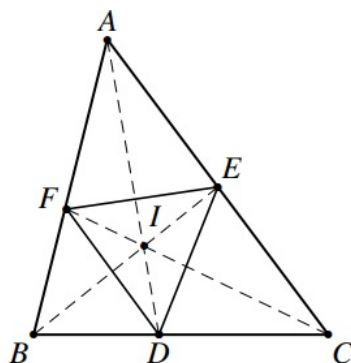
que é o resultado desejado. Note que, como é amplamente conhecido que as medianas de um triângulo são concorrentes, poderíamos ter utilizado a Proposição 2, obtendo:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB} = \frac{2 \cdot x \cdot y \cdot z}{8 \cdot x \cdot y \cdot z} = \frac{1}{4},$$

o que sintetizaria a solução.

Exemplo 5 Considere a Figura 5, na qual I representa o incentro do triângulo ABC , cujos lados medem: $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Calcule o valor da razão $\frac{[DEF]}{[ABC]}$ em função de a , b e c .

Figura 5: Triângulos ABC , DEF e o incentro.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Solução. Como I é o incentro do triângulo ABC , as cevianas $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ correspondem às bissetrizes internas. Consequentemente, aplicando o teorema da bissetriz interna às bissetrizes $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$, obtemos, respectivamente:

$$\frac{EA}{b} = \frac{c}{a+c}, \quad \frac{FB}{c} = \frac{a}{a+b}, \quad \text{e} \quad \frac{DC}{a} = \frac{b}{b+c},$$

relações estas que resultam nas seguintes igualdades

$$EA = \frac{b \cdot c}{a+c}, \quad FB = \frac{a \cdot c}{a+b}, \quad \text{e} \quad DC = \frac{a \cdot b}{b+c}. \quad (6)$$

Como é amplamente conhecido que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes, pela Proposição 2, temos

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

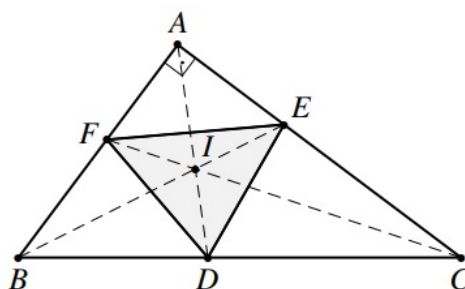
Substituindo as relações obtidas na Eq.(6) e simplificando, obtemos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot \frac{b \cdot c}{(a+c)} \cdot \frac{a \cdot c}{(a+b)} \cdot \frac{a \cdot b}{(b+c)}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c}{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

que é o resultado desejado.

Exemplo 6 Considere a Figura 6, na qual I representa o incentro do triângulo retângulo ABC . Sabendo que os lados possuem medidas $AB = 3$, $BC = 5$ e $CA = 4$, calcule o valor da razão: $\frac{[DEF]}{[ABC]}$.

Figura 6: Triângulos ABC , DEF e o incentro.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Solução. Como I é o incentro do triângulo ABC , as cevianas $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$ correspondem às bissetrizes internas. Consequentemente, aplicando o teorema da bissetriz interna às bissetrizes $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CF}$, obtemos, respectivamente:

$$\frac{EA}{3} = \frac{4 - EA}{5}, \quad \frac{FB}{5} = \frac{3 - FB}{4}, \quad \text{e} \quad \frac{DC}{4} = \frac{5 - DC}{3}.$$

Essas relações resultam nas seguintes igualdades,

$$EA = \frac{3}{2}, \quad FB = \frac{5}{3}, \quad \text{e} \quad DC = \frac{20}{7}. \quad (7)$$

Como é amplamente conhecido que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes, pela Proposição 2, temos:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{AB \cdot BC \cdot CA}.$$

Substituindo as relações obtidas na Eq.(7) e simplificando, obtemos

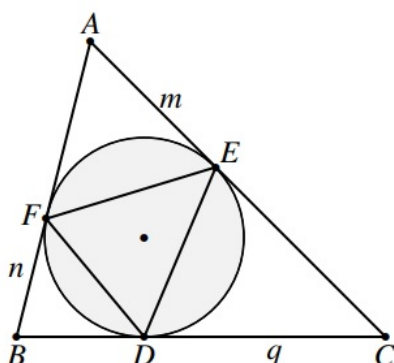
$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{20}{7}}{3 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{5}{21},$$

que é o resultado desejado. Note que, esse mesmo resultado pode ser obtido por meio da expressão obtida no **Exemplo 5**.

Corolário 7 A Figura 7 mostra um triângulo ABC e sua circunferência inscrita, destacando os pontos de tangência D , E e F . Demonstre que: Se $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $EA = m$, $FB = n$ e $DC = q$, então

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{a b c}{2 m n q}.$$

Figura 7: Triângulos ABC , DEF e o incírculo do triângulo ABC .



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Demonstração. Lembrando que segmentos tangentes a uma circunferência a partir de um ponto externo são congruentes, temos as seguintes relações

$$AF = EA = m, \quad BD = BF = n \quad \text{e} \quad CE = CD = q. \quad (8)$$

Utilizando as igualdades obtidas na Eq.(8) e, em seguida, simplificando, temos:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{q} \cdot \frac{q}{m} = 1.$$

Conclui-se, pelo recíproco do teorema de Ceva, que as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são concorrentes [1]. A interseção dessas cevianas é denominado de ponto de Gergonne. Assim, aplicando a Proposição 2, temos

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Substituindo as informações fornecidas no enunciado, resulta

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot m \cdot n \cdot q}{a \cdot b \cdot c}.$$

Portanto, invertendo os termos conforme necessário, obtemos

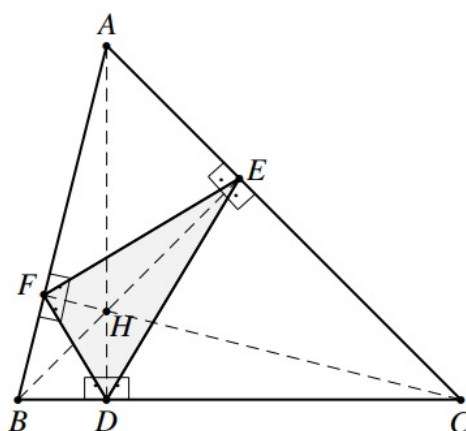
$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot m \cdot n \cdot q},$$

que é o resultado desejado.

Corolário 8 Considere a Figura 8, na qual H representa o ortocentro do triângulo ABC ; ponto de encontro das alturas do triângulo ABC . Sejam $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ e DEF o triângulo órtico, determinado pelos pés das alturas. Demonstre que

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Figura 8: Triângulos ABC , DEF e o ortocentro.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Demonstração. Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ as medidas dos lados do triângulo ABC . Sendo H o ortocentro do triângulo ABC , as cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ correspondem às alturas desse triângulo. Utilizando a razão trigonométrica cosseno nos triângulos retângulos AEB , BFC e CDA , obtemos:

$$\cos \alpha = \frac{EA}{AB}, \quad \cos \beta = \frac{FB}{BC} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{DC}{CA}.$$

Consequentemente, seguem as seguintes relações

$$EA = AB \cos \alpha, \quad FB = BC \cos \beta \quad \text{e} \quad DC = CA \cos \gamma. \quad (9)$$

Como é amplamente conhecido que as alturas de um triângulo são concorrentes, pela Proposição 2, temos

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot EA \cdot FB \cdot DC}{BC \cdot CA \cdot AB}$$

Substituindo as informações fornecidas no enunciado e as relações obtidas na Eq.(9), e realizando as simplificações necessárias, resulta

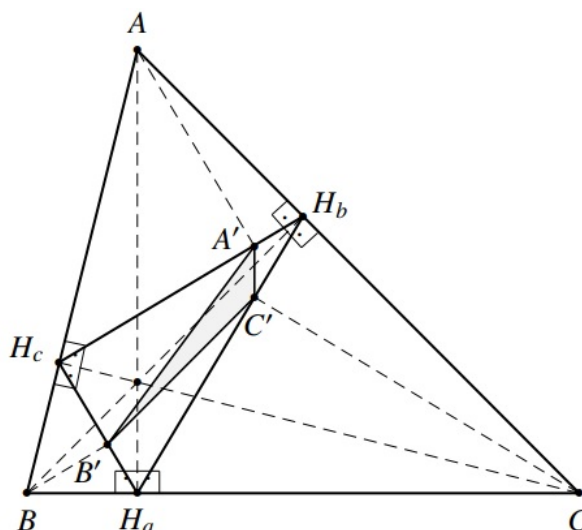
$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot AB \cos \alpha \cdot BC \cos \beta \cdot CA \cos \gamma}{AB \cdot BC \cdot CA} = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma,$$

que é o resultado desejado.

Corolário 9 Sejam $H_a H_b H_c$ o triângulo órtico, vértices são os pés das alturas, do triângulo ABC , conforme Figura 9. Além disso, temos $\overline{AA'} \perp \overline{H_b H_c}$, $\overline{BB'} \perp \overline{H_c H_a}$ e $\overline{CC'} \perp \overline{H_a H_b}$. Demonstre que

$$[H_a H_b H_c]^2 = [A' B' C'] \cdot [ABC].$$

Figura 9: Triângulos ABC , $H_aH_bH_c$ e $A'B'C'$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Demonstração. Inicialmente, introduzimos a seguinte notação para os lados do triângulo ABC : $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Para os ângulos internos empregamos a notação: $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$.

Recorrendo à definição da razão trigonométrica cosseno, analisamos, inicialmente, os triângulos retângulos AH_bB e AH_cC . Nesses triângulos, temos

$$\frac{H_bA}{c} = \frac{H_cA}{b} = \cos \alpha,$$

o que implica serem os triângulos AH_bH_c e ABC semelhantes pelo critério LAL. Dessa semelhança seguem as igualdades de ângulos

$$\widehat{AH_bH_c} = \widehat{ABC} = \beta \quad \text{e} \quad \widehat{AH_cH_b} = \widehat{ACB} = \gamma.$$

Além disso, determinam-se as medidas dos lados do triângulo AH_bH_c ,

$$H_bA = c \cdot \cos \alpha, \quad H_cA = b \cdot \cos \alpha \quad \text{e} \quad H_bH_c = a \cdot \cos \alpha. \quad (10)$$

De forma análoga, examinamos os triângulos BH_cC e BH_aA . Nestes, temos

$$\frac{H_cB}{a} = \frac{H_aB}{c} = \cos \beta,$$

o que implica serem os triângulos BH_cH_a e BCA semelhantes pelo critério LAL, de onde decorrem as igualdades de ângulos

$$\widehat{BH_cH_a} = \widehat{BCA} = \gamma \quad \text{e} \quad \widehat{BH_aH_c} = \widehat{BAC} = \alpha.$$

E, também, as medidas dos lados do triângulo BH_cH_a

$$H_cB = a \cdot \cos \beta, \quad H_aB = c \cdot \cos \beta \quad \text{e} \quad H_cH_a = b \cdot \cos \beta. \quad (11)$$

Por fim, investigamos os triângulos CH_aA e CH_bB , seguindo a mesma lógica dos casos anteriores. Assim, temos

$$\frac{\overline{H_aC}}{b} = \frac{\overline{H_bC}}{a} = \cos \gamma,$$

o que implica serem os triângulos CH_aH_b e CAB semelhantes pelo critério LAL, com as igualdades de ângulos

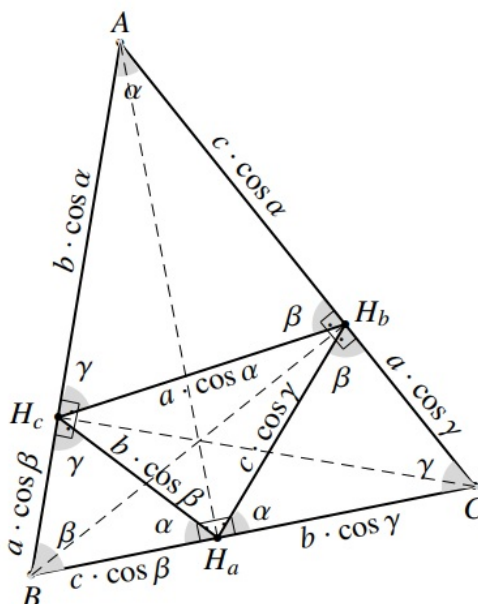
$$\widehat{CH_aH_b} = \widehat{CAB} = \alpha, \quad \text{e} \quad \widehat{CH_bH_a} = \widehat{CBA} = \beta,$$

como também as medidas dos lados do triângulo CH_aH_b ,

$$H_aC = b \cdot \cos \gamma, \quad H_bC = a \cdot \cos \gamma \quad \text{e} \quad H_aH_b = c \cdot \cos \gamma. \quad (12)$$

Antes de prosseguir, apresentamos a Figura 10, que destaca os resultados obtidos anteriormente.

Figura 10: Triângulos ABC e $H_aH_bH_c$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Como $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$ são concorrentes, pela Proposição 2, temos

$$\frac{[H_aH_bH_c]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot H_bA \cdot H_cB \cdot H_aC}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

Já, com a substituição das medidas mostradas na Figura 10, obtemos

$$\frac{[H_aH_bH_c]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot \cos \beta \cdot b \cdot \cos \gamma}{a \cdot b \cdot c} = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma. \quad (13)$$

Note que este resultado foi apresentado no Corolário 8.

Por outro lado, utilizando as medidas exibidas na Figura 10 e aplicando a definição da razão trigonométrica cosseno, temos, para os triângulos retângulos: $AA'H_b$, $BB'H_c$, $CC'H_a$, $AA'H_c$, $BB'H_a$ e $CC'H_b$, respectivamente, as seguintes igualdades

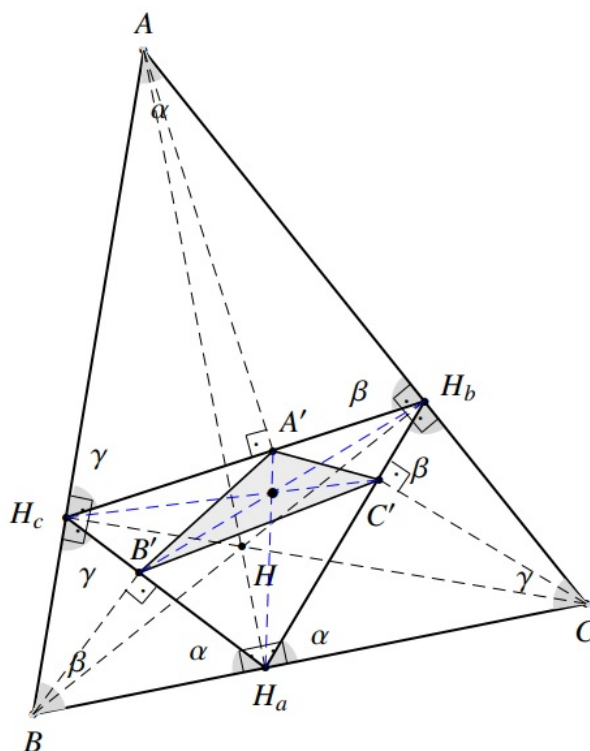
$$\begin{aligned} H_bA' &= c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta & H_cB' &= a \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma & H_aC' &= b \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha \\ A'H_c &= b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma & B'H_a &= c \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha & C'H_b &= a \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta, \end{aligned} \quad (14)$$

de onde segue, já simplificando,

$$\frac{H_b A'}{A' H_c} \cdot \frac{H_c B'}{B' H_a} \cdot \frac{H_a C'}{C' H_b} = \frac{c \cdot \cos \beta}{b \cdot \cos \gamma} \cdot \frac{a \cdot \cos \gamma}{c \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta} = 1.$$

Logo, pelo recíproco do teorema de Ceva, concluímos que as cevianas $\overline{H_a A'}$, $\overline{H_b B'}$ e $\overline{H_c C'}$ são concorrentes, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11: $\overline{H_a A'}$, $\overline{H_b B'}$ e $\overline{H_c C'}$ são concorrentes.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Consequentemente, pela Proposição 2, temos para a razão das áreas dos triângulos $H_a H_b H_c$ e $A' B' C'$, a seguinte igualdade

$$\frac{[A' B' C']}{[H_a H_b H_c]} = 2 \cdot \frac{H_b A'}{H_b H_c} \cdot \frac{H_c B'}{H_c H_a} \cdot \frac{H_a C'}{H_a H_b}.$$

Substituindo as medidas $H_b A'$, $H_c B'$ e $H_a C'$ pelos valores obtidos na Eq.(14) e as medidas de $H_b H_c$, $H_c H_a$ e $H_a H_b$ pelos valores obtidos nas Eq.(10), Eq.(11) e Eq.(12), temos

$$\frac{[A' B' C']}{[H_a H_b H_c]} = 2 \cdot \frac{c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot a \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha}{c \cdot \cos \gamma \cdot b \cdot \cos \beta \cdot a \cdot \cos \alpha}.$$

Já, realizando as simplificações, resulta

$$\frac{[A' B' C']}{[H_a H_b H_c]} = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma. \quad (15)$$

Portanto, utilizando as Eq.(13) e Eq.(15) segue

$$\frac{[H_a H_b H_c]}{[ABC]} = \frac{[A'B'C']}{[H_a H_b H_c]}$$

que, rearranjando permite escrever

$$[H_a H_b H_c]^2 = [A'B'C'] \cdot [ABC],$$

que é o resultado desejado.

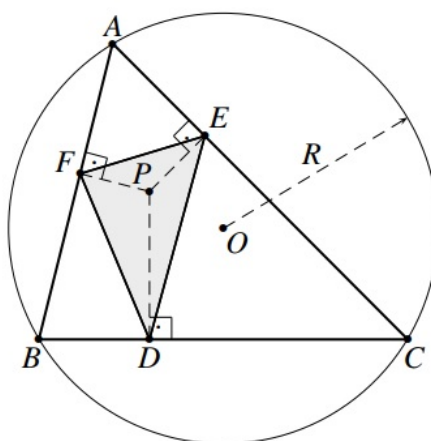
4 Teorema de Euler para o triângulo pedal (caso particular)

Nesta seção, introduzimos uma terceira proposição, esta associada ao triângulo pedal DEF , inscrito no triângulo ABC , em que os pontos D , E e F correspondem aos pés das projeções ortogonais de um ponto P , localizado no interior do triângulo, sobre seus lados [2].

Proposição 10 *Seja ABC um triângulo com circuncentro O e circunraio R , raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Se P é um ponto interior ao triângulo ABC e D , E , e F as projeções ortogonais de P sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, conforme Figura 12, então*

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{R^2 - OP^2}{4 \cdot R^2}.$$

Figura 12: Triângulos ABC , DEF e o circuncírculo.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

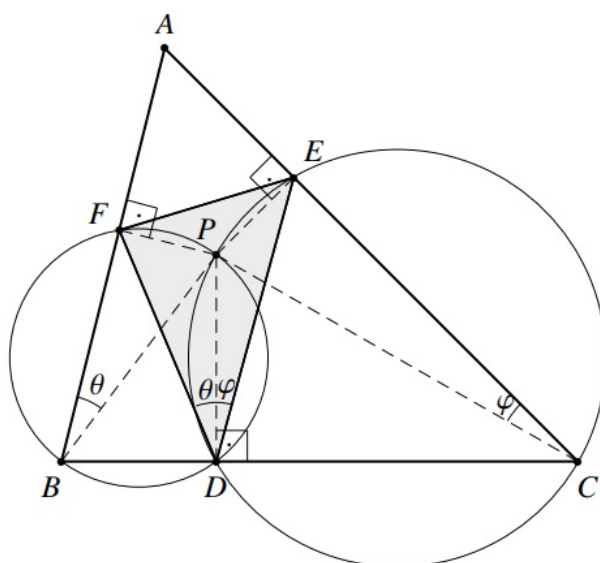
Demonstração. Para começar, utilizamos a fórmula que determina a área de um triângulo, com base no semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo entre eles. Assim, podemos escrever:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DF \cdot DE \cdot \sin(\widehat{FDE})}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{DF \cdot DE \cdot \sin(\widehat{FDE})}{AB \cdot CA \cdot \sin \widehat{A}}. \quad (16)$$

Nos quadriláteros convexo $BFPD$ e $CDPE$, há pares de ângulos opostos retos, o que implica que ambos são cíclicos. Além disso, seus circuncírculos têm como diâmetros $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$, respectivamente. Como resultado da propriedade de ângulos inscritos numa circunferência, temos as seguintes relações, destacadas na Figura 13.

$$\widehat{FBP} = \widehat{FDP} = \theta, \quad \widehat{PDE} = \widehat{PCE} = \varphi \quad \text{e} \quad \widehat{FDE} = \theta + \varphi. \quad (17)$$

Figura 13: Quadriláteros cíclicos $BFPD$, $CDPE$ e seus circuncírculos.



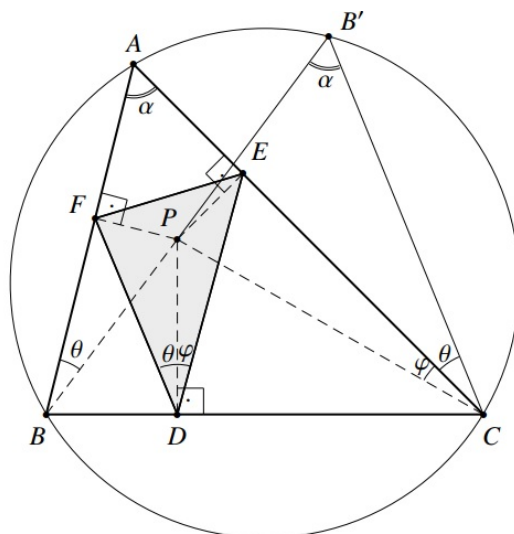
Fonte: elaborada pelos próprios autores

Prolongando $\overline{BP}$ até interceptar o circuncírculo do triângulo ABC no ponto B' , com $B' \neq B$, e traçando o segmento $\overline{CB'}$, determina-se o triângulo CPB' , cujos ângulos internos de vértices C e B' são dados por

$$\widehat{PCB'} = \theta + \varphi = \widehat{FDE} \quad \text{e} \quad \widehat{PB'C} = \widehat{BB'C} = \widehat{BAC} = \widehat{A}, \quad (18)$$

conforme ilustrado na Figura 14. Essas relações decorrem diretamente das obtidas na Eq.(17) e da propriedade dos ângulos inscritos em uma circunferência.

Figura 14: Triângulo CPB' com $\widehat{PCB'} = \widehat{FDE}$.



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Nestas condições, podemos afirmar que:

1. Das relações Eq.(18) e da lei dos senos aplicada ao triângulo CPB'

$$\frac{PB'}{\sin(\widehat{FDE})} = \frac{CP}{\sin(\widehat{A})} \iff \sin(\widehat{FDE}) = \frac{PB'}{CP} \cdot \sin(\widehat{A}). \quad (19)$$

2. Da lei dos senos aplicada aos triângulos DBF e CDE , cujos circuncírculos têm $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$, respectivamente, como diâmetros, temos

$$DF = BP \cdot \sin(\widehat{B}) \quad \text{e} \quad DE = CP \cdot \sin(\widehat{C}). \quad (20)$$

3. Da potência do ponto P em relação ao circuncírculo do triângulo ABC , temos

$$BP \cdot PB' = (R + OP)(R - OP) = R^2 - OP^2. \quad (21)$$

4. Da lei dos senos aplicada ao triângulo ABC , obtemos

$$AB = 2R \cdot \sin(\widehat{C}) \quad \text{e} \quad AC = 2R \cdot \sin(\widehat{B}). \quad (22)$$

Substituindo os resultados das Eq.(19) e Eq.(20) na Eq.(16) e simplificando, obtemos

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{BP \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot CP \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot \frac{PB'}{CP} \cdot \sin(\widehat{A})}{AB \cdot CA \cdot \sin(\widehat{A})} = \frac{BP \cdot PB' \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})}{AB \cdot CA}.$$

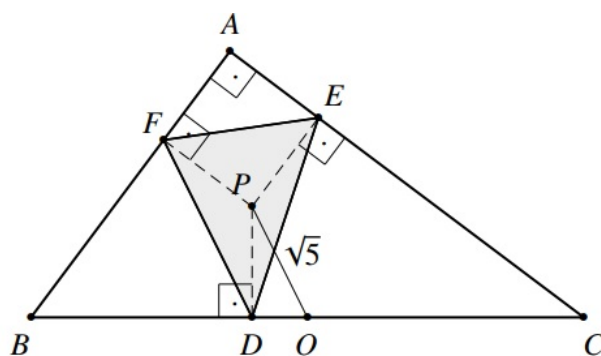
Por fim, substituindo os resultados obtidos nas Eq.(21) e Eq.(22) na expressão anterior e, em seguida, simplificando, resulta

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{BP \cdot PB' \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})}{AB \cdot CA} = \frac{(R^2 - OP^2) \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})}{2R \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot 2R \cdot \sin(\widehat{B})} = \frac{R^2 - OP^2}{4 \cdot R^2},$$

que é o resultado desejado. □

Exemplo 11 A Figura 15 mostra um triângulo ABC , retângulo em A , o circuncentro O , ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$ e um ponto P situado no interior do triângulo com $OP = \sqrt{5}$. Os pontos D , E e F representam as projeções ortogonais de P sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Sabendo que $BC = 10$, calcule o valor da razão $\frac{[DEF]}{[ABC]}$.

Figura 15: Triângulos ABC , DEF e o circuncentro O .



Fonte: elaborada pelos próprios autores

Solução. Sendo O circuncentro do triângulo ABC e o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$, temos que $\overline{BC}$ é o diâmetro da circunferência circunscrita. Assim, o circunraio R é dado por $R = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Como o triângulo DEF é o triângulo pedal associado ao ponto P em relação aos lados do triângulo ABC , temos pela Proposição 10:

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{R^2 - OP^2}{4 \cdot R^2} = \frac{5^2 - (\sqrt{5})^2}{4 \cdot 5^2} = \frac{1}{5},$$

que é o resultado desejado.

Agradecimentos

Agradecemos aos revisores pelas sugestões, as quais deixaram o texto mais didático.

5 Conclusão

Este artigo apresentou relações geométricas singulares que expandem o entendimento sobre triângulos e suas áreas. As conclusões obtidas abrem perspectivas promissoras para estudos futuros, incluindo investigações aprofundadas sobre problemas clássicos, como o teorema de Euler aplicado a triângulos pedal. Dessa forma, este trabalho não apenas fortalece os fundamentos matemáticos, mas também fomenta novas descobertas e avanços teóricos no campo da geometria.

Referências

- [1] OLIVEIRA, E. C.; NERY, C. **Geometria plana em 13 mandamentos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2025.



-
- [2] JOHNSON, R. A. **Advanced Euclidean Geometry**. New York: Dover Publications Inc., 1960.
- [3] LOPES, D. Áreas e aplicações em geometria. *In*: OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, SEMANA OLÍMPICA, 18., 2015, São José do Rio Preto, **[Material de estudo]**. São José do Rio Preto: Associação Olimpíada Brasileira de Matemática, 2015. p. 1–14.
- [4] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry revisited**. Washington: The Mathematical Association of America, 1967.